TURUN YLIOPISTO

Fourier'n sarjoista

Juho Kyyrönen

Pro gradu -tutkielma
Maaliskuu 2021

Tarkastajat:
Petteri Harjulehto, yliopistonlehtori
Jyrki Lahtonen, lehtori

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KYYRÖNEN JUHO: Fourier'n sarjoista
Pro gradu -tutkielma, 47 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2021

Työn tavoitteena oli selvittää, mitkä ehdot jaksolliselle funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ täytyy asettaa, jotta funktion f Fourier'n sarja suppenee kohti alkuperäistä funktiota. Osoittautuu, että pisteittäisen suppenemisen tutkiminen antaa suppean kuvan siitä, millaisia funktioita Fourier'n sarjoilla voidaan mielekkäästi approksimoida. Esimerkiksi funktion jatkuvuus ei takaa Fourier'n sarjan pisteittäistä suppenemista, mikä osoitetaan tutkielman viimeisessä luvussa.

Lebesguen integaalin avulla saadaan ilmaistua huomattavasti yleisempi suppenemisen muoto. Näin saadaan mielekäs suppenemisehto kaikille jaksollisille Lebesguen neliöintegroituville funktioille. Tämä lähestymistapa yhdistää erilaisia Fourier'n sarjoja koskevia tuloksia yhtenäiseksi teoriaksi, missä euklidisesta avaruudesta tutut käsitteet yleistyvät funktioiden joukkoon.

Koska sini- ja kosinifunktiot ovat äärettömästi derivoituvia, saadaan Fourier'n sarjojen avulla muodostettua hyvin käyttäytyvä approksimaatio jopa epäjatkuville funktioille. Tämä on selvä etu esimerkiksi Taylorin polynomeihin verrattuna, minkä muodostaminen asettaa funktiolle tiukemmat sileysehdot.

Tutkielman päätulokset ovat Fourier'n sarjojen pisteittäistä suppenemista koskevat Lauseet 5.8 ja 5.9, tasaista suppenemista käsittelevä Lause 7.4 sekä neliöintegroituvien funktioiden approksimointia koskeva Lause 8.17.

Asiasanat: Fourier'n sarja, jaksolliset funktiot, approksimaatio

Sisältö

1 Alkusanat

Tutkielmassa käsitellään Fourier'n sarjoja, sarjojen suppenemista sekä Fourier'n sarjojen L^2-teoriaa. Funktion f Fourier'n sarjalla tarkoitetaan sini- ja kosinifunktioiden ääretöntä summaa

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big),$$

missä reaaliluvut a_0, a_n ja b_n ovat funktiolle f ominaiset Fourier'n kertoimet.

Koska trigonometriset funktiot ovat jaksollisia, keskitytään työssä tarkastelemaan esimerkiksi suppenemisehtoja joko yhden jakson aikana tai jaksollisten funktioiden tapauksessa. Laskujen yksinkertaistamiseksi on tarkasteluväliksi valittu $[-\pi, \pi]$. Muuttujanvaihdoksella tutkielman tulokset voidaan kuitenkin yleistää myös erilaisille suljetuille väleille.

Työssä käytetään esitietona Eulerin kaavaa $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Tämä ei ole välttämätöntä, mutta näin säästytään lukuisten trigonometristen identiteettien johtamiselta ja integroiminen helpottuu. Lisäksi L^2-teoria perustuu Lebesgue-mitallisiin funktioihin ja Lebesguen integraaliin, joiden määritelmiä ja perusteita ei tässä tutkielmassa esitellä. Näihin aiheisiin voi tutustua tarkemmin esimerkiksi perehtymällä Ilkka Holopaisen luentomonisteeseen *Mitta ja integraali* [1]. Tutkielman päälähteenä on käytetty Peter Durenin kirjaa *Introduction to Classical Analysis* [2].

2 Johdanto

Osoittautuu, että laaja joukko jaksollisia funktioita voidaan esittää mielekkäästi Fourier'n sarjana. Tällaisia funktiota voidaan luonnollisesti approksimoida Fourier'n sarjan osasummien s_n avulla

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big).$$

Tutkielmassa käsitellään kolmea erilaista suppenemisen muotoa Fourier'n sarjoille. Luvussa 5 tutkitaan sarjan pisteittäistä suppenemista. Luku 7 käsittelee sarjan tasaista suppenemista ja luku 8 Fourier'n sarjojen L^2-teoriaa, missä sarjan suppenemista käsitellään perustavanlaatuisesti erilaisella tavalla kuin pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen tapauksessa.

Oletetaan, että haluamme selvittää funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier'n sarjan. Miten funktion f Fourier'n kertoimet a_0, a_n ja b_n voidaan määrittää? Kertoimille saadaan johdettua yleiset laskukaavat, kun seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Funktio f on mitallinen ja $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big| \, dx < \infty$
2. Funktion f Fourier$'$n sarja suppenee tasaisesti funktioon f joukossa $[-\pi, \pi]$.

Ensimmäinen ehto voidaan ilmaista sanomalla, että funktio f on Lebesgue-integroituva välillä $[-\pi, \pi]$. Ensimmäisen ehdon toteuttaa hyvin laaja joukko funktioita. Luvussa 7 osoitetaan, että toisen ehdon toteuttaa esimerkiksi sellaiset funktiot, joilla on jatkuva derivaattafunktio välillä $[-\pi, \pi]$.

Toista ehtoa hyödynnetään vain Fourier'n kertoimien laskukaavojen johtamiseksi. Myöhemmin Fourier'n kertoimet määritellään laskukaavojen avulla. Näin päästään eroon vaatimuksesta, että funktion f Fourier'n sarjan pitäisi supeta tasaisesti funktioon f joukossa $[-\pi, \pi]$. Seuraavaa aputulosta hyödynnetään, kun johdetaan Fourier'n kertoimien a_o, a_n ja b_n laskukaavat.

Lemma 2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja funktio $g : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu. Jos jono funktioita $f_n : A \to \mathbb{R}$ suppenee tasaisesti joukossa A kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$, niin funktiojono $(f_n g)$ suppenee tasaisesti joukossa A kohti funktiota $fg : A \to \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktio g on rajoitettu, on olemassa sellainen positiivinen luku $M \in \mathbb{R}$, että $\big|g(x)\big| \leq M$ kaikilla $x \in A$. Tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa sellainen $n_\epsilon \in \mathbb{N}_1$, että kaikilla $x \in A$ pätee arvio $\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\epsilon}{M}$, kun $n > n_\epsilon$.

Olkoon $n > n_\epsilon$. Silloin kaikilla $x \in A$ pätee arvio

$$\big|f_n(x)g(x) - f(x)g(x)\big| \leq \big|g(x)\big| \cdot \big|f_n(x) - f(x)\big| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Siis funktiojono $(f_n g)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $fg : A \to \mathbb{R}$ joukossa A.

$\square$

Johdetaan seuraavaksi laskukaavat Fourier'n kertoimille. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integroituva välillä $[-\pi, \pi]$. Oletetaan, että on olemassa niin sanottu funktion f Fourier'n sarja

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big),$$

joka suppenee tasaisesti funktioon f joukossa $[-\pi, \pi]$. Tasaisen suppenemisen nojalla voidaan integraali $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx$ laskea termeittäin

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\ dx + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos(kx)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin(kx)\ dx\Big).$$

Kun termit integroidaan, voidaan havaita että $\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos(kx)\ dx = 0$ ja $\int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin(kx)\ dx = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_1$. Tämän perusteella kertoimelle a_0 saadaan kaava

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\ dx \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Siis Fourier'n sarjan termi $\frac{1}{2}a_0$ on funktion f integraalikeskiarvo välillä $[-\pi, \pi]$. Halutessaan Fourier'n sarjan voi esittää myös muodossa

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx)\Big),$$

missä kerroin c_0 määritellään suoraan integraalikeskiarvona

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx.$$

Tässä tutkielmassa pitäydytään kuitenkin määrittelemään Fourier'n sarja siten, että kertoimen a_0 edessä on kerroin $\frac{1}{2}$, kahdesta syystä. Myöhemmin havaitaan, että näin saadaan jokaiselle Fourier'n kertoimelle a_0, a_n ja b_n sekä myöhemmin esiintyville konvoluutiokaavoille miltei identtinen muotoilu. Toisekseen Fourier'n sarja esitetään usein tässä muodossa kirjallisuudessa. Poikkeuksen muodostaa kompleksinen Fourier'n sarja, mitä tässä tutkielmassa ei käsitellä.

Vastaavalla menetelmällä löydetään kaavat kertoimille a_n ja b_n. Olkoon $m, n \in \mathbb{N}_1$. Lemman 2.1 perusteella $s_m(x)\cos(nx)$ suppenee tasaisesti kohti funktion arvoa $f(x)\cos(nx)$ välillä $[-\pi, \pi]$, missä s_m on funktion f Fourier'n sarjan osasumma. Tasaisen suppenemisen nojalla myös integraali $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx$ voidaan laskea termeittäin

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\cos(nx)\ dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k\cos(kx)\cos(nx)\ dx \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} b_k\sin(kx)\cos(nx)\ dx.\end{aligned}$$

Edelleen $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0\cos(nx)\ dx = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Lisäksi osoittautuu, että yhtälön oikealla puolella kaikki termit häviävät lukuun ottamatta termiä

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos(nx)\cos(nx)\ dx = \pi a_n.$$

Siis funktion f Fourier'n kertoimelle a_n saadaan kaava

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx. \tag{2}$$

Aihetta käsitellään enemmän luvussa 4, missä johdetaan seuraavat relaatiot

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\ dx = 0 \qquad && \text{kaikilla } n, m\ \ , \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\ dx = 0 \qquad && \text{kun } n \neq m \\
\text{ja}\qquad &\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\ dx = 0 \qquad && \text{kun } n \neq m.
\end{aligned}$$

Vastaavasti kertoimelle b_n saataisiin kaava

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx. \tag{3}$$

Määritellään Fourier'n kertoimet laskukaavojen (1) − (3) avulla. Näin pääsemme eroon oletuksesta, että funktion f Fourier'n sarjan pitäisi supeta tasaisesti kohti funktiota f joukossa $[-\pi, \pi]$ ja voimme tutkia erilaisia suppenemisen muotoja. Vaadimme kuitenkin edelleen, että funktio f on Lebesgue-integroituva välillä $[-\pi, \pi]$. Tämä ehto takaa sen, että kertoimet a_0, a_n ja b_n voidaan laskea kaavojen (1) − (3) avulla.

Määritelmä 2.2. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integroituva välillä $[-\pi, \pi]$. Funktion f Fourier'n sarja on sini- ja kosinifunktioiden ääretön summa

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big),$$

missä reaaliluvut a_0, a_n ja b_n ovat funktiolle f ominaiset Fourier'n kertoimet. Funktion f Fourier'n kertoimet määritellään seuraavasti:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\ dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx.$$

Funktion f integroituvuus takaa, että Fourier'n kertoimet a_0, a_n, ja b_n voidaan määrittää ja funktiota vastaava Fourier'n sarja on olemassa. Jos Fourier'n sarjasta ollaan kiinnostuneita vain välillä $[-\pi, \pi]$, riittää, että funktio f on määritelty välillä $[-\pi, \pi]$.

Siirrytään tarkastelemaan vektoriavaruuksien käsitteitä ja erityisesti sisätuloavaruuksia. Fourier'n sarjoja on luonnollista käsitellä funktioavaruudessa, missä sini- ja kosinifunktiot muodostavat funktioavaruuden kantavektorit.

3 Sisätuloavaruuden käsitteitä

Fourier'n sarjojen teoria perustuu trigonometristen funktioiden ortogonaalisuuteen. Euklidisessa avaruudessa ortogonaalisuus vastaa vektorien kohtisuoruutta. Jotta voisimme yleistää useat euklidisen avaruuden konseptit funktioavaruuksiin, määrittelemme käsitteen sisätulo.

Määritelmä 3.1. Olkoon V vektoriavaruus ja f, $g \in V$. Kuvaus $\langle f, g \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ on sisätulo vektoriavaruudessa V, jos se toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla $f, g, h \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$:

(S1) $\quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(S2) $\quad \langle af, g \rangle = a\langle f, g \rangle$

(S3) $\quad \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

(S4) $\quad \langle f, f \rangle \geq 0$

(S5) $\quad \langle f, f \rangle = 0 \iff f = \bar{0}.$

Huomaa, että ehdossa (S5) esiintyvä $\bar{0}$ on nollavektori avaruudessa V.

Todennäköisesti tuttavallisin sitätulon ehdot täyttävä kuvaus on euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelty pistetulo. Esimerkiksi vektorien $u, v \in \mathbb{R}^3$ välinen pistetulo $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ toteuttaa yllä olevat ehdot (S1)$-$(S5). Pistetulon avulla voidaan määritellä esimerkiksi vektorin $u \in \mathbb{R}^3$ pituus $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ ja tutkia ovatko vektorit $u, v \in \mathbb{R}^3$ ortogonaaliset eli toteutuuko ehto $\langle u, v\rangle = 0$. Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ löytyy ortonormaalikanta $\{e_1, e_2, e_3, \ \dots\ , e_n\}$. Toisin sanoen kantavektorit ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden ja jokaisen kantavektorin pituus on 1. Pistetulon avulla jokainen vektori $u \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää muodossa

$$u = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k. \tag{4}$$

Fourier'n sarjojen teorian kannalta tärkeä vektoriavaruus on neliöintegroituvien funktioiden avaruus $L^2[-\pi, \pi]$. Vektoriavaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$ kuuluvat Lebesguemitalliset funktiot f, jotka toteuttavat ehdon

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx < \infty. \tag{5}$$

Mitalliset funktiot kattavat hyvin laajan joukon kuvauksia. Tutkielmassa käsiteltävistä tuloksista useimmat voidaan todistaa vetoamatta funktion mitallisuuteen. Kuitenkin tutkittaessa Fourier'n sarjan suppenemista $L^2[-\pi, \pi]$ avaruudessa, tarvitsemme Lebesguen integraalia, mikä edellyttää funktion mitallisuuden.
Määritellään vektoriavaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$ sisätulo

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \ dx. \tag{6}$$

Tämän sisätulon suhteen voidaan yleistää euklidisesta avaruudesta tutut käsitteet myös funktioiden joukkoon. Sisätulo (6) toteuttaa ehdot (S1)$-$(S5). Tutkielmassa osoitetaan, että trigonometriset funktiot muodostavat ortonormaalin kannan vektroavaruudessa $L^2[-\pi, \pi]$ edellä määritellyn sisätulon (6) suhteen. Tästä seuraa, että jokaiselle neliöintegroituvalle funktiolle saadaan yhtälön (4) mukainen kantaesitys sisätulon (6) avulla lausuttuna. Väitteen todistamiseksi tutkitaan näin muodostetun Fourier'n sarjan suppenemista sekä pisteittäin ja tasaisesti, että määritellyn sisätulon (6) indusoiman metriikan avulla. Esitellään seuraavaksi käsitteet normi ja metriikka.

Sisätulo indusoi vektoriavaruuteen normin. Tämä käsite muistuttaa pistetulon avulla määritettyä vektorin pituutta.

Lause 3.2. Olkoon $\langle f, g\rangle$ sisätulo vektoriavaruudessa V. Sisätulo indusoi vektoriavaruuteen V normin $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$. Alkion $f \in V$ normi on $\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$. Normilla on seuraavat ominaisuudet kaikilla $f, g \in V$ ja $a \in R$:

$$\text{(N1)} \qquad \|f\| \geq 0$$

$$\text{(N2)} \qquad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

$$\text{(N3)} \qquad \|af\| = |a| \cdot \|f\|$$

$$\text{(N4)} \qquad \|f\| = 0 \iff f = \bar{0}.$$

Lauseen todistus sivuutetaan ja se löytyy lähteestä [3] sivuilta 15−17. Normi edelleen indusoi vektoriavaruuteen V metriikan $\|f-g\|$, joka antaa keinon mitata alkioiden $f, g \in V$ välistä eroa. Vektoriavaruuteen $L^2[-\pi,\pi]$ määrittelemämme sisätulo (6) siis indusoi normin, mikä edelleen indusoi vektoriavaruuteen metriikan

$$\|f-g\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-g(x)\right]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Myöhemmin todistetaan, että funktion $f \in L^2[-\pi,\pi]$ Fourier'n sarja suppenee kohti funktiota f metriikan (7) suhteen eli

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-s_n(x)\right]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

missä $s_n(x)$ on funktion f Fourier'n sarjan osasumma pisteessä x. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että määrittelyjoukosta ei löydy väliä, jossa sarja ei suppene kohti vastaavaa funktiota. Kuitenkin erillisiä pisteitä, missä Fourier'n sarja ei suppene vastaavaan funktioon voi olla jopa numeroituvasti ääretön määrä. Kun funktiojono suppenee metriikan (7) suhteen, sanotaan suppenemisen tapahtuvan L^2-normin suhteen.

Jos funktiot f ja g ovat yhtä suuret lukuun ottamatta nollamittaista joukkoa, ovat funktiot yhtä suuret melkein kaikkialla (m.k.). Tämä relaatio jakaa funktiot ekvivalenssiluokkiin avaruudessa $L^2[-\pi,\pi]$. Jos funktiot f ja g ovat yhtä suuret melkein kaikkialla, niin $\|f-g\| = 0$. Valitettavasti pisteittäinen suppeneminen melkein kaikkialla ei tarkoita sitä, että suppeneminen tapahtuisi metriikan (7) suhteen. Vastaavasti suppenemisesta metriikan (7) suhteen ei välttämättä seuraa pisteittäistä suppenemista melkein kaikissa pisteissä.

4 Ortonormaali joukko ja funktion approksimointi

Laskutoimituksien helpottamiseksi hyödynnetään Eulerin kaavaa

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x). \tag{8}$$

Trigonometriset funktiot $\sin(nx)$ ja $\cos(nx)$ voidaan esittää kompleksilukujen eksponenttifunktion avulla

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \tag{9}$$

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}. \tag{10}$$

Tämä ei ole välttämätöntä, mutta helpottaa esimerkiksi funktioiden integroimista. Muuttujaa vaihtamalla on argumentti (x) korvattu termillä (nx). Funktion $f(x) = e^{inx}$ derivaatta ja integraalifunktio ovat

$$f'(x) = ine^{inx} \qquad \text{ja} \qquad \int e^{inx}\, dx = \frac{1}{in}e^{inx} + C,$$

missä C on integroimisvakio.

Esitellään vektoriavaruden $L^2[-\pi, \pi]$ kantavektorit. On tärkeää huomata, että L^2-teoria perustuu juuri määriteltyyn sisätuloon (6), eikä yleisesti Määritelmän 3.1 ehdot täyttäviin kuvauksiin.

4.1 Ortonormaali joukko

Lause 4.1. Funktioiden joukko

$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos(x),\ \sin(x),\ \cos(2x),\ \sin(2x), ... \right\} \tag{11}$$

on ortonormaali joukko sisätulon (6) suhteen eli kaikilla $f, g \in \mathbb{B}$ pätee

$$\langle f, g \rangle = 1 \iff f = g \qquad \text{ja} \qquad \langle f, g \rangle = 0 \iff f \neq g.$$

Todistus. Olkoon $n, m \in \mathbb{N}_1$. Funktiot ovat ortogonaalisia, jos

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(nx)\, dx = 0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(nx)\, dx \qquad \text{kaikilla } n \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\, dx = 0 \qquad \text{kaikilla } n, m \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\, dx = 0 \qquad \text{kun } n \neq m \tag{14}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = 0 \qquad \text{kun } n \neq m. \tag{15}$$

Ortogonaalisuusehto (12) saadaan tavallisesti integroimalla. Osoitetaan kohta (13) käyttämällä trigonometristen funktioiden identiteettejä (9) ja (10).
Tarkastellaan ensin tapausta $n \neq m$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\cdot\frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4i}\Big(e^{i(n+m)x} - e^{i(n-m)x} + e^{-i(n-m)x} - e^{-i(n+m)x}\Big)\ dx.
\end{aligned}$$

Integroitavat termit ovat muotoa $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\ dx$, missä k on nollasta poikkeava kokonaisluku. Termeistä tulee arvoksi nolla, koska

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\ dx = \frac{e^{ik\pi}-e^{-ik\pi}}{ik} = \frac{2sin(k\pi)}{k} = 0.$$

Kun $n = m$ saadaan integraali laskettua sijoituksella $u = \sin(nx)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{2\pi n}\Big(\sin^2(n\pi) - \sin^2(-n\pi)\Big) = 0.$$

Kohdat (14) ja (15) saadaan laskettua vastaavalla tavalla. Funktioiden joukko on ortonormaali sisätulon (6) suhteen, koska funktiot ovat ortogonaalisia toisiinsa nähden ja suoraan integroimalla havaitaan että

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = 1 \qquad \text{ja} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\ dx = 1,$$

kun $n \in \mathbb{N}_1$ sekä vakiofunktiolle $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pätee

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\ dx = 1.$$

□

Halutessaan sisätulon (6) voi määritellä ilman integraalin edessä esiintyvää kerrointa π^{-1} eli muodossa

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx,$$

tai korvaamalla se jollain muulla kertoimella. Tämä kuitenkin vaikuttaa ortonormaalin joukon (11) kertoimiin. Tutkielmassa päädyttiin siihen, että kantavektoreiksi halutaan funktiot $\sin(nx)$ ja $\cos(nx)$ ilman ylimääräisiä kertoimia. Tämän seurauksena päädyttiin määrittelemään sisätulo (6) etumerkillä π^{-1}. Tämän seurauksena ortonormaalin joukon (11) vakiofunktio on muotoa $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.2 Kantaesitys ja funktion approksimointi

Lauseen 4.1 ortonormaali joukko (11) muodostaa vektoriavaruuden $L^2[-\pi,\pi]$ kannan. Kantavektoreita on äärettömän monta, joten yhtälön (4) mukaisesta kantaesityksestä tulee sarja, Fourier'n sarja. Fourier'n sarja saadaan määritelmän 2.2 mukaiseen muotoon, kun

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_0 &= \langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx\right),\\ a_n &= \langle f(x), \cos(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\\ b_n &= \langle f(x), \sin(nx)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx.\end{aligned} \tag{16}$$

Todistetaan, että näin muodostetun Fourier'n sarjan osasumma s_n on paras mahdollinen approksimaatio funktiolle $f \in L^2[-\pi,\pi]$ metriikan (7) suhteen trigonometristen polynomien T_m joukosta, missä $m \in \mathbb{N}_1$ ja $m \leq n$. Trigonometrisella polynomilla T_m tarkoitetaan sini- ja kosinifunktioiden summaa

$$T_m(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{m}\Big(c_k\cos(kx) + d_k\sin(kx)\Big). \tag{17}$$

Lause 4.2. Olkoon $f \in L^2[-\pi,\pi]$ ja s_n funktion f Fourier'n sarjan osasumma. Kaikilla trigonometrisilla polynomeilla T_m, missä $m \leq n$, pätee epäyhtälö

$$\|f - s_n\| \leq \|f - T_m\|.$$

Todistus. Halutaan siis osoittaa, että trigonometrisista polynomeista T_m, missä $m \leq n$, Fourier'n sarjan osasumma s_n minimoi integraalin

$$\|f - T_m\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x) - T_m(x)\big]^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Koska osa termeistä voidaan asettaa nollaksi, väitteen osoittamiseksi riittää tutkia trigonometrisiä polynomeja muotoa T_n ja minimoida integraali

$$\int_{-\pi}^{\pi}\big[f(x) - T_n(x)\big]^2\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\ dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\ dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)^2\ dx.$$

Keskitytään yhtälön oikealla puolella toiseen ja kolmanteen integraaliin. Sijoittamalla T_n saadaan termistä $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\ dx$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}c_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx + \sum_{k=1}^{n} c_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ dx + \sum_{k=1}^{n} d_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ dx\\ &= \frac{1}{2}\pi c_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}\pi c_k a_k + \sum_{k=1}^{n}\pi d_k b_k.\end{aligned}$$

Ortogonaalisuusehtojen (12) – (15) perusteella termistä $\int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)^2\, dx$ jää jäljelle

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \big(\frac{1}{2}c_0\big)^2\, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(c_k \cos(kx)\big)^2\, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \big(d_k \sin(kx)\big)^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\pi c_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} d_k^2.
\end{aligned}$$

Sijoittamalla lasketut integraalit takaisin alkuperäiseen yhtälöön, saadaan lausekkeen $\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - T_n(x)\big]^2\, dx$ arvoksi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx - \pi a_0 c_0 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \big(c_k a_k + d_k b_k\big) + \frac{1}{2}\pi c_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \big(c_k^2 + d_k^2\big). \tag{18}$$

Verrataan tulosta tapaukseen, jossa $T_n = s_n$ eli trigonometrinen polynomi on Fourier'n sarjan osasumma. Tulos vastaa tilannetta, missä teemme sijoituksen $c_k = a_k$ ja $c_0 = a_0$ sekä $d_k = b_k$. Näin saadaan integraalin $\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_n(x)\big]^2\, dx$ arvoksi

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx - \pi a_0^2 - 2\pi \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big) + \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx - \frac{1}{2}\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} \big(a_k^2 + b_k^2\big).
\end{aligned} \tag{19}$$

Vertaamalla yhtälöitä (18) ja (19) saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - T_n(x)\big]^2\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_n(x)\big]^2\, dx \\
&= \frac{1}{2}\pi c_0^2 - \pi a_0 c_0 + \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \big(\pi a_k^2 - 2\pi c_k a_k + \pi c_k^2 + \pi b_k^2 - 2\pi d_k b_k + \pi d_k^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\pi (c_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \Big((a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2\Big).
\end{aligned}$$

Jäljellä olevat termit ovat positiivia, joten kaikille trigonometrisille polynomeille T_n pätee

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_n(x)\big]^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - T_n(x)\big]^2\, dx. \tag{20}$$

Toisin sanoen funktion f Fourier'n sarjan osasumma s_n on paras mahdollinen approksimaatio metriikan (7) suhteen trigonometristen polynomien T_n joukosta. Asettamalla $c_0 = a_0$ sekä $c_k = a_k$ ja $d_k = b_k$ kaikilla $k < n$ ja $c_n = 0 = d_n$ havaitaan, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_n(x)\big]^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_{n-1}(x)\big]^2\, dx.$$

Eli approksimaatio osasummilla s_n tarkentuu metriikan suhteen, kun n kasvaa. Tästä seuraa myös, että osasumma s_n on paras approksimaatio funktioiden T_m joukosta, missä $m \in \mathbb{N}_1$ ja $m \leq n$. $\square$

Yhtälön (19) perusteella saadaan myös osoitettua, että neliöintegroituvan funktion Fourier'n kertoimet suppenevat arvoon 0. Tulosta hyödynnetään esimerkiksi pisteittäisen suppenemisen todistuksessa.

Lause 4.3. Jos $f \in L^2[-\pi, \pi]$, niin funktion f Fourier'n kertoimien muodostama sarja

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

suppenee ja kertoimille a_k ja b_k pätee

$$a_k \to 0 \text{ ja } b_k \to 0, \text{ kun } k \to \infty.$$

Todistus. Yhtälöstä (19) saadaan arvio osasumman s_n kertoimille

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - s_n(x)\right]^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \frac{1}{2}\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \\
\iff &\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - s_n(x)\right]^2 \, dx + \frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \\
\implies &\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Summan termit ovat ei-negatiivia ja jokainen summa on ylhäältä rajoitettu. Siis funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$ Fourier'n sarjan kertoimille pätee epäyhtälö

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx. \tag{21}$$

Oikean puoleinen integraali on ääreellinen funktioavaruuden $L^2[-\pi, \pi]$ määritelmän perusteella. Siksi Fourier'n kertoimien muodostama sarja suppenee, minkä seurauksena kertoimille a_k ja b_k pätee

$$a_k \to 0 \text{ ja } b_k \to 0 \text{ , kun } k \to \infty.$$

$\square$

Myöhemmin osoitetaan, että neliöintegroituvien funktioiden Fourier'n sarja suppenee L^2-normin suhteen kohti funktiota f, mistä seuraa että

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - s_n(x)\big]^2 \, dx \to 0 \ , \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Siis kohdan (21) epäyhtälö voidaan korvata yhtäsuuruudella, kun funktio f kuuluu avaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$.

5 Pisteittäinen suppeneminen

Käsitellään ensin Fourier'n sarjojen pisteittäistä suppenemista. Luku 5 perustuu kirjan *Invitation to Classical analysis* [2] lukuun 8.4. Määritellään konvoluutio-operaatio, jota käytetään muun muassa pisteittäisen suppenemisen todistamiseen.

Määritelmä 5.1. Konvoluutioksi kutsutaan funktioiden välistä operaatiota

$$\big(g * f\big)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(x+t) \ dt.$$

Näin määritelty integraalimuunnos tuottaa uuden funktion $\big(g * f\big)$. Määritelmän 5.1 taustalla on Lause 5.6, jonka perustella 2π-periodisen funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$ Fourier'n sarjan osasumma s_n voidaan ilmaista konvoluutiona

$$s_n(x) = \big(D_n * f\big)(x),$$

missä D_n on niin sanottu Dirichletin integroimisydin. Määritelmä 5.1 poikkeaa tavanomaisesta konvoluution määritelmästä

$$\big(g * f\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f(x-t) \ dt.$$

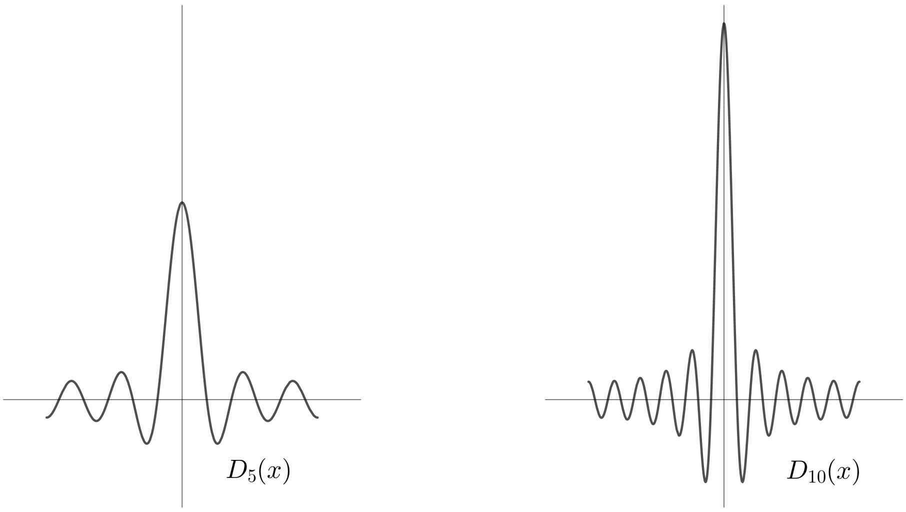
Molempien integraalimuunnosten idea on kuitenkin sama. Molemmissa tapauksissa voidaan funktion g paikalle sijoittaa sopivasti valittu tiheysfunktio. Silloin funktio $\big(g * f\big)$ on ikään kuin funktion f painotettu keskiarvo, joka approksimoi funktiota f halutulla tavalla. Määritelmässä 5.1 kerroin $\frac{1}{\pi}$ normittaa tiheysfunktion D_n eli Dirichletin integroimisytimen, jota tutkielmassa sovelletaan. Näin saadaan konvoluutiolle ja sisätulolle miltei identtinen muotoilu. Halutessaan kertoimen voi kuitenkin sijoittaa suoraan integroimisytimeen.

Määritelmä 5.2. Dirichletin integroimisytimeksi $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kutsutaan summaa

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

Merkitään $D_0(x) = \frac{1}{2}$. Dirichletin ydin on $2\pi-$periodinen funktio eli $D_n(x) = D_n(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska kyseessä on kosinifunktioiden summa, pätee yhtäsuuruus $D_n(-x) = D_n(x)$.

Kuvassa 1 on havainnollistettu Dirichletin ytimen käyttäytymistä välillä $[-\pi, \pi]$. Dirichletin ydin osoittautuu hyödylliseksi, kun käsitellään Fourier'n sarjojen pisteittäistä suppenemista. Dirichletin ytimen ongelmaksi koituu kuitenkin se, että ydin D_n saa negatiivisia arvoja kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$.



Kuva 1: Dirichletin ytimien D_5 (vasemmalla) ja D_{10} (oikealla) kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$ eli yhden jakson aikana.

Lemma 5.3. Dirichletin ytimellä on kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ ominaisuudet

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin(\frac{1}{2}x)}, & \text{kun } x \neq 0 \\ n + \frac{1}{2}, & \text{kun } x = 0 \end{cases} \tag{22}$$

$$\text{ja} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1. \tag{23}$$

Todistus. Kohta (23) saadaan todistettua tavallisesti integroimalla

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\, dx = 1.$$

Kohta (22) on selvä, jos $n = 0$. Käsitellään tapaukset $n \geq 1$. Tapauksessa $x \neq 0$ voidaan todistaa kohdan (22) kanssa ekvivalentti väite

$$\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big) + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\cos(kx) = \sin\Big(\big(n + \frac{1}{2}\big)x\Big). \tag{24}$$

Hyödynnetään kaavoja (9) ja (10). Summatermistä saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} 2\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{i\frac{1}{2}x}-e^{-i\frac{1}{2}x}}{i}\cdot\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x}-e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{2i}-\frac{e^{i(k-\frac{1}{2})x}-e^{-i(k-\frac{1}{2})x}}{2i}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\Big((k+\frac{1}{2})x\Big)-\sin\Big((k-\frac{1}{2})x\Big)\right]$$
$$=\sin\Big((n+\frac{1}{2})x\Big)-\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big).$$

Siirtämällä jälkimmäinen termi yhtälön vasemmalle puolelle nähdään, että väite pätee, kun $x \neq 0$. Tapauksessa $x = 0$ väite pätee, sillä $\cos(0) = 1$. □

Konvoluution avulla voidaan Fourier'n sarjojen suppenemista tutkia tarkastelemalla integroimisytimen käyttäytymistä. Koska Dirichletin ydin D_n saa negatiivisa arvoja kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, ei ehto (23) takaa sitä, että integraali $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|D_n(x)\big|\,dx$ olisi rajoitettu. Itse asiassa Dirichletin ytimelle D_n pätee

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\big|D_n(t)\big|\,dt = \infty. \tag{25}$$

Tämä koituu Dirichletin ytimen ongelmaksi ja tekee Fourier'n sarjojen suppenemisen teoriasta vaikeaa. Edes 2π-periodisen funktion f jatkuvuus ei riitä takaamaan sitä, että funktion f Fourier'n sarja suppenisi pisteittäin kohti funktiota f, kuten luvussa 9 osoitetaan. Saamme kuitenkin hyödyllisiä tuloksia myös Dirichletin ytimen avulla, kun funktion f muutosnopeudelle asetetaan rajoituksia. Esitellään tarvittavat aputulokset, joita hyödynnetään, kun tutkitaan Fourier'n sarjojen pisteittäistä suppenemista.

Lemma 5.4. Kaikilla $k, x, t \in \mathbb{R}$ pätee yhtälö

$$\cos(kx)\cos(kt)+\sin(kx)\sin(kt)=\cos\Big(k(x-t)\Big).$$

Todistus. Ensimmäisestä termistä saadaan yhtälön (9) avulla

$$\cos(kx)\cos(kt) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\cdot\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$$
$$=\frac{e^{ik(x+t)}+e^{ik(x-t)}+e^{-ik(x-t)}+e^{-ik(x+t)}}{4}=\frac{1}{2}\cos\Big(k(x+t)\Big)+\frac{1}{2}\cos\Big(k(x-t)\Big).$$

Toisesta termistä saadaan vastaavasti yhtälön (10) avulla

$$\sin(kx)\sin(kt) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\cdot\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i}$$
$$=-\frac{e^{ik(x+t)}-e^{ik(x-t)}-e^{-ik(x-t)}+e^{-ik(x+t)}}{4}=-\frac{1}{2}\cos\Big(k(x+t)\Big)+\frac{1}{2}\cos\Big(k(x-t)\Big).$$

Termit summaamalla nähdään, että väite pätee. □

Lemma 5.5. Kaikilla $n, x \in \mathbb{R}$ pätee yhtälö

$$\sin\Big((n + \frac{1}{2})x\Big) = \cos\Big(\frac{1}{2}x\Big)\sin(nx) + \sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\cos(nx).$$

Lemma voidaan todistaa kaavoja (9) ja (10) hyödyntäen ja termejä järjestellen, kuten vastaavat identiteetit. Todistus sivuutetaan.

Lause 5.6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Silloin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$s_n(x) = \big(D_n * f\big)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)\ dt.$$

Siis funktion f Fourier'n sarjan osasumma s_n voidaan ilmaista konvoluutiona $\big(D_n * f\big)$.

Todistus. Kun Fourier'n kertoimet ilmaistaan sisätulon avulla ja sovelletaan Lemmaa 5.4, saadaan

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)\Big)\right] f(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\Big(k(x - t)\Big)\right] f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - t)f(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)\ dt = \big(D_n * f\big)(x).
\end{aligned}$$

Toisiksi viimeinen yhtäsuuruus perustuu funktioiden D_n ja f jaksollisuuteen sekä siihen, että Dirichletin ytimelle pätee $D_n(x) = D_n(-x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. □

Lause 5.6 osoittautuu hyödylliseksi, kun tarkastellaan Fourier'n sarjojen pisteittäistä suppenemista. Jos halutaan osoittaa, että funktion f Fourier'n sarjan osasumma s_n suppenee kohti funktiota f, riittää osoittaa, että lauseke

$$\big(D_n * f\big)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)\ dt$$

suppenee kohti funktiota f kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin käy esimerkiksi 2π-periodisen Lipschitz-jatkuvan funktion tapauksessa. Väitteen todistamiseksi tarvitaan kuitenkin seuraava arvio, jota hyödynnetään useammassa todistuksessa.

Lemma 5.7. Kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$ pätee epäyhtälö

$$\sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big) \geq \Big(\frac{x}{\pi}\Big)^2 .$$

Todistus. Symmetrian nojalla riittää todistaa väite välillä $[0, \pi]$.
Epäyhtälö $g(x) = x\cos(x) - \sin(x) \leq 0$ on voimassa välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$, koska $g(0) = 0$ ja $g'(x) = -x\sin(x) < 0$ välillä $(0, \frac{\pi}{2}]$. Määritellään funktio h ja todistetaan epäyhtälö

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi} \ , \text{ kaikilla } x \in (0, \frac{\pi}{2}]. \tag{26}$$

Yhtäsuuruus on voimassa päätepisteessä $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$. Havaitaan, että

$$h'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \leq 0 \ , \text{ kaikilla } x \in (0, \frac{\pi}{2}].$$

Siis epäyhtälö (26) on voimassa, koska funktio h on laskeva annetulla välillä ja yhtäsuurus on voimassa pisteessä $\frac{\pi}{2}$. Alkuperäinen väite seuraa, sillä ehdon (26) perusteella kaikilla $x \in (0, \pi]$ pätee

$$\begin{aligned} \sin\Big(\frac{1}{2}x\Big) &\geq \frac{x}{\pi} > 0 \\ \implies \sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big) &\geq \Big(\frac{x}{\pi}\Big)^2 \end{aligned}$$

ja pisteessä $x = 0$ on voimassa yhtäsuuruus. Joten väite pätee välillä $[0, \pi]$ ja symmetrian nojalla myös välillä $[-\pi, \pi]$. □

Edellä esiteltyjen työkalujen avulla voidaan todistaa ensimmäinen lause koskien Fourier'n sarjojen suppenemista.

Lause 5.8. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos funktio f on Lipschitz-jatkuva eli

$$\big|f(x + t) - f(x)\big| \leq C|t| \ , \text{ kaikilla } x, t \in \mathbb{R},$$

niin $s_n(x) \to f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Koska funktio f on jatkuva, se on mitallinen ja suljetulla välillä rajoitettu. Tämän perusteella f kuuluu avaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$. Kun muistetaan, että $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\ dt = 1$, voidaan Lauseen 5.6 avulla erotus $s_n(x) - f(x)$ ilmaista muodossa

$$\begin{aligned} s_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)f(x + t)\ dt - f(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\ dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\Big[f(x + t) - f(x)\Big]\ dt. \end{aligned}$$

Ytimen arvolla pisteessä $t = 0$ ei ole väliä integroinnin kannalta. Siksi voimme merkitä integraalin kohdan (22) perusteella muodossa

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}\Big[f(x+t)-f(x)\Big]\ dt. \tag{27}$$

Määritellään apufunktio $\varphi_x : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$. Olkoon

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}\,, \text{ kun } t \neq 0 \\ 0\,, \text{ kun } t = 0. \end{cases}$$

Funktion f Lipschitz-jatkuvuudesta seuraa, että funktio φ_x on jatkuva vähintään joukossa $[-\pi,\pi]\backslash 0$. Siis funktio φ_x on mitallinen. Lisäksi funktion f Lipschitz-ehdon seurauksena saadaan rajoitettu arvio funktiolle φ_x

$$|\varphi_x(t)| = \frac{\big|f(x+t)-f(x)\big|}{\big|2\sin(\frac{1}{2}t)\big|} \leq \frac{C|t|}{2|\sin(\frac{1}{2}t)|} \leq \frac{\pi}{2}C.$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa Lemmasta 5.7. Siis φ_x on mitallinen ja rajoitettu, minkä seurauksena φ_x kuuluu avaruuteen $L^2[-\pi,\pi]$.
Lemman 5.5 avulla saadaan integraalille (27) hyödyllinen muotoilu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}\Big[f(x+t)-f(x)\Big]\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\ dt\\ =&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\cos\Big(\frac{1}{2}t\Big)\sin(nt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_x(t)\sin\Big(\frac{1}{2}t\Big)\cos(nt)\ dt.\end{aligned}$$

Funktiot $\cos\Big(\frac{1}{2}t\Big)$ ja $\sin\Big(\frac{1}{2}t\Big)$ ovat jatkuvia ja rajoitettuja funktioita, joten yllä oleva yhtälö vastaa neliöintegroituvien funktioiden $\varphi_x(t)\cos\Big(\frac{1}{2}t\Big)$ kertoimen b_n ja $\varphi_x(t)\sin\Big(\frac{1}{2}t\Big)$ kertoimen a_n summaa. Lauseen 4.3 perusteella tiedämme, että neliöintegroituvan funktion Fourier'n kertoimille pätee $a_n \to 0$ ja $b_n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten yllä oleva integraali suppenee arvoon 0 kaikilla $x \in \mathbb{R}$ eli $s_n(x) - f(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Lauseen 5.8 perusteella 2π-periodisen Lipschitz-jatkuvan funktion f Fourier'n sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota f kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tulos voidaan yleistää muuttujanvaihdoksella myös eri mittaisille jaksoille. Lipschitz-jatkuvia funktioita ovat esimerkiksi derivoituvat funktiot, joiden derivaatta on rajoitettu koko jakson aikana. Kyseessä ei ole yleisin suppenemisehto, mutta se kattaa suuren joukon funktioita.

Fourier'n sarja pystyy approksimoimaan myös epäjatkuvia funktioita. Tällöin sarja ei kuitenkaan suppene tarkalleen funktion f arvoon kaikissa pisteissä, vaan tietyin ehdoin vasemman- ja oikean puoleisen raja-arvon keskiarvoon. Merkitään toispuoleisia raja-arvoja seuraavasti

$$f(x+) = \lim_{t \to 0^+} f(x+t) \quad \text{ja} \quad f(x-) = \lim_{t \to 0^+} f(x-t).$$

Lause 5.9. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x+2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Jos löytyy sellaiset positiiviset vakio δ ja C, että funktiolle f pätee pisteessä x_0

$$\big|f(x_0+t) - f(x_0+)\big| \le Ct \quad \text{ja} \quad \big|f(x_0-t) - f(x_0-)\big| \le Ct \ , \ \text{kaikilla } 0 < t < \delta,$$

niin $s_n(x_0) \to \frac{1}{2}\Big[f(x_0+) + f(x_0-)\Big]$, kun $n \to \infty$.

Todistus. Lauseen 5.6 perusteella Fourier'n sarjan osasumma s_n voidaan pisteessä x_0 ilmaista konvoluutiona

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x_0+t)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x_0+t)\ dt.$$

Vastaavasti funktiolle $\frac{1}{2}\Big[f(x_0+) + f(x_0-)\Big]$ saadaan esitysmuoto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[f(x_0+) + f(x_0-)\Big] = \frac{1}{2}\Big[f(x_0+) + f(x_0-)\Big]\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\ dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x_0+)\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x_0-)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x_0+)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x_0-)\ dt.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\begin{aligned}
&s_n(x_0) - \frac{1}{2}\Big[f(x_0+) + f(x_0-)\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(t)\Big[f(x_0+t) - f(x_0-)\Big]\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\Big[f(x_0+t) - f(x_0+)\Big]\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{x_0}(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_{x_0}(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\ dt,
\end{aligned}$$

missä funktiot $\varphi_{x_0} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ja $\psi_{x_0} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ovat

$$\varphi_{x_0}(t) = \chi_{[-\pi,0)} \frac{f(x_0+t) - f(x_0-)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}$$

$$\text{ja} \qquad \psi_{x_0}(t) = \chi_{(0,\pi]} \frac{f(x_0+t) - f(x_0+)}{2\sin(\frac{1}{2}t)}.$$

Edellä χ_A on joukon A karakteristinen funktio eli $\chi_A(x) = 1$, jos $x \in A$ ja $\chi_A(x) = 0$, jos $x \notin A$. Mitallisen joukon karakteristinen funktio on mitallinen, joten funktiot φ_{x_0} ja ψ_{x_0} ovat mitallisia.

Tarkastellaan vielä kuuluvatko funktiot φ_{x_0} ja ψ_{x_0} avaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$. Lipschitz-ehdon nojalla funktioille φ_{x_0} ja ψ_{x_0} on olemassa positiivinen yläraja $\frac{\pi}{2}C$, kun $|t| < \delta$. Jos $\delta \leq |t| \leq \pi$, saadaan arvio

$$\left|\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right| \geq \left|\sin\left(\frac{1}{2}\delta\right)\right| > 0.$$

Koska funktiolla $\left|\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right|$ on positiivinen alaraja, kun $\delta \leq |t| \leq \pi$ ja $f \in L^2[-\pi, \pi]$, ovat funktiot φ_{x_0} ja ψ_{x_0} neliöintegroituvia välillä $[-\pi, \pi]$ eli funktiot φ_{x_0} ja ψ_{x_0} kuuluvat avaruuteen $L^2[-\pi, \pi]$.

Kuten lauseessa 5.8, vastaa yllä oleva yhtälö neliöintegroituvien funktioiden Fourier'n kertoimien a_n ja b_n summaa. Lauseen 4.3 perusteella kertoimet suppenevat arvoon 0 kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $s_n(x) \to \frac{1}{2}\Big[f(x+) + f(x-)\Big]$, kun $n \to \infty$. $\square$

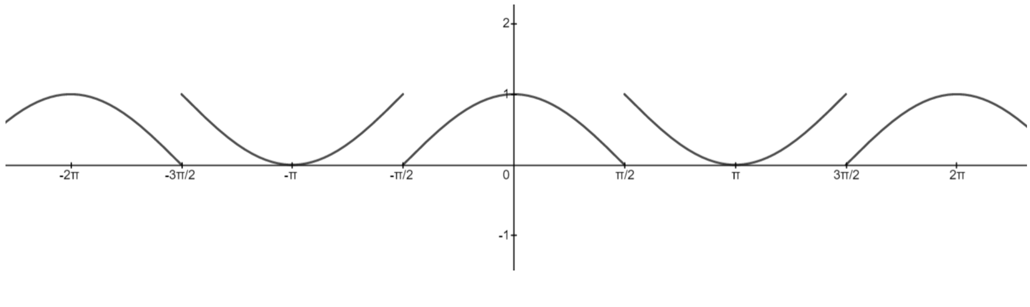
Lauseen 5.9 mukaan Lipschitz-ehdon täytyy toteuttua vain pisteen x_0 välittömässä ympäristössä, jotta suppeneminen tapahtuu pisteessä x_0. Lause 5.8 voitaisiin muuttaa vastaavaan muotoon, jos pisteittäisestä suppenemisesta oltaisiin kiinnostuttu yksittäisissä pisteissä. Lauseessa 5.9 Lipschitz-ehto vaadittiin vain δ-ympäristössä, jotta funktiossa voisi esiintyä hyppyjä epäjatkuvuuspisteissä.

6 Laskuesimerkki

Tutkitaan Lauseen 5.9 ehdot toteuttavan funktion Fourier'n sarjaa. Määritellään välillä $[-\pi, \pi]$ funktio f siten, että

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) \ , \ \text{kun } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1 + \cos(x) \ , \ \text{kun } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Olkoon f 2π-periodinen eli $f(x + 2\pi) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kuvassa 2 on esitetty funktion f kuvaaja.



Kuva 2: Funktion f kuvaaja

Lasketaan Fourier'n kertoimet yhtälöjen (16) osoittamalla tavalla. Kertoimeksi a_0 saadaan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} 1 + \cos(x)\ dx = 1.$$

Tapauksessa $n = 1$ saadaan kertoimeksi a_1

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(x) + \cos^2(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x) + \cos^2(x)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\ dx = \frac{\pi - 2}{\pi}. \end{aligned}$$

Tapaukset $n > 1$ lasketaan vastaavasti

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\cos(nx)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\ dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Siis kertoimet saavat parillisilla luvuilla n arvoksi 0 ja parittomat kertoimet muodostavat joukon

$$a_3 = \frac{2}{3\pi}\ , \quad a_5 = -\frac{2}{5\pi}\ , \quad a_7 = \frac{2}{7\pi}\ , \quad a_9 = -\frac{2}{9\pi}\ , \quad ...$$

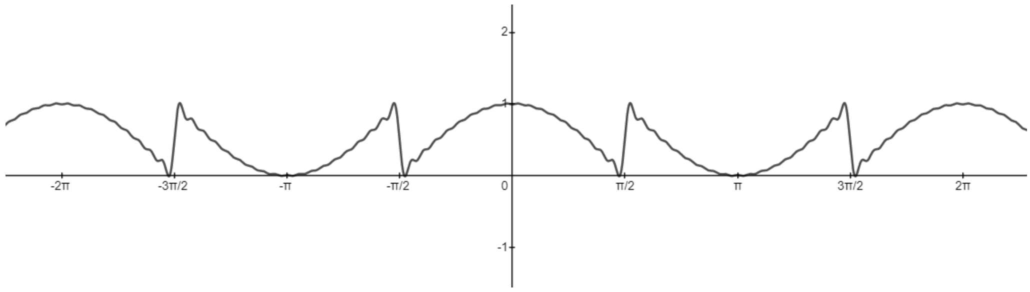
Kertoimien b_n arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\sin(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)\ dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Toisin sanoen $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Yleisesti kaikki kertoimet b_n saavat arvoksi 0, jos funktiolle pätee $f(x) = f(-x)$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Vastaavasti kaikki kertoimet a_n saavat arvoksi 0, jos funktiolle pätee $f(-x) = -f(x)$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$.

Tunnemme nyt funktion f Fourier'n sarjan kertoimet ja voimme muodostaa Fourier'n sarjan Määritelmän 2.2 mukaisesti. Funktion f Fourier'n sarjan osasumma s_{40} on esitetty Kuvassa 3. Osasumma s_{40} vastaa funktiota

$$s_{40}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi - 2}{\pi}\cos(x) - \sum_{k=2}^{40} \frac{2}{k\pi}\sin\Big(\frac{k\pi}{2}\Big)\cos(kx).$$



Kuva 3: Funktion f Fourier'n sarjan osasumma s_{40}

7 Tasainen suppeneminen

Kun funktion f Fourier'n kertoimille a_n ja b_n johdettiin kaavat

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \\ \text{ja} \qquad b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx, \end{aligned}$$

oletettiin että funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[-\pi, \pi]$. Tässä luvussa osoitetaan, että 2π-periodisen funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f, jos derivaattafunktio f' on jatkuva nollamittaista joukkoa lukuun ottamatta sekä rajoitettu. Todistus perustuu kirjassa *Partial differential equations : An Introduction* [4] sivuilla $140 - 142$ esitettyyn ideaan. Aloitetaan tarkastelemalla Baselin ongelmaa eli osoitetaan, että $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Käytämme tulosta tasaisen suppenemisen todistamiseksi.

Lemma 7.1. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Todistus. Ongelma ratkeaa tarkastelemalla funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, missä $f(x) = x^2$, 2π-periodista laajennusta. Ratkaistaan funktion Fourier'n kertoimet. Koska $f(x) = f(-x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, saa kaikki kertoimet b_n arvoksi 0. Kertoimeksi a_0 saadaan

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \frac{1}{\pi} \Big/_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3}x^3 = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Lasketaan termi πa_n

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= 2\int_0^{\pi} x^2 \cos(\mathrm{nx})\, dx = 2 \Big/_{0}^{\pi} x^2 \frac{\sin(nx)}{n} - 2\int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \\
&= -4\int_0^{\pi} x \frac{\sin(nx)}{n}\, dx = -4 \Big/_{0}^{\pi} x \left(-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right) + 4\int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx \\
&= \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n - \frac{4}{n^2}\int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{4\pi}{n^2}(-1)^n.
\end{aligned}$$

Siis funktion f Fourier'n sarja on

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx).$$

Funktio f toteuttaa Lauseen 5.8 ehdot. Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ funktion f Fourier'n sarja suppenee pisteittäin kohti funktion arvoa $f(x)$. Sijoittamalla $x = \pi$ saadaan

$$\begin{aligned}
f(\pi) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(n\pi) \\
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n(-1)^n \\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

□

Lisäksi käytämme apuna seuraavaa epäyhtälöä. Epäyhtälö on erityistapaus *Hölderin epäyhtälöstä.*

Lemma 7.2. Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ suppenevia sarjoja. Silloin pätee epäyhtälö

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Todistus. Olkoon a ja b positiivisia reaalilukuja. Koska $(a-b)^2 \geq 0$, saadaan arvio

$$\begin{aligned}
0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\
ab &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Käytetään merkintöjä

$$\alpha = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{ja} \qquad \beta = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Epäyhtälön (28) perusteella saadaan arvio

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n y_n\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|x_n\right|}{\alpha}\frac{\left|y_n\right|}{\beta} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left|x_n\right|^2}{\alpha^2}+\frac{\left|y_n\right|^2}{\beta^2}\right)\\ &= \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2+\frac{1}{2\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1,\end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Riemannin integroituva välillä $[a, b] \subset \mathbb{R}$, jos f on jatkuva melkein kaikkialla ja rajoitettu. Tätä tietoa hyödyntämällä saadaan hyvin yleinen ehto Fourier'n sarjojen tasaiselle suppenemiselle.

Lause 7.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos funktio f on derivoituva ja derivaattafunktio $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva melkein kaikkialla sekä rajoitettu, niin funktion f Fourier'n kertoimille a_n ja b_n pätee

$$a_n' = nb_n \qquad b_n' - na_n,$$

missä a_n' ja b_n' ovat derivaattafunktion f' Fourier'n kertoimet.

Todistus. Derivaatta funktio f' on integroituva, minkä seurauksena sen Fourier'n kertoimet voidaan määrittää. Lasketaan kerroin a_n'

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos(nx)\ dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = nb_n.$$

Ensimmäinen termi kumoutuu funktion f jaksollisuuden perusteella. Osittaisintegrointi on sallittua, koska jokainen termi koostuu melkein kaikkialla jatkuvasta funktiosta, joka on rajoitettu. Vastaavasti voidaan laskea Fourier'n kerroin b_n'

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)sin(nx)\ dx = \Big/_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = -na_n.$$

□

Lause 7.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos funktio f on derivoituva ja derivaattafunktio $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva melkein kaikkialla sekä rajoitettu, niin funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Koska funktion f derivaattafunktio f' on rajoitettu, toteuttaa funktio f Lauseen 5.8 ehdot. Siis funktion f Fourier'n sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota f kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tämän perusteella saadaan pisteestä $x \in \mathbb{R}$ riippumatta arvio

$$\begin{aligned}\Big|f(x) - s_n(x)\Big| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big|a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\big|a_k\big| + \big|b_k\big|\Big). \qquad (29)\end{aligned}$$

Osoitetaan, että $\Big|f(x) - s_n(x)\Big| \to 0$, kun $n \to \infty$ todistamalla, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big|a_k\big| + \big|b_k\big|\Big)$ suppenee. Silloin sarjan jäännöstermi suppenee kohti nollaa.

Lauseen 7.3 ja Lemman 7.2 perusteella saadaan arvio

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big|a_k\big| + \big|b_k\big|\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|-\frac{b_n'}{n}\right| + \left|\frac{a_n'}{n}\right|\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big|b_n'\big|}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big|a_n'\big|}{n} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_n')^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_n')^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_n')^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_n')^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (30)\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa, kun Lemmaa 7.2 sovelletaan molempiin sarjoihin. Molemmat sarjat toteuttavat Lemman 7.2 ehdot Lauseen 4.3 perusteella. Kaavan (28) perusteella saadaan positiivisilla reaaliluvuilla $\sqrt{a}$ ja $\sqrt{b}$ arvio

$$\begin{aligned}2\sqrt{ab} &\leq a + b \\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &\leq 2(a + b) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} &\leq \sqrt{2}\sqrt{a + b}. \qquad (31)\end{aligned}$$

Epäyhtälön (31) perusteella saadaan termille (30) arvio

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_n')^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_n')^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \leq &\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(b_n')^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n')^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\big\|f'\big\|,\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa Lemmasta 7.1 ja epäyhtälöstä (21). Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|a_k|+|b_k|\Big)$ termit ovat ei-negatiivisia ja sarja on ylhäältä rajoitettu. Siis sarja suppenee ja jäännöstermi $\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(|a_k|+|b_k|\Big) \to 0$, kun $n \to \infty$. Siis epäyhtälön (29) perusteella funktion f Fourier'n sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f. $\square$

8 Fourier'n sarjan suppeneminen L^2-normin suhteen

Tässä luvussa käsitellään Fourier'n sarjojen suppenemista metriikan (7) suhteen. Todistuksessa sovelletaan funktion $f \in L^2[-\pi,\pi]$ konvoluutiota Fejerin integroimisytimen kanssa. Fejerin ytimen teoria perustuu kirjan *Invitation to Classical analysis* [2] lukuun 8.7.

Määritelmä 8.1. Fejerin ytimeksi $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kutsutaan Dirichletin ytimien D_k aritmeettista keskiarvoa

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\Big(\frac{1}{2}(n+1)x\Big)}{2\sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big)}. \tag{32}$$

Tarkalleen ottaen yllä oleva identiteetti pätee, kun $x \neq m \cdot 2\pi$, missä $m \in \mathbb{Z}$, mutta integroimisessa näillä yksittäisillä pisteillä ei ole väliä. Summakaavalla voidaan kuitenkin osoittaa, että näissä pisteissä Fejerin ydin K_n saa arvoksi $\frac{n+1}{2}$.

Todistetaan jälkimmäinen identiteetti osoittamalla yhtäsuuruus

$$\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\Big((k+\frac{1}{2})x\Big)}{2\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)} = \frac{\sin^2\Big(\frac{1}{2}(n+1)x\Big)}{2\sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big)}.$$

Väite yksinkertaistuu, kun todistetaan ekvivalentti tulos

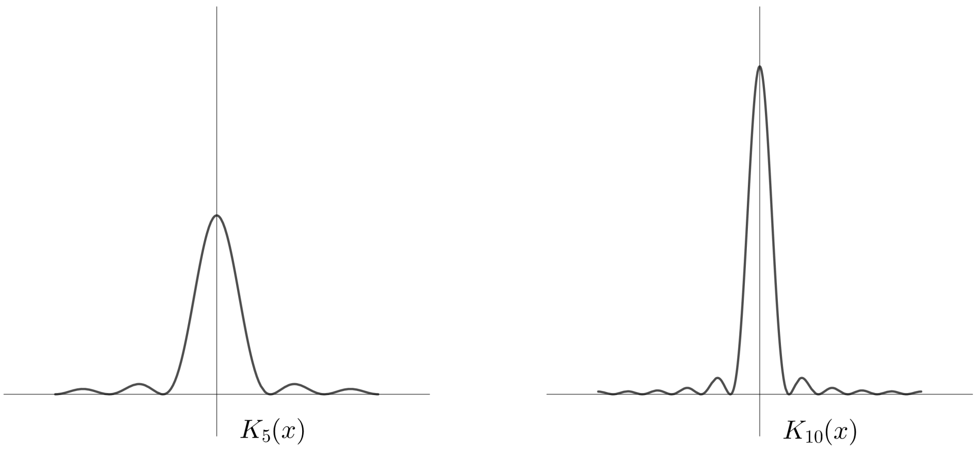
$$\sum_{k=0}^{n}\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\sin\Big((k+\frac{1}{2})x\Big) = \sin^2\Big(\frac{1}{2}(n+1)x\Big).$$

Yhtälön vasen puoli voidaan avata kaavan (10) avulla

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\Big(\frac{1}{2}x\Big)\sin\Big((k+\frac{1}{2})x\Big) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\frac{1}{2}x}-e^{-i\frac{1}{2}x}}{2i}\cdot\frac{e^{i(k+\frac{1}{2})x}-e^{-i(k+\frac{1}{2})x}}{2i}\right)$$
$$= \frac{1}{(2i)^2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x}-e^{-ikx}-e^{ikx}+e^{-i(k+1)x}\right) = \frac{1}{(2i)^2}\left(e^{i(n+1)x}-2+e^{-i(n+1)x}\right)$$
$$= \frac{1}{(2i)^2}\left(e^{i\frac{1}{2}(n+1)x}-e^{-i\frac{1}{2}(n+1)x}\right)^2 = \sin^2\Big(\frac{1}{2}(n+1)x\Big),$$

mistä väite seuraa.

Kuvassa 4 on havainnollistettu Fejerin ytimen käyttäytymistä välillä $[-\pi, \pi]$. Fejerin ytimet K_n saavat vain ei-negatiivisia arvoja ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $K_n(-x) = K_n(x)$. Kerroin $\frac{1}{\pi}$ normittaa myös Fejerin ytimen. Fejerin ytimen etuna on se, että ytimen arvo $K_n(x)$ suppenee tasaisesti nollaan, kun $0 < \delta < |x| \leq \pi$. Itse asiassa nämä ehdot takaavat sen, että jatkuvan 2π-periodisen funktion konvoluutio Fejerin ytimen kanssa suppenee tasaisesti kohti funktiota f.



Kuva 4: Fejerin ytimien K_5 (vasemmalla) ja K_{10} (oikealla) kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$ eli yhden jakson aikana.

Kun tutkitaan Fourier'n sarjojen suppenemista L^2-normin suhteen, ei Fejerin ytimen avulla suoranaisesti todisteta funktion f Fourier'n sarjan suppenemista funktioon f, vaan erään trigonometrisen polynomin suppeneminen funktioon f. Tämän jälkeen vedotaan Lauseeseen 4.2, minkä perusteella Fourier'n sarjan osasumma on tarkin mahdollinen approksimaatio triogonometristen polynomien joukosta L^2-normin suhteen.

Merkitään Fourier'n sarjojen osasummien s_k aritmeettista keskiarvoa seuraavasti

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Todistetaan, että 2π-periodisen funktion f Fourier'n sarjan osasummien kerkiarvo σ_n voidaan ilmaista funktion f ja Fejerin ytimen K_n konvoluutiona, kun $f \in L^2[-\pi, \pi]$.

Lause 8.2. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Funktion f Fourier'n sarjan osasummien s_k aritmeettinen keskiarvo σ_n voidaan ilmaista konvoluutiona

$$\sigma_n(x) = \big(K_n * f\big)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x+t)\ dt.$$

Todistus. Olkoon $n \in \mathbb{N}_0$. Tarkastellaan summaa $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x)$. Kun osasumma s_k ilmaistaan funktion f ja Dirichletin ytimen D_k konvoluutiona, saadaan kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)f(x+t)\ dt\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right] f(x+t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x+t)\ dt \\
&= \big(K_n * f\big)(x).
\end{aligned}$$

Integroinnin ja summauksen järjestystä voidaan vaihtaa, koska summassa on äärellinen määrä termejä. $\square$

Seuraavia Fejerin ytimen ominaisuuksia hyödynnetään, kun tarkastellaan Fourier'n sarjojen suppenemista L^2-normin suhteen.

Lemma 8.3. Fejerin ytimellä $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ ja $0 < \delta < \pi$ voimassa seuraavat ominaisuudet

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt = 1\ , \tag{33}$$

$$K_n(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}\ , \tag{34}$$

$$\text{ja} \qquad K_n(x) \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}\ ,\ \text{kun } \delta \leq |x| \leq \pi. \tag{35}$$

Todistus. Tulos (33) seuraa Dirichletin ytimen D_k ominaisuuksista

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\right] dt \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\ dt\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1.
\end{aligned}$$

Identiteetistä (32) nähdään, että $K_n(x) \geq 0$, koska $\sin^2(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska $\sin^2(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\Big(\frac{1}{2}(n+1)x\Big)}{2\sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big)} \leq \frac{1}{2(n+1)\sin^2\Big(\frac{1}{2}x\Big)}$$

ja Lemman 5.7 perusteella kaikilla $0 < \delta < \pi$ pätee

$$\frac{1}{2(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)x^2} \leq \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2},$$

kun $\delta \leq |x| \leq \pi$. □

Ominaisuus (35) tarkoittaa sitä, että kaikilla valinnoilla $\delta \in (0, \pi)$ Fejerin ydin suppenee tasaisesti arvoon 0 joukossa $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Tämä ominaisuus on Fejerin ytimen etu verrattuna Dirichletin ytimeen. Esitellyillä työkaluilla voidaan todistaa seuraava tärkeä tulos.

Lause 8.4. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva jaksollinen funktio, siten että $f(x) = f(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin funktion f Fourier'n sarjan osasummien aritmeettinen keskiarvo σ_n suppenee tasaisesti funktioon f eli $\sigma_n(x) \to f(x)$ tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$, kun $n \to \infty$.

Todistus. Jatkuva funktio suljetulla välillä $[-\pi, \pi]$ on mitallinen ja rajoitettu, joten $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Koska f on 2π-periodinen, on funktio f rajoitettu koko joukossa $\mathbb{R}$ eli on olemassa sellainen positiivinen luku $M \in \mathbb{R}$, että

$$|f(x)| \leq M \ , \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Koska funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[-\pi, \pi]$, on se tasaisesti jatkuva. 2π-jaksollisuuden seurauksena myös tasainen jatkuvuus yleistyy koko joukkoon $\mathbb{R}$. Eli jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, siten että

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ kaikilla pareilla } x, y \in \mathbb{R} \ , \text{ kun } |x - y| < \delta.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan δ siten, että $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, kun $|x - y| < \delta$. Ehdon (35) perusteella on olemassa sellainen n_ϵ , että $K_n(x) \leq \frac{\epsilon}{6M}$ joukossa $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, kaikilla $n > n_\epsilon$.
Valitaaan $n > n_\epsilon$. Silloin Lauseen 8.2 perusteella sekä ominaisuuksien (33) ja (34) perusteella

$$\begin{aligned}
&\big|\sigma_n(x) - f(x)\big| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x+t)\ dt - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(x+t)\ dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\Big(f(x+t) - f(x)\Big)\ dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\Big|f(x+t) - f(x)\Big|\ dt.
\end{aligned}$$

Jaetaan integroimisalue kolmeen osaan. Koska $K_n(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, saadaan yllä olevalle integraalille ylärajaksi

$$\frac{2M}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t)\ dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \Big| f(x+t) - f(x) \Big|\ dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} K_n(t)\ dt.$$

Koska $n > n_\epsilon$ on Fejerin ytimellä on yläraja $\frac{\epsilon}{6M}$ ensimmäisellä ja kolmannella integroimisalueella. Lisäksi δ valittiin siten että toisessa integroimisalueessa on voimassa epäyhtälö $\Big| f(x+t) - f(x) \Big| < \frac{\epsilon}{3}$. Saamme siis edelliselle lausekkeelle yläarvion

$$\begin{aligned} &\frac{2M}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\epsilon}{6M}\ dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) \cdot \frac{\epsilon}{3}\ dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\epsilon}{6M}\ dt \\ \leq\ &\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Arvio pätee pisteestä $x \in \mathbb{R}$ riippumatta kaikilla $n > n_\epsilon$, joten $\sigma_n(x) \to f(x)$ tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$, kun $n \to \infty$. □

Fourier'n sarjojen osasummat ovat trigonometrisiä polynomeja. Siksi muodostettu aritmeettinen keskiarvo $\sigma_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on trigonometrinen polynomi.

Seuraus 8.5. Jatkuvaa 2π-periodista funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voidaan approksimoida trigonometrisella polynomilla $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mielivaltaisen tarkasti eli jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen T, että

$$\big| T(x) - f(x) \big| < \epsilon\ ,\ \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Lauseen 8.4 perusteella osaamme muodostaa trigonometrisen polynomin, joka suppenee tasaisesti funktioon f, jos f on jatkuva 2π-periodinen funktio. Kyse ei ole kuitenkaan funktion f Fourier'n sarjan suppenemisesta, vaan Fourier'n sarjan osasummien keskiarvon σ_n suppenemisesta. Tämä on kuitenkin tärkeä tulos ja se johtaa myöhemmin hyvin yleiseen suppenemisehtoon. Todistetaan seuraavaksi ensimmäinen tulos koskien Fourier'n sarjojen suppenemista L^2-normin suhteen.

Lause 8.6. Jatkuvan 2π-periodisen funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier'n sarja suppenee L^2-normin suhteen kohti funktiota f.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Seurauksen 8.5 perusteella on olemassa sellainen trigonometrinen polynomi $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että

$$\big| T(x) - f(x) \big| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\ ,\ \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Silloin metriikan (7) suhteen pätee

$$\|f - T\| = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - T(x)\right]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

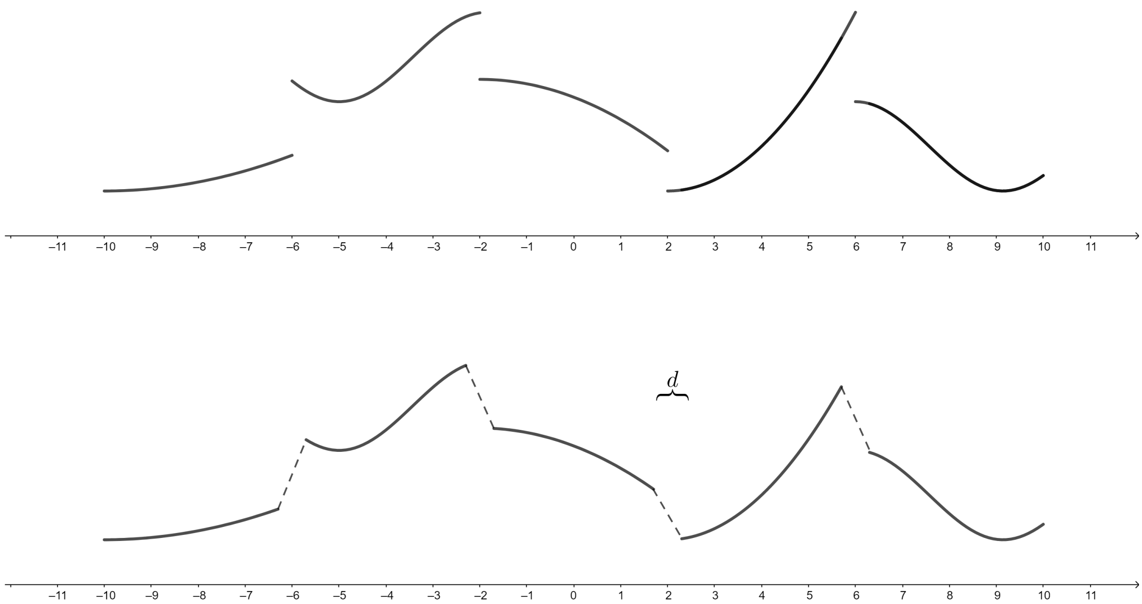
Jos funktiossa T on m-termiä, niin Lauseen 4.2 perusteella Fourier'n sarjan osasummalle pätee

$$\|f - s_n\| \leq \|f - T\| < \epsilon\ ,\ \text{kaikilla } n \geq m.$$

Siis $\lim_{n\to\infty}\|f - s_n(x)\| = 0$. □

Jotta voidaan osoittaa, että kaikkien funktioiden $f \in L^2[-\pi,\pi]$ Fourier'n sarja suppenee funktioon f metriikan (7) suhteen, osoitetaan että jokaista funktiota avaruudessa $L^2[-\pi,\pi]$ voidaan approksimoida jatkuvalla funktiolla mielivaltaisen tarkasti.

Jos rajoittuisimme Riemannin integraaliin ja Rieamannin integroituviin funktioihin, joilla on korkeintaan numeroituva määrä epäjatkuvuuspisteitä, voisimme soveltaa kuvassa 5 esitettyä konstruktiota, missä funktion f epäjatkuvuuspisteen x_0 ympäristössä $[x_0 - \frac{d}{2}, x_0 + \frac{d}{2}]$ funktion f arvot korvataan sopivalla lineaarisella funktiolla.



Kuva 5: Funktion f approksimointi jatkuvalla funktiolla

Avaruus $L^2[-\pi,\pi]$ käsittää kuitenkin suuremman joukon funktioita ja suppeneminen metriikan (7) suhteen voidaan osoittaa jokaiselle funktiolle avaruudessa $L^2[-\pi,\pi]$. Avaruudella on myös täydellisyysominaisuus eli jokainen Cauchy-jono suppenee johonkin alkioon kyseisessä avaruudessa. Siksi haluttaisiin osoittaa seuraava tulos.

Lause 8.16. Olkoon $f \in L^2[-\pi, \pi]$. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $g_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, että $g_n(-\pi) = g_n(\pi)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ sekä

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big[f(x) - g_n(x) \big]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Tuloksen todistaminen osoittautuu työlääksi. Tutkielmassa päädyttiin ottamaan esitiedoksi Lebesguen integraalin ominaisuus, *Dominoidun konvergenssin lause.* Tulos ei ole itsestäänselvä, mutta se käsitellään useissa Lebesguen mittaa ja integraalia käsittelevissä teoksissa. Lauseen voi tulkita Lebesguen integraalin perusominaisuuksiin. Näin tarvittavien aputulosten ja lauseiden määrä pysyy kohtuullisena. Aiheeseen voi tutustua tarkemmin lähdeteoksessa [1].

Lause 8.7. *Dominoidun konvergenssin lause.* Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen osajoukko ja jono $f_n : E \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}_1$ mitallisia funktioita siten, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ m.k. } x \in E.$$

Jos on olemassa sellainen Lebesgue-integroituva funktio $g : E \to [-\infty, \infty]$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ pätee

$$\big| f_n(x) \big| \leq g(x) \text{ m.k. } x \in E,$$

on funktio f Lebesgue-integroituva joukossa E ja

$$\int_E f(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) \, dx.$$

Todistus sivuutetaan. Lebesguen integraalin teoriaan voi tutustua tarkemmin lähdeteoksen [1] avulla.

Dominoidun konvergenssin lauseen seurauksena saadaan hyödyllinen työkalu, minkä avulla voidaan tutkia funktoiden suppenemista L^2-normin suhteen.

Seuraus 8.8. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen osajoukko ja jono $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$ mitallisia funktioita siten, että

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ m.k. } x \in E.$$

Jos on olemassa sellainen funktio $g \in L^2\big[E\big]$, että kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ pätee

$$\big|f_n(x)\big| \leq g(x) \text{ m.k. } x \in E,$$

niin funktiot f_n ja f kuuluvat avaruuteen $L^2\big[E\big]$ sekä

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_E = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi}\int_E \big[f_n(x) - f(x)\big]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Todistus. Muodostetaan apufunktio $h_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ asettamalla kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$ $h_n(x) = |f_n(x) - f(x)|^2$. Rajafunktio f on mitallinen ja h_n on mitallisten kuvausten summa ja tulo eli myös mitallinen. Nyt $h_n(x)$ suppenee m.k. $x \in E$ arvoon 0. Lisäksi funktiolle löytyy yläraja $|h_n(x)| \leq 4\big[g(x)\big]^2$ m.k. $x \in E$. Koska g kuuluu avaruuteen $L^2\big[E\big]$, kuuluu $4\big[g(x)\big]^2$ avaruuteen $L^1\big[E\big]$. Näin ollen funktiolle h_n Dominoidun konvergenssin lauseen ehdot toteutuvat ja

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|^2 \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_E h_n(x) \, dx \\ = \int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x) \, dx &= \int_E \lim_{n\to\infty} \big|f_n(x) - f(x)\big|^2 \, dx = 0,\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi}\int_E \big[f_n(x) - f(x)\big]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

□

Esitellään hieman, miten lähestymme Lauseen 8.16 todistamista. Todistus perustuu Kari Astalan ja Petteri Piiroisen luentomonisteessa [5] sivuilla $78-79$ esitettyyn ideaan. Tutustutaan yksinkertaisen funktion käsitteeseen. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko. Tehdään joukon E ositus $E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, missä $m \in \mathbb{N}_1$. Koska kysessä on ositus, niin joukoilla A_i pätee $A_i \cap A_j = \varnothing$, jos $i \neq j$. Yksinkertaisella funktiolla $Y : E \to \mathbb{R}$ tarkoitetaan mitallista kuvausta

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x),$$

missä $a_i \geq 0$ ja χ_{A_i} on mitallisen joukon $A_i \subset \mathbb{R}$ karakteristinen funktio. Erityisesti A_i on se joukko, missä yksinkertaisen funktion Y arvoksi halutaan asettaa a_i. Oleellista on, että summassa on vain m kappaletta termejä.

1. Mitallista funktiota $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, jonka arvot ovat ei-negatiivisia, eli $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{E}$, voidaan arvioida yksinkertaisella funktiolla $Y_n : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$. Tarkalleen ottaen voidaan muodostaa sellainen yksinkertaisten funktioiden Y_n jono, että kaikilla $x \in \mathbb{E}$ ja $n \in \mathbb{N}_1$ pätee

$$Y_n(x) \leq Y_{n+1}(x) \leq f(x) \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} Y_n(x) = f(x).$$

Nyt seurauksen 8.8 perusteella löytyy kaikilla $\epsilon > 0$ sellainen yksinkertainen funktio Y_n että $\left\|Y_n - f\right\|_E < \frac{\epsilon}{2}$.

2. Jos mitallinen funktio $f : E \to \mathbb{R}$ saa myös negatiivisia arvoja, voidaan funktio f purkaa positiiviseen osaan $f^+ : E \to \mathbb{R}$ ja negatiiviseen osaan $f^- : E \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{aligned} & f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \\ \text{ja} \qquad & f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}. \end{aligned}$$

Silloin funktio f voidaan ilmaista erotuksena $f = f^+ - f^-$. Myös funktiot f^+ ja f^- ovat mitallisia ja ne saavat vain ei-negatiivisia arvoja. Siis kohdan **1.** perusteella löytyy sellaiset yksinkertaiset funktiot Y_n^+ ja Y_n^-, että

$$\begin{aligned} & \left\|Y_n^+ - f^+\right\|_E < \frac{\epsilon}{2} \\ \text{ja} \qquad & \left\|Y_n^- - f^-\right\|_E < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Normin ominaisuuksien (N2) ja (N3) perusteella voidaan mitallista funktiota

$f : E \to \mathbb{R}$ arvioida erotuksella $\left(Y_n^+ - Y_n^-\right)$ mielivaltaisen tarkasti, koska

$$\begin{aligned}\left\|f - (Y_n^+ - Y_n^-)\right\|_E &= \left\|(f^+ - f^-) - (Y_n^+ - Y_n^-)\right\|_E \\ &\leq \left\|Y_n^+ - f^+\right\|_E + \left\|Y_n^- - f^-\right\|_E < \epsilon.\end{aligned}$$

3. Voimme siis arvioida mitallista funktiota $f : E \to \mathbb{R}$ yksinkertaisten funktioiden avulla. Tarvitsemme vielä tuloksen, jonka mukaan yksinkertaista funktiota $Y_n : E \to \mathbb{R}$ voidaan arvioida jatkuvalla kuvauksella $g_n : E \to \mathbb{R}$. Tämä onnistuu, koska jokaisessa yksinkertaisessa funktiossa

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}(x)$$

on rajallinen määrä termejä ja jokaisen mitallisen joukon karakteristista funktiota χ_{A_i} voidaan approksimoida jatkuvalla kuvauksella. Lähdemme liikkeelle tämän tuloksen osoittamisesta.

Valitsemme mitalliseksi joukoksi E välin $[-\pi, \pi]$. Määrittelemme ensin pituusfunktion $\operatorname{dist}(x, A) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoitamme pituusfunktion avulla, että suljetun joukon $A_1 \subset [-\pi, \pi]$ ja avoimen joukon $A_2 \subset [-\pi, \pi]$ karakteristisia funktioita voidaan approksimoida jatkuvalla kuvauksella. Tämän seurauksena saadaan jatkuva arvio mitallisen joukon karakteristiselle funktiolle.

Määritelmä 8.9. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja $A \neq \varnothing$. Määritellään etäisyysfunktio $\operatorname{dist}(x, A) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\big\{|x - y| \ : \ y \in A\big\}.$$

Funktio $\operatorname{dist}(x, A)$ siis mittaa pisteen x etäisyyttä joukosta A.

Lemma 8.10. Etäisyysfunktio $\operatorname{dist}(x, A) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus.

Todistus. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ sekä osajoukko $A = \varnothing$. Jokaisella $z \in A$ pätee

$$\operatorname{dist}(x, A) \leq |x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Koska epäyhtälö pätee jokaisella $z \in A$, niin

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(x, A) &\leq |x - y| + \operatorname{dist}(y, A) \\ \operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) &\leq |x - y|.\end{aligned}$$

Vastaavasti saamme tuloksen

$$\operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leq |x - y|,$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\big|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)\big| \leq |x - y|.$$

Kuvaus on siis Lipschitz-jatkuva, mikä on jatkuvuutta vahvempi ominaisuus. □

Lemma 8.11. Olkoon $\chi_A : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ suljetun joukon $A \subset [-\pi, \pi]$ karakteristinen funktio. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktiota $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - \chi_A\big\| = 0.$$

Todistus. Määritellään kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ funktio $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ seuraavasti

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n \cdot \operatorname{dist}(x, A)}. \tag{36}$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}_1$. Funktio f_n on jatkuva, sillä nimittäjä $1 + n \cdot \operatorname{dist}(x, A)$ on jatkuva kuvaus ja positiivinen kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Tapauksessa $x \in A$ pätee yhtäsuuruus $f_n(x) = \chi_A(x) = 1$. Tapauksessa $x \notin A$ funktio f_n suppenee pisteittäin funktioon χ_A, sillä karakteristinen funktio χ_A saa arvon 0 ja $f_n(x) \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämä seuraa siitä, että epäyhtälö $0 < \operatorname{dist}(x, A) \leq 2\pi$ on voimassa, jos $x \notin A$. Siis $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_A(x)$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$.

Funktiolle f_n löytyy majorantti $g \in L^2[-\pi, \pi]$ asettamalla $g(x) = 1$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Seurauksen 8.8 ehdot toteutuvat, minkä perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - \chi_A\big\| = 0$$

□

Seuraus 8.12. Olkoon $\chi_A : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ avoimen joukon $A \subset [-\pi, \pi]$ karakteristinen funktio. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $g_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \big\|g_n - \chi_A\big\| = 0.$$

Todistus. Joukon A komplementti A^c joukossa $[-\pi, \pi]$ on suljettu. Lemman 8.11 mukaan on olemassa jono jatkuvia funktioita $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, joilla pätee

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f_n - \chi_{A^c}\big\| = 0.$$

Edellä χ_{A^c} on joukon A^c karakteristinen funktio. Muodostetaan funktiojono g_n määrittelemällä kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ ja $x \in [-\pi, \pi]$ funktiot g_n seuraavasti

$$g_n(x) = 1 - f_n(x).$$

Funktiot $g_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Joukon A karakteristinen funktio χ_A voidaan ilmaista kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$ muodossa $\chi_A(x) = 1 - \chi_{A^c}(x)$. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|g_n - \chi_A\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \Big(1 - f_n\Big) - \Big(1 - \chi_{A^c}\Big) \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|\chi_{A^c} - f_n\| = 0.\end{aligned}$$

□

Tarkastellaan hieman Lebesgue-mitallisia joukkoja. Olkoon Ω kokoelma mitallisen joukon $A \subset (-\pi, \pi)$ Lebesguen peitteistä. Peite koostuu numeroituvasta määrästä avoimia välejä $\cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Kokoelma Ω on epätyhjä, sillä väli $(-\pi, \pi)$ kuuluu kokoelmaan. Infimumin ominaisuuksien perusteella kaikilla $\epsilon > 0$ löytyy sellainen avoin peite $P = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, $P \in \Omega$, että

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| \leq \mu(A) + \epsilon.$$

Toisaalta mitan ominaisuuksien perusteella pätee

$$\mu(A) \leq \mu(P) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|.$$

Ensimmäinen epäyhtälö perustuu mitan monotonisuuteen ja toinen epäyhtälö subadditiivisuuten. Yhdistämällä tulokset huomataan, että jokaisella $\epsilon > 0$ löytyy sellainen avoin joukko P, että

$$\mu(A) \leq \mu(P) \leq \mu(A) + \epsilon.$$

Koska $A \subset P$, pätee epäyhtälö

$$\mu(P \setminus A) = \mu(P) - \mu(A) \leq \epsilon.$$

Lemma 8.13. Olkoon $\chi_A : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mitallisen joukon $A \subset [-\pi, \pi]$ karakteristinen funktio. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $g_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - \chi_A\| = 0.$$

Todistus. Tutkitaan ensin mitallisia joukkoja $B \subset (-\pi, \pi)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska B on mitallinen, löytyy sellainen avoin joukko $P \subset [-\pi, \pi]$, että $B \subset P$ ja $\mu(P \setminus B) \leq \frac{\pi\epsilon^2}{4}$. Joukon $P \setminus B$ karakteristiselle funktiolle saadaan esitysmuoto $\chi_{P\setminus B} = \chi_P - \chi_B$. Seurauksen 8.12 perusteella on olemassa sellainen jatkuva funktio g_n, että $\|g_n - \chi_P\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Saadaan siis arvio

$$\begin{aligned}\|g_n - \chi_B\| &\leq \|g_n - \chi_P\| + \|\chi_P - \chi_B\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\chi_{P\setminus B}(x)\right]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\mu(P \setminus B)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Olkoon $A \subset [-\pi, \pi]$ mitallinen. Joukon A karakteristinen funktio χ_A on ekvivalentti avaruudessa $L^2[-\pi, \pi]$ jonkin mitallisen joukon $B \subset (-\pi, \pi)$ karakteristisen funktion χ_B kanssa eli $\|\chi_A - \chi_B\| = 0$. Siis tulos pätee kaikille mitallisille joukoille $A \subset [-\pi, \pi]$. $\square$

Lemma 8.14. Olkoon $Y : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ yksinkertainen funktio. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $f_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - Y\| = 0.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Yksinkertainen funktio $Y : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ on karakterististen funktioiden $\chi_{A_i} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ summa

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x),$$

missä $k \in \mathbb{N}_1$. Lemman 8.14 perusteella on olemassa sellaiset jatkuvat funktiot $g_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, että kaikilla $i \leq k$ pätee

$$\|\chi_{A_i} - g_i\| < \frac{\epsilon}{kM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_k|\}$. Näin ollen saadaan arvio

$$\|Y - f_n\| = \left\|\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i g_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \cdot \|\chi_{A_i} - g_i\| < \epsilon.$$

$\square$

Lause 8.15. Olkoon $f \in L^2[-\pi,\pi]$. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $g_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, n $\in \mathbb{N}_1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - g_n(x)\right]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska funktio f on mitallinen joukossa $[-\pi,\pi]$, on olemassa sellainen yksinkertaisten funktioiden $Y_n^+ : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ja $Y_n^- : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ erotus $\left(Y_n^+ - Y_n^-\right)$, että

$$\left\| f - \left(Y_n^+ - Y_n^-\right) \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Lemman 8.14 perusteella voidaan valita sellaiset jatkuvat funktiot $g_n^+ : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ja $g_n^- : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, että

$$\left\| Y_n^+ - g_n^+ \right\| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{ja} \qquad \left\| Y_n^- - g_n^- \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Funktio $g_n = g_n^+ - g_n^-$ on jatkuva välillä $[-\pi,\pi]$ Normin ominaisuuksien perusteella saadaan arvio

$$\begin{aligned} \left\| f - g_n \right\| &= \left\| f - \left(g_n^+ - g_n^-\right) \right\| = \left\| f - \left(Y_n^+ - Y_n^-\right) + \left(Y_n^+ - Y_n^-\right) - \left(g_n^+ - g_n^-\right) \right\| \\ &\leq \left\| f - \left(Y_n^+ - Y_n^-\right) \right\| + \left\| Y_n^+ - g_n^+ \right\| + \left\| g_n^- - Y_n^- \right\| < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lause 8.16. Olkoon $f \in L^2[-\pi,\pi]$. On olemassa sellainen jono jatkuvia funktioita $g_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, että $g_n(-\pi) = g_n(\pi)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ sekä

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - g_n(x)\right]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Lauseen 8.15 perusteella on olemassa sellainen jatkuva funktio $h_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, että $\left\| f - h_n \right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Jatkuvan funktion h_n arvoja voidaan muuttaa pienillä väleillä $[-\pi, -\pi + \delta)$ ja $(\pi - \delta, \pi]$, missä $0 < \delta$. Esitellään yksi mahdollinen konstruktio.

Ositetaan väli $[-\pi,\pi]$ siten, että $A = [-\pi + \delta, \pi - \delta]$, $B = [-\pi, -\pi + \delta)$ ja $C = (\pi - \delta, \pi]$. Määritellään jatkuva funktio $g_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ siten, että

$$g_n(x) = h_n(x)\chi_A(x) + \frac{|x + \pi|}{\delta} h_n(x)\chi_B(x) + \frac{|x - \pi|}{\delta} h_n(x)\chi_C(x).$$

Funktion g_n arvot poikkeavat funktion h_n arvoista vain joukoissa B ja C, missä funktion g_n arvot lähestyessä nollaa, kun x lähestyy välin $[-\pi, \pi]$ päätepisteitä. Funktio h_n on jatkuva ja siksi rajoitettu suljetulla välillä. Siis on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että $\left|h_n(x)\right| \leq M$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$. Valitsemalla $\delta = \frac{\epsilon^2 \pi}{32M^2}$ saadaan arvio

$$\left\|f - g_n\right\| = \left\|f - h_n + h_n - g_n\right\| \leq \left\|f - h_n\right\| + \left\|h_n - g_n\right\| < \epsilon$$

□

Lause 8.17. Jos $f \in L^2[-\pi, \pi]$, niin funktion f Fourier'n sarja suppenee L^2-normin suhteen funktioon f eli

$$\lim_{n \to \infty} \left\|f - s_n\right\| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - s_n(x)\right]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

missä s_n on funktion f Fourier'n sarjan osasumma.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f \in L^2[-\pi, \pi]$, voidaan Lauseen 8.16 mukaan valita sellainen jatkuva funktio $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, että $g(-\pi) = g(\pi)$ sekä $\left\|f - g\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Funktio g voidaan jatkaa jaksolliseksi jatkuvaksi funktioksi, siten että $g(x) = g(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Seurauksen 8.5 perusteella on olemassa sellainen trigonometrinen polynomi $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siten, että $\left\|g - T\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Siis jokaisella $\epsilon > 0$ löytyy sellainen trigonometrinen polynomi, että

$$\left\|f - T\right\| \leq \left\|f - g\right\| + \left\|g - T\right\| < \epsilon.$$

Jos funktiossa T on m termiä, niin Lauseen 4.2 nojalla

$$\left\|f - s_n\right\| \leq \left\|f - T\right\| < \epsilon \text{ , kaikilla } n \geq m.$$

□

Jokainen funktio avaruudessa $L^2[-\pi, \pi]$ voidaan esittää Määritelmän 2.2 mukaisena Fourier'n sarjana. Fourier'n sarja vastaa yhtälön (4) mukaista kantaesitystä sisätulon (6) avulla lausuttuna, missä kantavektorit koostuvat ortonormaalista joukosta (11). Koska kaikilla funktioilla $f \in L^2[-\pi, \pi]$ Fourier'n sarja suppenee funktioon f, muodostaa annettu ortonormaali joukko funktioavaruuden kannan. Lisäksi kohdassa (21) epäyhtälö voidaan korvata yhtäsuuruudella eli funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$ Fourier'n kertoimille pätee yhtälö

$$\frac{1}{2}\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx.$$

9 Fourier'n sarjan hajaantumisesta

Esitellään *Henri Lebesguen* konstruktio jatkuvasta funktiosta, jonka Fourier'n sarja hajaantuu origossa. Tällaisen funktion löytäminen on hankalaa. Lebesgue esitteli tällaisen konstruktion kirjassaan *Leçons sur les séries trigonométriques* [6]. Aloitetaan konstruktio määrittelemällä ensin jatkuva funktio $\Gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, joka sitten laajennetaan jatkuvaksi 2π-periodiseksi funktioksi $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Funktio $\Gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ määritellään paloittain jakamalla väli $[0, \pi]$ numeroituvasti äärettömään osaan. Esitellään kolme reaalilukujonoa, joiden avulla voidaan esitellä osavälit ja funktion Γ arvo jokaisella osavälillä.

1. Olkoon (c_n) sellainen lukujono, että $c_n \to 0$.
2. Olkoon (w_n) kasvava lukujono, missä w_n on pariton kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$.
3. Määritellään jono (a_n) asettamalla $a_n = w_0 w_1 w_2 ... w_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Määrittelyn seurauksena jokainen jäsen a_n on pariton kokonaisluku.
4. Määritellään osaväli $I_n = \left(\frac{2\pi}{a_n}, \frac{2\pi}{a_{n-1}} \right]$.

Lukujonojen (c_n) ja (w_n) jäsenten tarkoilla arvoilla ei ole merkitystä. Kokoluokan havainnollistamiseksi kuitenkin määrätään seuraavaksi tarkat arvot. Määritellään lukujonot (c_n) ja (w_n) asettamalla $c_n = \frac{1}{4^n}$ kaikilla $n \in \mathrm{N}_1$ ja $w_n = 3^{16^n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Jonot alkavat tarkoituksella eri indeksillä.

Ensimmäinen osaväli on $I_1 = \left(\frac{2\pi}{3^{17}}, \frac{2\pi}{3} \right]$ Loput osavälit I_n asettuvat hyvin lähelle origoa. Osavälien I_n unioni voidaan ilmaista välinä $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} I_n = \left(0, \frac{2\pi}{3} \right]$. Seuraavaksi voidaan konstruoida haluttu funktio $\Gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

Määritellään funktio $\Gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ paloittain siten, että

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{c_n}{x} \sin\left(\frac{a_n x}{2} \right) \sin\left(\frac{x}{2} \right) \text{ , kun } x \in I_n \\ 0 \text{ , kun } x \notin \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} I_n \end{cases} ,$$

Emme ole erityisesti kiinnostuineita itse funktiosta Γ, vaan sen 2π-periodisesta jatkuvasta laajennuksesta $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

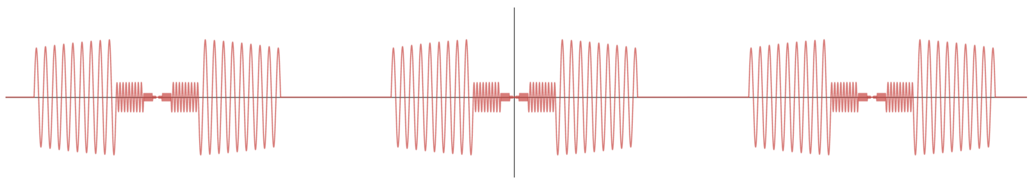
Määritellään funktio $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla funktiolle Υ kolme ehtoa:

1. $\Upsilon(x) = \Gamma(x)$, kun $x \in [0, \pi]$.

2. $\Upsilon(-x) = \Upsilon(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

3. $\Upsilon(x + 2\pi) = \Upsilon(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Ehdot toteuttava funktio Υ on 2π-periodinen jatkuva funktio, jonka Fourier'n sarja hajaantuu origossa. Funktion kuvaajaa on pyritty havainnollistamaan kuvassa 6. Todellista funktion Υ kuvaajaa on todella vaikeaa esitellä, koska sin-funktion argumentti $\frac{a_n x}{2}$ saa todella suuria arvoja ja kasvaa entisestään, kun lähestytään origoa. Lisäksi välit I_n pakkautuvat tiiviisti origon viereen. Kuvasta saa kuitenkin käsityksen funktion Υ luonteesta. Sen itseisarvo pienenee ja oskillaatio kasvaa, kun lähestytään origoa. Lisäksi funktio on jaksollinen ja jatkuva. Funktion jatkuvuus todistetaan seuraavaksi.



Kuva 6: Funktion Υ havainnollistamiskuva

Lemma 9.1. Funktio $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

Todistus. Koska funktio Υ on 2π-periodinen sekä kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $\Upsilon(-x) = \Upsilon(x)$, riittää jatkuvuutta tarkastella välillä $[0, \pi]$. Välillä $\left(\frac{2\pi}{a_0}, \pi\right]$ funktio Υ saa vakioarvon 0 ja jatkuvuus välillä on selvä päätepistettä $\frac{2\pi}{a_0}$ lukuunottamatta. Olkoon $n \in \mathbb{N}_1$. Välillä I_n saadaan funktiolle lauseke

$$\Upsilon(x) = \frac{c_n}{x} \sin\left(\frac{a_n x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right). \tag{37}$$

Luvusta $n \in \mathbb{N}_1$ riippumatta lauseke (37) on välin I_n sulkeumassa $\left[\frac{2\pi}{a_n}, \frac{2\pi}{a_{n-1}}\right]$ jatkuvien funktioiden tulona jatkuva. Osoitetaan, että tämän suljetun välin päätepisteissä lauseke (37) saa arvon 0 riippumatta luvusta $n \in \mathbb{N}_1$. Silloin funktion Υ jatkuvuus tiedetään välien I_n sisäpisteiden lisäksi välien päätepisteissä. Lauseke (37) saa välin I_n vasemmassa päätepisteessä $\frac{2\pi}{a_n}$ arvoksi

$$\frac{c_n a_n}{2\pi} \cdot \sin(\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a_n}\right) = 0,$$

sekä välin I_n oikeassa päätepisteessä $\frac{2\pi}{a_{n-1}}$ arvoksi

$$\frac{c_n a_{n-1}}{2\pi} \cdot \sin\big(\pi w_n\big) \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{a_{n-1}}\Big) = 0.$$

Siis funktion jatkuvuus tiedetään origoa lukuunottamatta.

Välillä $\Big(0, \frac{2\pi}{a_0}\Big]$ pätee arvio

$$\Big|\Upsilon(x)\Big| = \Big|\frac{c_n}{x}\sin\Big(\frac{a_n x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big| \leq \frac{c_n}{x}\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) \leq \frac{c_n}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{c_n}{2}. \tag{38}$$

Indeksi $n \in \mathbb{N}_1$ riippuu muuttujan x arvosta siten, että $c_n \to 0$, kun $x \to 0$. Siis pätee $\Upsilon(x) \to \Upsilon(0) = 0$, kun $x \to 0$ eli funktio on jatkuva origossa. Jatkuvuus on todistettu välillä $[0, \pi]$. Koska funktio Υ on 2π-periodinen sekä kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $\Upsilon(-x) = \Upsilon(x)$, on funktio jatkuva joukossa $\mathbb{R}$. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että funktion Υ Fourier'n sarja hajaantuu origossa. Ideana on valita funktion Υ Fourier'n sarjan osasumman s_n osajono s_{v_k} ja osoittaa, että osajono hajaantuu. Tämän seurauksena alkuperäinen osasumme s_n ei suppene, vaan hajaantuu. Osajonon hajaantuminen osoitetaan hyödyntämällä Lemmaa 9.2.

Lemma 9.2. Olkoon $x_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_1$. Jos $y_n = \sum_{i=1}^n x_i$, niin saadaan arvio

$$|y_n| \geq |x_j| - \sum_{i \neq j}^{n} |x_i|.$$

Todistus. Koska $x_k = y_n - \sum_{i \neq k}^n x_i$, niin

$$|x_k| = \Big| y_n - \sum_{i \neq k}^{n} x_i \Big| \leq |y_n| + \Big| \sum_{i \neq k}^{n} x_i \Big| \leq |y_n| + \sum_{i \neq k}^{n} |x_i|,$$

mistä saadaan väite $\square$

Lemman 9.2 avulla voidaan osoittaa, että termi $|y_n|$ hajaantuu, kun termi $|x_j|$ kasvaa huomattavasti nopeammin kuin summatermi $\sum_{i \neq k}^n |x_i|$.

Lause 9.3. Funktion $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier'n sarja hajaantuu origossa.

Todistus. Funktio Υ toteuttaa Lauseen 5.6 ehdot, joten osasumma $s_n(0)$ voidaan ilmaista konvoluutiona

$$s_n(0) = \big(D_n * f\big)(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\Upsilon(t)\ dt.$$

Koska $D_n(-x) = D_n(x)$ ja $\Upsilon(-x) = \Upsilon(x)$ pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$ ja $x \in \mathbb{R}$, voidaan integraali ilmaista muodossa

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\Upsilon(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\bigl((n+\frac{1}{2})t\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt.$$

Osoitetaan, että osasummien $s_n(0)$ osajono $s_{v_k}(0)$ hajaantuu, missä $v_k = \frac{a_k-1}{2}$. Koska luku a_k on pariton, kuuluu v_k luonnollisiin lukuihin kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Kun muistetaan, että välillä $\bigl[\frac{2\pi}{a_0}, \pi\bigr]$ funktion arvo on 0 saadaan termille s_{v_k} lauseke

$$\begin{aligned}
s_{v_k} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{a_k}}^{\pi} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{I_j} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k}\int_{I_j} \frac{c_j}{t}\sin\Bigl(\frac{a_j t}{2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{a_k t}{2}\Bigr)\ dt.
\end{aligned}$$

Lemman 9.2 perusteella voidaan muodostaa lauseke

$$\begin{aligned}
|\pi s_{v_k}| \geq{}& \left|\int_{I_k} \frac{c_k}{t}\sin^2\Bigl(\frac{a_k t}{2}\Bigr)\ dt\right| - \left|\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{\sin\bigl(\frac{a_k t}{2}\bigr)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt\right| \\
&- \sum_{j=1}^{k-1}\left|\int_{I_j} \frac{c_j}{t}\sin\Bigl(\frac{a_j t}{2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{a_k t}{2}\Bigr)\ dt\right|. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että epäyhtälön oikeapuoli hajaantuu kohti ääretöntä, kun $k \to \infty$.

Identiteetti $\sin^2\Big(\frac{x}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1-\cos(x)\Big)$ voidaan johtaa kaavojen (9) ja (10) avulla. Identiteetin avulla saadaan lausekkeen (39) ensimmäiselle termille helpommin arvioitava lauseke

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{I_k} \frac{c_k}{t}\sin^2\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)\ dt\right| = \int_{I_k} \frac{c_k}{t}\sin^2\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)\ dt = \int_{I_k} \frac{c_k}{t}\frac{1}{2}\Big(1-\cos\big(a_k t\big)\Big)\ dt \\
&= \frac{c_k}{2}\int_{I_k} \frac{1}{t}\ dt - \frac{c_k}{2}\int_{I_k} \frac{\cos\big(a_k t\big)}{t}\ dt = \frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{2a_k}\int_{I_k} \frac{1}{t^2}\sin\big(a_k t\big)\ dt.
\end{aligned}
$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa, kun vähennettävä termi osittaisintegroidaan. Nyt ensimmäiselle termille saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{I_k} \frac{c_k}{t}\sin^2\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)\ dt\right| \geq \frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{2a_k}\int_{I_k} \frac{1}{t^2}\ dt \\
&= \frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{4\pi}\Big(1-\frac{1}{w_k}\Big) \geq \frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{4\pi}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Lausekkeen (39) toiselle termille saadaan arvio

$$
\left|\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{\sin\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\Upsilon(t)\ dt\right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \left|\frac{\sin\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right| \cdot \big|\Upsilon(t)\big|\ dt.
$$

Integroimisvälillä pätee osoittajalle arvio $\left|\sin\big(\frac{a_k t}{2}\big)\right| = \sin\big(\frac{a_k t}{2}\big) \leq \frac{a_k t}{2}$ ja nimittäjälle kaavan (26) perusteella $\left|\sin\big(\frac{1}{2}t\big)\right| = \sin\big(\frac{1}{2}t\big) \geq \frac{t}{\pi}$. Tämän perusteella

$$
\int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \left|\frac{\sin\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right| \cdot \big|\Upsilon(t)\big|\ dt \leq \int_0^{\frac{2\pi}{a_k}} \frac{a_k\pi}{2} \cdot \big|\Upsilon(t)\big|\ dt \leq \frac{\pi^2 c_k}{2}.
\tag{41}
$$

Viimeinen epäyhtälö toteutuu, koska kaavan (38) perusteella integroimisvälillä on voimassa arvio $\big|\Upsilon(x)\big| \leq \frac{c_k}{2}$.

Lausekkeen (39) kolmannelle termille saadaan arvio

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1}\left|\int_{I_j} \frac{c_j}{t}\sin\Big(\frac{a_j t}{2}\Big)\sin\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)\ dt\right| \leq \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j} \left|\frac{c_j}{t}\sin\Big(\frac{a_j t}{2}\Big)\sin\Big(\frac{a_k t}{2}\Big)\right|\ dt \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j} \left|\frac{c_j}{t}\right|\ dt = \sum_{j=1}^{k-1}\int_{I_j} \frac{c_j}{t}\ dt = \sum_{j=1}^{k-1} c_j\ln\big(w_j\big).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (39) – (42) saadaan arvio

$$
\big|\pi s_{v_k}\big| \geq \frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{4\pi} - \frac{\pi^2 c_k}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j\ln\big(w_j\big).
$$

Osoitetaan, että osasumma s_{v_k} hajaantuu näyttämällä, että epäyhtälön oikea puoli hajaantuu kohti ääretöntä, kun $k \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left(\frac{c_k}{2}\ln\big(w_k\big) - \frac{c_k}{4\pi} - \frac{\pi^2 c_k}{2} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j \ln\big(w_j\big)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot 4^k}\ln\big(3^{16^k}\big) - \frac{1}{4^{k+1}\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\ln\big(3^{16^j}\big)}{4^j}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\big(3\big)\cdot 4^{2k}}{2\cdot 4^k} - \frac{1}{4^{k+1}\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^k} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\ln\big(3\big)\cdot 4^{2j}}{4^j}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\big(3\big)}{2}\cdot 4^k - \frac{1}{4^{k+1}\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^k} - \ln\big(3\big)\cdot\sum_{j=1}^{k-1} 4^j\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\big(3\big)}{2}\cdot 4^k - \frac{1}{4^{k+1}\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^k} - \ln\big(3\big)\cdot\frac{4^k-4}{3}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\big(3\big)}{6}\cdot 4^k - \frac{1}{4^{k+1}\pi} - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^k} + \frac{4\ln\big(3\big)}{3}\right) = \infty
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen termi lähestyy ääretöntä, kun kaksi seuraavaa termiä lähestyvät nollaa. Viimeinen termi pysyy vakiona. Tarkastelun perusteella osasumma s_{v_k} hajaantuu. Eli jatkuvan funktion $\Upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fourier'n sarja hajaantuu origossa. $\square$

10 Lähdeluettelo

[1] I. Holopainen, *Mitta ja integraali* 2004. Elektroninen luentomoniste osoitteessa mv.helsinki.fi/home/iholopai/MitInt02.pdf .

[2] P. Duren, *Invitation to Classical Analysis* 2012.

[3] J. Väisälä, *Topologia 1* 1999.

[4] Walter A. Strauss, *Partial differential equations : An introduction* 2. ed. 2008.

[5] Kari Astala ja Petteri Piiroinen: *Funktioanalyysin peruskurssi*, luentomoniste 2006, Helsingin yliopisto,
https://prujut.files.wordpress.com/2011/04/funktionaalianalyysin-peruskurssi-2006-luvut-0-10.pdf

[6] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques* 1906.