TURUN YLIOPISTO

Täydelliset luvut

Kandidaatin tutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Iiro Myllymäki
Maaliskuu 2024

Sisällys

1 Johdanto **3**

2 Mersennen alkuluku **4**

3 Edistyneempiä lauseita täydellisille luvuille **8**

1 Johdanto

Ensimmäinen henkilö kategorisoimaan täydellisiä lukuja oli kreikkalainen matemaatikko Eukleides 300-luvulla ennen ajanlaskun alkua. Noin 100 vuotta eaa. Nicomachus totesi, että täydelliset luvut ovat sopusoinnussa yli- ja alijäämän ääripäiden välillä, kun jakajien summa on liian iso taikka liian pieni. Hänen mukaan listaus $(6, 28, 496, 8192)$ sisältää ainoat täydelliset luvut välillä $[1, 10000]$. Hänen mukaan täydelliset luvut myös päättyvät vuoron perään numeroihin 6 tai 8. Vuosisadan 1100 jaa. lopussa Joseph Judah Ankin arvioi täydellisten lukujen opiskelun ja tutkimisen olevan tärkeä osa sielun parantamista. Hrotsvitha listasi 1000 jaa. neljä täydellistä lukua hänen teoksessaan *Sapientia* seuraavasti.

> We should not leave unmentioned the principal numbers ... those which are called "perfect numbers." These have parts which are neither larger nor smaller than the number itself, such as the number six, whose parts, three, two, and one, add up to exactly the same sum as the number itself. For the same reason twenty-eight, four hundred ninety-six, and eight thousand one hundred twenty-eight are called perfect numbers.

Aurelius Augustinus ajatteli luvun 6 olevan erityisen täydellinen luku. Kristinuskon Jumala loi Maata juuri kuusi päivää merkitäkseen hänen työnsä täydellistä jälkeä. Ensimmäisellä vuosisadalla Filon Aleksandrialainen mainitsi kaikista tuotteliaimman luvun olevan ensimmäinen täydellinen luku 6. Marin Mersenne teki tärkeää työtä tutkijana. Vuonna 1626 hän julkaisi työkokoelman Synopsis mathematica on mathematics and mechanics ja teki läpimurtoja myös optiikkaan. Täydellisillä luvuilla on uniikki ominaisuus binäärijärjestelmässä, minkä František Josef Studnička totesi 1900-luvulla. Hän huomasi täydellisten lukujen olevan sellaista binäärilukumuotoa, jossa ensin on rivissä ykkösiä ja perässä nollia. Ykkösiä on aina yksi enemmän kuin nollia.

Taulukko 1: Listaus Studničkan löytämästä havainnosta.

6	$=110_2$
28	$=11100_2$
496	$=111110000_2$
8128	$=1111111000000_2$
33550336	$=1111111111111000000000000_2$

12:nnen täydellisen luvun löysi Édouard Lucas vuonna 1876. Alkuluku $2^{127} - 1$ oli suurin seuraavat 75 vuotta. Tässä tutkielmassa tutkitaan lukujen alkulukutekijöiden summia. Ensin esitetään alkulukujen ominaisuuksia ja jatketaan tietynlaisiin alkulukuihin.

2 Mersennen alkuluku

Määritelmä 2.1. *Jakajien summa* on funktio $\sigma(n) = \Sigma_{d|n} d$, missä d on positiivinen luku n jakajat mukaan lukien luvut 1 ja n.

Esimerkki 2.1. Esimerkiksi $\sigma(11) = 1+11 = 12$ ja $\sigma(15) = 1+3+5+15 = 24$.

Määritelmä 2.2. Lukua N kutsutaan *täydelliseksi*, jos $\sigma(n) = 2N$ on tosi. Kun $\sigma(N) < 2N$, kutsutaan luvun N olevan *riittämätön*. Kun $\sigma(N) > 2N$, kutsutaan N olevan *riittävä*.

Täydellisen määritelmä vastaa luvun N omien jakajien summan olevan yhtä suuri kuin N. Kuitenkaan lukua N ei summata mukaan. Vaikka tämä saattaa vaikuttaa luonnolliselta, keskeinen syy käyttää funktiota σ ovat sen tietyt, hyvin erityiset ominaisuudet.

Määritelmä 2.3. Suurin yhteinen tekijä, merkitään $\gcd(m, n)$, on lukujen (m, n) suurin sellainen luku, joka jakaa molemmat luvut m ja n niin, että lopputulos on kokonaisluku.

Lemma 2.2. $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ *aina, kun* $\gcd(m, n) = 1$.

Todistus. Jos luku d on luvun mn jakaja, voidaan yksikäsitteisesti esittää luvun d olevan erillisesti lukujen m ja n jakaja. Täten funktion $\sigma(mn)$ jokainen termi esiintyy täsmälleen kerran summassa $\sigma(m)\sigma(n)$. Käänteinen tulos on myös tosi: jokainen tällainen tulo on luvun jakaja mn, joten summien on oltava yhtä suuria. □

Täten σ täysin määrätty, kun sen arvo tiedetään jokaiselle alkuluvun potenssille.

Lause 2.3. Olkoon $N = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ luvun N alkulukuhajotelma. Silloin

$$\sigma(n) = \Pi_{i=1}^{k}\left(1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_k^{\alpha_i}\right) = \Pi_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Todistus. Ainoat luvun $p_i^{\alpha_i}$ jakajat on $1, p_i, p_i^2, \ldots, p_i^{\alpha_i}$, joten

$$\sigma(n) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i}.$$

Normaalimuotoinen geometrinen sarja on muotoa

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Tästä seuraa, että $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = \left(p_i^{\alpha_i+1} - 1\right) / (p_i - 1)$. Koska σ on multiplikatiivinen lemman 2.2 mukaan, voidaan esittää tulos muodossa

$$\sigma(N) = \sigma\left(\Pi_{i=1^k} p_i^{\alpha_i}\right) = \Pi_{i=1}^{k}\sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = \Pi_{i=1}^{k}\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

□

Jotta mainitut määritelmät ja tulokset ymmärretään paremmin, todistetaan seuraavat lemmat.

Lemma 2.4. Jos luku η jakaa luvun N, $\eta \mid N$, niin

$$\sigma(\eta) < \sigma(N).$$

Vielä vahvempikin tulos voidaan esittää

Lemma 2.5. Jos $\eta \mid N$, niin

$$\frac{\sigma(\eta)}{\eta} \leq \frac{\sigma(N)}{N},$$

missä yhtäsuuruus pätee vain jos $\eta = N$.

Todistus. Olkoon $d \mid N$, niin $kd = N$ jollekin luvulle k. Täten $k = (N/d)$. Selvästi $d \mid N$, jos ja vain jos $(N/d) \mid N$, josta seuraa

$$\sigma(N) = \sum_{d|N} d = \sum_{d|N} \frac{N}{d} = N \sum_{d|N} \frac{1}{d}.$$

Jos tällöin η on luvun N jakaja ja $\eta \neq N$,

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \sum_{d|N} \frac{1}{d} > \frac{\sigma(\eta)}{\eta}.$$

Muulloin yhtäsuuruus pätee. □

Tästä lauseesta saadaan myös seuraus 2.6.

Seuraus 2.6. Jos N on täydellinen, $\Sigma_{d|N}(1/d) = 2$.

Todistus. Koska $d \mid N$ tarkoittaa samaa kuin $(N/d) \mid N$, voidaan kirjoittaa

$$\sum_{d|N} d = \sum_{d|N} \frac{N}{d} = N \sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2N$$

Tästä saadaan väite

$$\sum_{d|N} \frac{1}{d} = 2.$$

□

Seuraus 2.7. Lukua n kutsutaan *yhdistetyksi*, jos on olemassa luvut $r, s \in \mathbb{N}_2$, jotka jakavat luvun n. Joukko $\mathbb{N}_2$ tarkoittaa luonnollisia lukuja, kun $n \geq 2$.

Lause 2.8. (Eukleides) Jos $2^n - 1$ on alkuluku, niin luku $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ on täydellinen.

Todistus. Luvun N alkulukuhajotelman alkiot ovat $2^n - 1$ ja 2. Koska luku $2^n - 1$ on jokin alkuluku, pätee $\sigma(2^n - 1) = (1 + (2^n - 1)) = 2^n$. Tällöin on voimassa

$$\sigma(N) = \sigma\left(2^{n-1}\right)\sigma(2^n - 1) = \frac{2^n - 1}{2 - 1}2^n = 2^n(2^n - 1) = 2N,$$

joten luku N on täydellinen. □

Määritellään seuraavaksi Mersennen alkuluku. Lukua $2^n - 1$, joka on alkuluku kutsutaan *Mersennen alkuluvuksi*.

Lause 2.9. (Euler) Jos luku N on parillinen täydellinen luku, se voidaan kirjoittaa muotoon $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$, missä $2^n - 1$ on alkuluku.

Todistus. (Cohen ja Dickson) Olkoon $2^n m = (2^n - 1)\sigma(m)$, missä $2^n - 1 \mid m$. Olkoon $N = 2^{n-1}m$ täydellinen, missä m on pariton. Koska luku m on alkuluku, pätee $2 \nmid m$.

$$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1}m) = \sigma(2^{n-1})\sigma(m) = \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right)\sigma(m) = (2^n - 1)\sigma(m).$$

Koska N on täydellinen, $\sigma(N) = 2N = 2^n m$. Tällöin

$$2^n m = (2^n - 1)\sigma(m).$$

Lemmasta 2.5 saadaan

$$\frac{2^n}{2^n - 1} = \frac{\sigma(m)}{m} > \frac{\sigma(2^n - 1)}{2^n - 1} \geq \frac{1 + (2^n - 1)}{2^n - 1} = \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

Jotta yhtäsuuruus pätee, on oltava voimassa molemmat $2^n - 1 = m$ ja $\sigma(m) = 1 + (2^n - 1) = 1 + m$ tai $m = 2^n - 1$. □

Lause 2.10. Jos $m^n - 1$ on alkuluku, missä $m, n \in \mathbb{Z}_+, n > 0$, niin $m = 2$ ja luku n on alkuluku.

Todistus. Kun $m - 1$ on luvun $m^n - 1$ jakaja, täytyy päteä $m - 1 = 1$, josta $m = 2$. Tällöin luku $m^n - 1$ on alkuluku. Oletetaan luvun n olevan yhdistetty. Nyt pätee $n = r \cdot s$, joillekin $r, s \in \mathbb{N}_2$. Valitaan

$$x^n - 1 = x^{r \cdot s} - 1.$$

Tämä polynomi voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\left(x^s - 1\right)\left(x^{s(r-1)} + x^{s(r-2)} + \cdots + x^s + 1\right).$$

Jos $n = r \cdot s$ on yhdistetty luku, on $2^n - 1$ myös yhdistetty luku, sillä

$$2^s - 1 \mid 2^n - 1.$$

Siis luku n on alkuluku. □

3 Edistyneempiä lauseita täydellisille luvuille

Määritelmä 3.1. Lukua N kutsutaan *kolmioluvuksi*, jos se pystytään kirjoittaa aritmeettisena summana.

Lemma 3.1. Jos luku N on parillinen täydellinen luku, niin luku N on kolmioluku.

Todistus. Oletetaan luvun m olevan kolmioluku eli $m = \sum_{i=1}^{k-1} i = 1 + 2 + \cdots + k = \left(\frac{1}{2}\right) k \left(k - 1\right)$ jollekin luvulle k. Väite seuraa lauseesta 2.9 □

Voidaan myös esittää, mikä vain täydellinen luku kuution summana.

Lemma 3.2. Jos $N = 2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$ on täydellinen, tällöin $n = 1^3 + 2^3 + \cdots + \left(2^{(n-1)/2} - 1\right)^3$.

Todistus. Induktiolla todistettavan tuloksen

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

avulla saadaan todistettua lemma 3.2.

Olkoon $m = 2^{(n-1)/2}$, tällöin

$$\begin{aligned}
1^3 + 3^3 + \cdots + (2m-1)^3 &= \left(1^3 + 2^3 + \cdots + (2m)^3\right) - \left(2^3 + 4^3 + \cdots + (2m)^3\right) \\
&= \frac{(2m)^2 (2m+1)^2}{4} - 2^3 \frac{(m)^2 (m+1)^2}{4} \\
&= m^2 (2m+1)^2 - 2m^2 (m+1)^2 \\
&= m^2 \left(4m^2 + 4m + 1 - 2m^2 - 4m - 1\right) \\
&= m^2 \left(2m^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

□

Käydään läpi Nicomachuksen toteama lause.

Lause 3.3. Jokainen parillinen täydellinen luku päättyy numeroon 6 tai 8.

Todistus. Jokainen alkuluku, joka on suurempi kuin luku 2 voidaan antaa muodossa $4m + 1$ tai $4m + 3$. Ensimmäisessä (1) tapauksessa

$$\begin{aligned}
N &= 2^{n-1} (2^n - 1) = 2^{4m} \left(2^{4m+1} - 1\right) = 16^m (2 \cdot 16^m - 1) \equiv 6^m (2 \cdot 6^m - 1) \\
&\equiv 6 (12 - 1) \equiv 6 \pmod{10},
\end{aligned}$$

koska induktiolla saadaan $6^m \equiv 6 \pmod{10}$. Toisessa (2) tapauksessa

$$N = 4 \cdot 16^m (8 \cdot 16^m - 1) \equiv 4 \cdot 6 (8 \cdot 6 - 1) \equiv 4 (8 - 1) \equiv 8 \pmod{10}.$$

Jos pätee $n = 2$ ja $N = 6$, on kaikki mahdollisuudet tapaukset käsitelty. □

Määritelmä 3.2. Luvun numeroiden *toistuva summa* on sen kongruenssi modulo 9.

Lemma 3.4. (Wantzel) Toistuva summa parillisille täydellisille luvuille, poislukien luku 6, on 1.

Todistus. Olkoon $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$. Osoitetaan ensin $N \equiv 1 \pmod 9$. Nyt $n \not\equiv 0 \pmod 3$, muutoin luku 3 jakaa luvun n, kun n ei ole alkuluku, $(N \neq 6)$ ja N ei ole täydellinen. Tällöin $N \equiv 1$ tai $2 \pmod 3$. Nyt $n = 3k+1$ jollekin luvulle k. Nyt n on pariton ja k on parillinen, joten voidaan kirjoittaa $n = 6k + 1$. Täten

$$N = 2^{6k}\left(2^{6k+1} - 1\right) = 64^k\left(2 \cdot 64^k - 1\right) \equiv (1)(2(1) - 1) = 1 \pmod 9.$$

$n = 3k+2$ jollekin $\exists k$ jolloin n on pariton, k on pariton ja $n = 6k+5$. Tällöin

$$\begin{aligned} N &= 2^{6k+4}\left(2 \cdot 2^{6k+5} - 1\right) \equiv 16(1)(32(1) - 1) \\ &\equiv (-2)(-4-1) = 10 \equiv 1 \pmod 9. \end{aligned}$$

Jos siis $N = a_i \ldots a_1 a_0$, missä a_i on jokin numero välillä $(0, 9)$, summa on

$$\sum_{i=0}^{r} a_i 10^i = \sum_{i=0}^{r} a_i 1^i = \sum_{i=0}^{r} a_i \pmod 9.$$

$\square$

Viitteet

[1] J. Voight: *Perfect numbers: an elementary introduction*, https://api.semanticscholar.org/CorpusID:7723363, luettu 22.12.2023

[2] R.C. Archibald: *Mersenne's numbers*, New York, 1935, Yeshiva College

[3] S.Asadulla: *Even perfect numbers and theis Euler's function*, https://doi.org/10.1155, luettu 21.12.2023

[4] R.M. Robinson *Mersenne and Fermat numbers*, https://doi.org/10.2307, luettu 22.12.2023

[5] M.Parker: *Things to make and do in the fourth dimension*, http://doi.org/10.4169, luettu 8.1.2024

[6] J.Wojciechowski *Mersenne Primes, An Introduction and Overview*, 2004, academia.edu luettu 3.2.2024