

# Maxwellin yhtälöiden ratkaiseminen siirtomatriisimenetelmällä

LuK-tutkielma  
Turun yliopisto  
Fysiikan ja tähtitieteen laitos  
Fysiikka  
Huhtikuu 2024  
Teemu Honkanen  
Tarkastaja:  
FT Kimmo Luoma

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO  
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

**Honkanen, Teemu** Maxwellin yhtälöiden ratkaiseminen  
siirtomatriisimenetelmällä

Luk-tutkielma, 21 s., 3 liites.  
Fysiikka  
Maaliskuu 2024

---

Siirtomatriisimenetelmä on tehokas matemaattinen työkalu mallintamaan valon etenemistä monikerroksisessa aineessa. Nykypäivänä menetelmää voidaan soveltaa teollisuudessa parantamaan valon läpäisykykyä tai heijastuvuutta materiaalista.

Tässä tutkielmassa esitetään ratkaisu Maxwellin yhtälöille käyttäen siirtomatriisimenetelmää. Aluksi johdetaan Fresnelin yhtälöt kahdelle eri tasoallon polarisaatiolle. Tämän jälkeen johdetaan siirtomatriisi yksikerroksiselle aineelle, mikä yleistetään monikerroksiselle aineelle.

Lopuksi valon etenemistä simuloidaan ohutkalvolla pinnoitetussa lasissa, Braggin peilissä ja mikrokaviteetti valokennossa Pythonin tmm-moduulilla, joka perustuu siirtomatriisimenetelmään.

Asiasanat: siirtomatriisimenetelmä, Fresnelin yhtälöt

# Sisällys

<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>1 Siirtomatriisin johtaminen</b>	<b>2</b>
1.1 Reunaehdot . . . . .	2
1.2 Fresnelin yhtälöt . . . . .	5
1.3 Siirtomatriisi . . . . .	9
<b>2 Sovelluksia</b>	<b>12</b>
2.1 Ohutkalvo . . . . .	12
2.2 Braggin peili . . . . .	13
2.3 Mikrokalviteetti . . . . .	15
<b>3 Johtopäätökset</b>	<b>18</b>

## Johdanto

Sähkömagneettisten kenttien käyttäytyminen väliaineessa on peruste esimerkiksi aurinkokennojen ja muiden kvantti-ilmiöihin perustuvien optoelektronisten laitteiden suunnitteluun [1, 2]. Etenkin auringonvaloa sähköenergiaksi muuttavat aurinkokennot ovat nykypäivänä kasvattaneet suosiota [1]. Siksi on tärkeää, että on menetelmä, jolla voidaan tarkasti ja tehokkaasti tutkia sähkömagneettisten kenttien käyttäytymistä aineessa, jotta laitteiden suorituskykyä voidaan parantaa. Laajasti optiikassa käytetty menetelmä tähän tarkoitukseen on siirtomatriisimenetelmä sen tarkkuuden ansiosta [3]. Sitä käytetään yleisesti yksiulotteisen Schödingerin yhtälön ja Maxwellin yhtälöiden ratkaisemiseen [2, 4]. Tässä tutkielmassa keskitytään jälkimmäiseen.

Siirtomatriisimenetelmän perusajatus on se, että sillä voidaan kuvata sähkö- tai magneettikentän siirtymistä aineessa, jossa on mielivaltaisen monta kerrosta, ja jossa rajapinnat ovat tasoja [5, 6]. Menetelmä perustuu siihen, että siinä kerrotaan kahdenlaisia matriiseja keskenään. Yksi matriisi kuvaa kentän käyttäytymistä rajapinnalla ja toinen matriisi kuvaa kentän siirtymistä homogeenisessä aineessa [5]. Menetelmän avulla voidaan tutkia valon heijastumista, siirtymistä, interferenssiä ja taittumista monikerroksisessa aineessa [6]. Tässä tutkielmassa valolla tarkoitetaan näkyvän valon spektrin lisäksi myös sen ulkopuolista sähkömagneettista säteilyä.

Siirtomatriisimenetelmän kehittäjä on ollut aluksi Abelès [7], joka kehitti  $2 \times 2$  matriisimenetelmän mallintamaan sähkömagneettista säteilyä monikerroksisessa aineessa. Abelèsin jälkeen Teitler ja Henvis esittivät yleisemmän  $4 \times 4$  matriisimenetelmän kuvaamaan sähkömagneettisen säteilyn etenemistä anisotrooppisessa aineessa [8]. Myöhemmin monet muut ovat vielä kehittäneet menetelmää eri tarkoituksiin. Esimerkiksi menetelmää on muokattu niin, että sillä voidaan tutkia kerroksellista väliainetta, jonka rajapinnat johtavat sähköä [9], sekä niin, että sillä voidaan tutkia koherentin interferenssin lisäksi epäkoherenttia interferenssiä [10].

Tutkielman luvussa 1 johdetaan siirtomatriisi sähkömagneettiselle tasoaallolle,

joka etenee monikerroksisessa homogeenisessa aineessa. Ensiksi johdetaan Maxwellin yhtälöistä reunaehdot sähkömagneettiselle kentälle kahden aineen rajapinnalla. Näitä käyttäen johdetaan Fresnelin yhtälöt kahdelle eri tasoallon polarisaatiolle. Lopuksi reunaehdot käyttäen johdetaan siirtomatriisi yksikerroksiselle aineelle, mikä vielä yleistetään monikerroksiselle aineelle. Reunaehdot ja Fresnelin yhtälöt johdetaan lähdeä [11] hyödyntäen ja siirtomatriisi johdetaan lähdeä [12] hyödyntäen. Luvussa 2 tutkitaan, miten siirtomatriisimenetelmää voidaan soveltaa ohutkalvoon, Braggin peiliin ja mikrokaviteettiin.

# 1 Siirtomatriisin johtaminen

## 1.1 Reunaehdot

Tarkastellaan rajapinnalle tulevaa monokromaattisen tasoallon sähkökenttää

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \exp(i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)), \quad (1)$$

missä  $\mathbf{r}$  on paikkavektori,  $t$  on aika,  $i$  on imaginaariyksikkö,  $\mathbf{k}_i$  on aaltovektori,  $\omega_i$  on kulmataajuus ja  $\mathbf{E}_{0i}$  on aallon amplitudi, joka on vakio ajan suhteen. Olkoon kulmataajuus, suunta ja amplitudi mielivaltaisia. Tässä alaindeksi  $i$  viittaa rajapinnalle saapuvaan tasoaltoon.

Kahden väliaineen, joiden taitekertoimet ovat  $n_i$  ja  $n_t$ , rajapinnassa tasoalto joko heijastuu tai taittuu Snellin lain mukaisesti

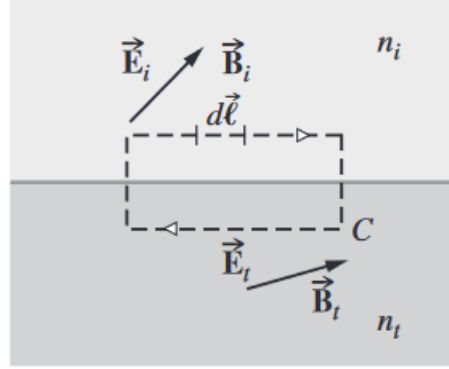
$$n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t), \quad (2)$$

missä  $\theta_i$  on tulokulma ja  $\theta_t$  on taitekulma.

Heijastuvaa tasoallon sähkökenttää ja rajapinnasta taittunutta tasoallon sähkökenttää kuvataan kaavoilla

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \exp(i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \epsilon_r)), \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp(i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \epsilon_t)), \quad (4)$$



Kuva 1. Reunaehdot rajapinnalla [11].

missä alaindeksi  $r$  viittaa heijastuneeseen aaltoon ja alaindeksi  $t$  viittaa rajapinnasta taittuneeseen aaltoon.  $\epsilon_r$  ja  $\epsilon_t$  ovat tässä vaihevakiota.

Johdetaan reunaehdot tasoallolle, joka etenee häviöttömässä eristävissä aineessa, Maxwellin yhtälöistä

$$\oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5)$$

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_V \rho dV, \quad (6)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (7)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \iint_A \left( \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}, \quad (8)$$

missä  $\rho$  on varaustiheys,  $\mathbf{B}$  on magneettikenttä,  $\mathbf{J}$  on sähkövirran tiheys,  $\mu$  on väliaineen permeabiliteetti ja  $\epsilon$  on väliaineen permittiivisyys.

Maxwellin yhtälöistä johdettavat reunaehdot sähkökentälle  $E$  ja magneettikentälle  $B$  ovat tärkeitä, kun jatkossa kuvataan rajapintaan tulevan valon suhdetta heijastuvaan ja läpäisevään. Ensimmäinen reunaehto johdetaan kaavasta (7), joka tunnetaan Faradayn induktiolakina.

Valitaan kuvan 1 polun  $C$  muodostamasta silmukasta niin kapea, että  $A = 0$ , jossa  $A$  on polun rajaama pinta-ala. Tällöin kaava (7) on

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Symmetrian takia kaikki rajapinnan normaalin suuntaiset sähkökentän komponentit  $\mathbf{E}_\perp$  kumoavat toisensa. Tällöin jäljelle jää

$$\int_{C_i} (\mathbf{E}_{\parallel,i} + \mathbf{E}_{\parallel,r}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_t} \mathbf{E}_{\parallel,t} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

missä alaindeksi  $\parallel$  viittaa rajapinnan suuntaiseen komponenttiin. Voidaan lisäksi olettaa, että alueella  $A$  sähkökenttä  $E$  on vakio, ja koska  $d\mathbf{l}$  kulkee polun vastakkaisilla puolilla eri suuntaan, saadaan integraalista

$$\mathbf{E}_{\parallel,i} + \mathbf{E}_{\parallel,r} - \mathbf{E}_{\parallel,t} = 0. \quad (9)$$

Tämä tarkoittaa sitä, että sähkökentän rajapinnan suuntainen komponentti  $\mathbf{E}_\parallel$  on yhtäsuuri rajapinnan molemmilla puolilla.

Sähkökentän suunnasta riippumatta pinnan normaalivektorin  $\hat{\mathbf{u}}_n$  ja sähkökentän ristitulo on aina pinnan tangentin suuntainen. Normaalivektorin avulla kaava (9) voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_t. \quad (10)$$

Kun kaavat (1), (3) ja (4) sijoitetaan tähän yhtälöön, eksponenttifunktiot kumoutuvat pois rajapinnalla jokaisessa pisteessä jokaisena ajan hetkenä. Näin ollen yhtäsuuruus on muuttujista  $t$  ja  $r$  riippumaton ja sähkökentän  $E$  reunaehto saadaan lopulliseen muotoon

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0i} + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0r} = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0t}. \quad (11)$$

Johdetaan toinen reunaehto sähkömagneettiselle kentälle kaavasta (8), joka tunnetaan Amperen lakina. Valitaan taas sama kuvan 1 polku  $C$ , että  $A = 0$ . Jaetaan kaavan (8) molemmat puolet väliaineen permeabiliteetilla  $\mu$ , jolloin yhtälö on

$$\frac{1}{\mu} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (12)$$



Tämä reunaehto johdetaan samalla periaatteella kuin Faradayn induktiolaista johdettu reunaehto. Tällöin lopullinen reunaehto magneettikentälle  $B$  normaalivektorin  $\hat{\mathbf{u}}_n$  avulla kirjoitettuna on

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \frac{1}{\mu_i} \mathbf{B}_i + \hat{\mathbf{u}}_n \times \frac{1}{\mu_t} \mathbf{B}_r = \hat{\mathbf{u}}_n \times \frac{1}{\mu_t} \mathbf{B}_t. \quad (13)$$

## 1.2 Fresnelin yhtälöt

Fresnelin yhtälöt kuvaavat valon heijastumista ja läpäisemistä kahden väliaineen rajapinnalla [13]. Yhtälöt voidaan johtaa käyttämällä edellä johdettuja sähkömagneettisen kentän reunaehtoja.

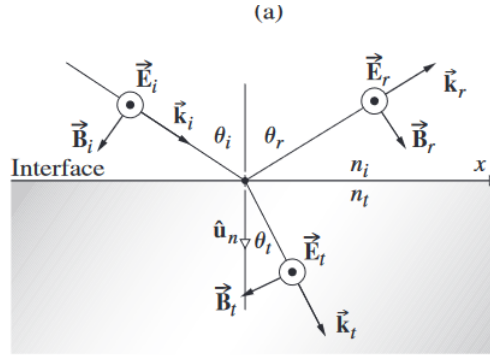
Sähkömagneettiset tasoaalot voidaan esittää kahden eri polarisaatiosuunnan lineaarikombinaationa. TE-polarisaatiossa (Transverse Electric) sähkökenttä on kohtisuorassa tason pintavektoriin nähden ja TM-polarisaatiossa (Transverse Magnetic) magneettikenttä on kohtisuorassa tason pintavektoriin nähden [12]. Fresnelin yhtälöt johdetaan molemmille polarisaatioille.

Tutkitaan ensiksi kuvan 2 mukaista tilannetta, jossa sähkömagneettinen tasoaalto on TE-polarisoitunut. Koordinaatisto on valittu niin, että sähkökenttä osoittaa positiiviseen  $z$ -suuntaan, ja rajapinta on kohdassa  $y = 0$ . Koska sähkökenttä, magneettikenttä ja aaltovektori ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden, on voimassa yhtälöt

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (15)$$

missä  $v$  on tasoaalton vaihenopeus väliaineessa. Ylemmästä yhtälöstä voidaan ratkaista magneettikenttä ja kirjoittaa se erikseen saapuvalle, heijastuvalle ja taittuvalle



Kuva 2. TE-polarisoitunut aalto kahden väliaineen rajapinnalla [11].

tasoaallolle:

$$B_i = \frac{E_i}{v_i} \quad (16)$$

$$B_r = \frac{E_r}{v_r} \quad (17)$$

$$B_t = \frac{E_t}{v_t}, \quad (18)$$

missä  $v_i = v_r$ .

Koska TE-polarisaatiossa sähkökenttä on aina rajapinnan suuntainen, voidaan kaavan (11) reunaehto kirjoittaa yksinkertaisesti muodossa

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}. \quad (19)$$

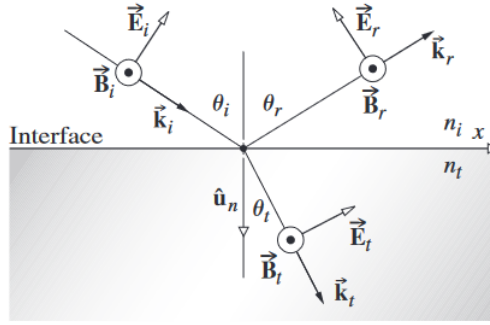
Magneettikentille  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{B}_r$  ja  $\mathbf{B}_t$  voidaan laskea niiden rajapinnansuuntaiset komponentit trigonometrisesti, kun tasoaallon tulokulma on  $\theta_i$ , heijastuskulma on  $\theta_r$  ja taitekulma on  $\theta_t$ . Tällöin kaavassa (13) esitetty reunaehto skalaarimuodossa kirjoitettuna on

$$-\frac{B_i}{\mu_i} \cos(\theta_i) + \frac{B_r}{\mu_i} \cos(\theta_r) = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos(\theta_t), \quad (20)$$

missä  $\theta_i = \theta_r$ .

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan kaavat (16) – (18), saadaan

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos(\theta_i) = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t \cos(\theta_t). \quad (21)$$



Kuva 3. TM-polarisoitunut aalto kahden väliaineen rajapinnalla [11].

Kun Kerrotaan molemmat puolet tyhjiön valonnopeudella  $c$ , voidaan yhtälöön sijoittaa taiterkertoimet  $n_i = c/v_i$ . Lisäksi voidaan sijoittaa kaavat (1), (3) ja (4), joiden eksponenttifunktiot supistuvat pois rajapinnalla. Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{n_i}{\mu_i}(E_{0i} - E_{0r}) \cos(\theta_i) = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos(\theta_t). \quad (22)$$

Kun kaavat (22) ja (19) yhdistetään, saadaan sähkökentille suhteet

$$r_{\text{TE}} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_i) - \frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_t)}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_i) + \frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_t)}, \quad (23)$$

$$t_{\text{TE}} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_i)}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_i) + \frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_t)}, \quad (24)$$

missä  $r_{\text{TE}}$  on sähkökenttäamplitudin heijastuskerroin ja  $t_{\text{TE}}$  on sähkökenttäamplitudin läpäisykerroin TE-polarisoituneelle sähkömagneettiselle tasoallolle. Nämä kertoimet tunnetaan Fresnelin yhtälöinä TE-polarisaatiolle. Kertoimet  $r_{\text{TE}}$  ja  $t_{\text{TE}}$  ovat voimassa kaikille isotrooppisille, lineaarisille ja homogeenisille väliaineille.

Tutkitaan seuraavaksi kuvan 3 mukaista tapausta, jossa sähkömagneettinen tasoalto on TM-polarisoitunut. Koordinaatisto on valittu niin, että magneettikenttä osoittaa positiiviseen  $z$ -suuntaan, ja rajapinta on kohdassa  $y = 0$ .

Koska magneettikenttä on aina rajapinnan suuntainen, voidaan kirjoittaa kaavan (13) reunaehto muodossa

$$\frac{1}{\mu_i} B_i + \frac{1}{\mu_i} B_r = \frac{1}{\mu_t} B_t. \quad (25)$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan kaavat (16)–(18), saadaan reunaehto esitettyä muodossa:

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_i + \frac{1}{\mu_r v_r} E_r = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t, \quad (26)$$

missä  $\mu_i = \mu_r$  ja  $\theta_i = \theta_r$ . Kun yhtälö kerrotaan tyhjiön valonnopeudella, voidaan taiterkertoimet sijoittaa siihen. Lisäksi voidaan sijoittaa kaavat (1), (3) ja (4), joiden eksponenttifunktiot supistuvat pois rajapinnalla. Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{n_i}{\mu_i} E_{0i} + \frac{n_i}{\mu_i} E_{0r} = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t}. \quad (27)$$

Kaavassa (11) esitetyn reunaehdon sähkökentille  $\mathbf{E}_i$ ,  $\mathbf{E}_r$  ja  $\mathbf{E}_t$  voidaan laskea niiden rajapinnansuuntaiset komponentit trigonometrisesti. Tällöin reunaehto TM-polarisoituneelle valolle on

$$E_{0i} \cos(\theta_i) - E_{0r} \cos(\theta_r) = E_{0t} \cos(\theta_t). \quad (28)$$

Yhdistämällä kaavat (28) ja (27) saadaan sähkökentille suhteet

$$r_{\text{TM}} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right) = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_i) - \frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_t)}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_t) + \frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_i)}, \quad (29)$$

$$t_{\text{TM}} = \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right) = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_i)}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos(\theta_t) + \frac{n_t}{\mu_t} \cos(\theta_i)}, \quad (30)$$

missä  $r_{\text{TM}}$  on sähkökenttäamplitudin heijastuskerroin ja  $t_{\text{TM}}$  on sähkökenttäamplitudin läpäisykerroin TM-polarisoituneelle sähkömagneettiselle tasoallolle. Nämä kertoimet ovat Fresnelin yhtälöitä TM-polarisaatiolle.

Fresnelin yhtälöt voidaan kirjoittaa vielä toisessa muodossa käyttämällä kaavassa (2) esitettyä Snellin lakia.

Jos lisäksi oletetaan, että  $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$ , tällöin Fresnelin yhtälöt saadaan muo-

toon

$$r_{\text{TE}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (31)$$

$$t_{\text{TE}} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}, \quad (32)$$

$$r_{\text{TM}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}, \quad (33)$$

$$t_{\text{TM}} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \quad (34)$$

Näistä Fresnelin yhtälöistä voidaan määrittellä TE- ja TM-polarisaatiolle aineen heijastussuhde

$$R = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2 \quad (35)$$

ja läpäisysuhde

$$T = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t^2. \quad (36)$$

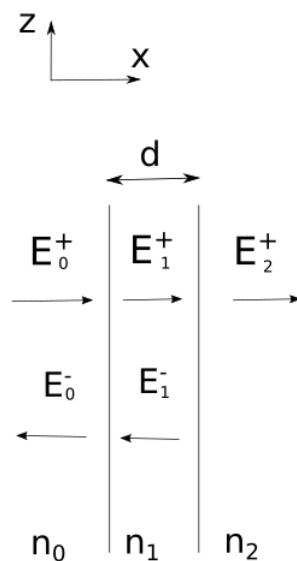
### 1.3 Siirtomatriisi

Kun Fresnelin yhtälöt tunnetaan, voidaan johtaa tulos, joka kuvaa valon etenemistä yksikerroksisessa aineessa ja tämä voidaan yleistää helposti vielä monikerroksiselle aineelle. Jatkossa Fresnelin kertoimien polarisaatiota kuvaavat alaindeksit tullaan jättämään pois.

Tutkitaan kuvan 4 mukaista tilannetta, jossa valo tulee aineen vasemmalta puolelta mielivaltaisessa kulmassa. Oletetaan valon olevan TE-polarisoitunut. Valo, joka läpäisee ensimmäisen rajapinnan voi heijastua aineen sisällä, jolloin aiemmin johdetuissa reunaehdoissa on otettava huomioon myös sähkökenttä  $E_1^-$  ensimmäisellä rajapinnalla. Tällöin kaavojen (19) ja (22) reunaehdot ovat muotoa

$$E_0^+ + E_0^- = E_1^+ + E_1^-,$$

$$\frac{n_0}{\mu_0} (E_0^+ - E_0^-) \cos(\theta_0) = \frac{n_1}{\mu_1} (E_1^+ - E_1^-) \cos(\theta_1'),$$



Kuva 4. Valon eteneminen yksikerroksisessa aineessa. Sähkökenttien alaindeksit viittaavat väliaineeseen ja yläindeksien plus- ja miinus-merkit viittaavat sähkökentän kulkusuuntaan.

missä yläindekseissä esiintyvä heittomerkki kuvaa kuvaa rajapinnan oikeaa puolta.

Kerrotaan ylempi yhtälö termillä  $\pm n_0/\mu_0$  ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

Ratkaisuiksi saadaan yhtälöt

$$t_{01}E_0^+ = E_1'^+ + r_{01}E_1'^-, \quad (37)$$

$$t_{01}E_0^- = r_{01}E_1'^+ + E_1'^-, \quad (38)$$

missä fresnelin kertoimien alaindeksit kuvaavat kahden aineen rajapintaa. Tämä yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisimuodossa seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{01}} \begin{pmatrix} 1 & r_{01} \\ r_{01} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1'^+ \\ E_1'^- \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Samanlainen matriisiesitys on kuvan 4 jälkimmäisen rajapinnan molemmilla puolilla oleville sähkökentille

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{12}} \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2'^+ \\ E_2'^- \end{pmatrix}, \quad (40)$$

missä  $E_2'^- = 0$ , koska valo ei voi heijastua viimeisen rajapinnan jälkeen.

Yleisesti voidaan kuvata rajapinnan molemmilla puolilla olevien sähkökenttien suhdetta rajapintamatriisilla (engl. interface matrix)

$$\mathbf{D}_{m-1,m} = \frac{1}{t_{m-1,1}} \begin{pmatrix} 1 & r_{m-1,m} \\ r_{m-1,m} & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Valon heijastumiseen ja läpäisemiseen vaikuttaa myös valon kulkema matka materiaalin sisällä. Tarkastellaan nyt valon etenemistä kuvan 4 väliaineessa 2. Valon kulkiessa väliaineen yhdeltä reunalta toiselle reunalle, sen vaiheen muutos on  $e^{\pm i\delta_2}$ , jossa  $\delta_2 = kn_2d_2$ , ja  $k$  on valon aaltoluku [10, 12]. Eksponentin etumerkki riippuu valon kulkusuunnasta ja koordinaatiston valinnasta.

Väliaineen vasemmanpuoleisen rajapinnan sähkökentälle ja oikeanpuoleisen rajapinnan sähkökentälle voidaan esittää suhde matriisimuodossa seuraavasti [12]:

$$\begin{pmatrix} E_1'^+ \\ E_1'^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Tässä esiintyvä matriisi tunnetaan etenemismatriisina (engl. propagation matrix) ja se voidaan kirjoittaa yleisesti [12]

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} e^{-i\delta_m} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_m} \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Kun kaavat (39), (40) ja (42) yhdistetään, saadaan yhtälö

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0'^- \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{0,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_{1,2} \begin{pmatrix} E_2'^+ \\ E_2'^- \end{pmatrix}, \quad (44)$$

missä matriisien tulo voidaan esittää yhden matriisin avulla

$$\mathbf{M}_{0,2} = \mathbf{D}_{0,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{D}_{1,2}.$$

Tämä matriisi tunnetaan siirtomatriisina ja tässä tapauksessa se kuvaa valon etenemistä kuvan 4 aineessa.

Kun monikerroksisessa aineessa on  $N$  kerrosta, Kaavan (44) yhtälö on

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = D_{0,1} \left[ \prod_{m=1}^N P_m D_{m,m+1} \right] \begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix} \quad (45)$$

tai siirtomatriisin avulla kirjoitettuna

$$\begin{pmatrix} E_0^+ \\ E_0^- \end{pmatrix} = M_{0,N+1} \begin{pmatrix} E_{N+1}^+ \\ E_{N+1}^- \end{pmatrix}. \quad (46)$$

## 2 Sovelluksia

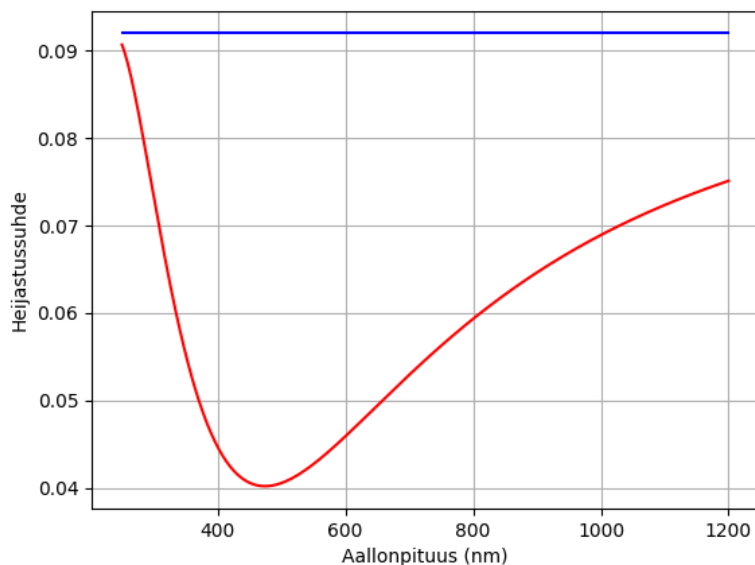
Tässä luvussa esitellään lyhyesti ohutkalvo, Braggin peili ja mikrokaviteetti. Lisäksi siirtomatriisimenetelmällä lasketaan ohutkalvon heijastussuhde aallonpituuden suhteen, Braggin peilin heijastussuhde aallonpituuden ja tulokulman suhteen ja mikrokaviteetin absorptiosuhde aallonpituuden suhteen sekä Poyntingin vektorin suuruus aallonpituuden ja etäisyyden suhteen.

### 2.1 Ohutkalvo

Ohutkalvot ovat materiaaleja, joiden paksuus vaihtelee nanometrin ja mikrometrin välillä [14]. Koska paksuus on lähellä valon aallonpituutta, ensimmäisestä rajapinnasta heijastuva valo interferoi vahvistavasti tai heikentävästi toisesta rajapinnasta heijastuvan valon kanssa [15]. Tämän takia ohutkalvot ovat erityisen hyödyllisiä nykypäivän lasien valmistuksessa, koska pinnoittamalla näitä ohutkalvoilla, saadaan muutettua materiaalin heijastumisominaisuuksia [15].

Simuloidaan TM-polarisoituneen koherentin valon etenemistä lasissa ja ohutkalvolla päällystetyssä lasissa pythonin tmm-moduulilla [16], joka perustuu siirtomatriisimenetelmään. Simulaatiolla verrataan valon heijastumista lasista ja valon heijastumista ohutkalvolla pinnoitetusta lasista. 100 nm paksun ohutkalvon taitekerroin on tässä 1,38 ja lasin taitekerroin on 1,5 [15]. Lasin paksuuden oletetaan olevan ää-





Kuva 5. Materiaalin heijastussuhde aallonpituuden suhteen, kun TM-polarisoituneen valon tulokulma on  $45^\circ$ . Punainen käyrä esittää tilannetta, jossa lasi on päällystetty 100 nm paksuisella ohutkalvolla, jonka taitekerroin on 1,38, ja sininen käyrä esittää tilannetta, jossa lasia ei ole päällystetty ohutkalvolla. valo saapuu ilmasta, jonka taitekerroin on 1. Kuvajasta nähdään, että ohutkalvo vähentää etenkin näkyvän valon aallonpituusalueella valon heijastumista lasista vaimentavan interferenssin takia.

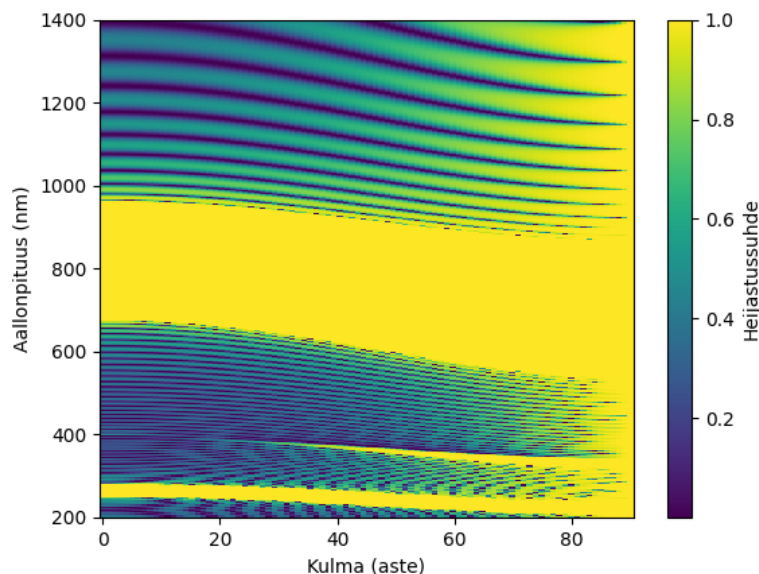
retön, jolloin valo ei voi heijastua sen sisällä ja tällöin ei synny valon interferenssiä, joka vaikuttaa tuloksiin.

Kuvassa 5 on esitetty materiaalin heijastussuhteen kuvaaja aallonpituuden suhteen sekä lasille että ohutkalvolla pinnoitetulle lasille, kun tulokulma on  $45^\circ$ . Kuvajasta nähdään, että ohutkalvo muuttaa heijastuvan valon osuuden riippumaan aallonpituudesta, ja näkyvän valon aallonpituusalueella 390–780 nm [11] ohutkalvolla pinnoitetun lasin heijastuvuus on merkittävästi vähentynyt.

## 2.2 Braggin peili

Braggin peili on optinen peili, jossa on useita kerroksia kahta eri vuorottelevaa ainetta, joista yksi omaa suuren taitekertoimen  $n_H$  ja toinen pienen taitekertoimen  $n_L$  [17]. Kerrosten paksuus on  $\lambda(n)/4$ , jossa  $\lambda(n)$  on valon aallonpituus väliaineessa [18].

Braggin peilillä voidaan heijastaa tiettyjä aallonpituuksia tehokkaasti, kun vas-



Kuva 6. Lämpökartta Braggin peilin heijastussuhteesta etenevän valon aallonpituuden ja tulo-kulman suhteen. Keltainen väri kuvaa suurta heijastuvuutta ja sininen väri kuvaa suurta läpäisevyyttä. Tässä Braggin peilissä on 25 paria kahta eri ainetta, joiden taitekertoimet ovat 1,5 ja 2,6. Braggin peilin resonanssiaallonpituus on 800 nm ja tämän ympäröimää suuren heijastuvuuden aluetta kutsutaan pysäytyskaistaksi.

takkaisiin suuntiin kulkevat valot interferoivat toistensa kanssa. Heijastuvan valon aallonpituutta voidaan vaihtaa muuttamalla kerroksien taitekertoimia [19].

Simuloidaan TM-polarisoituneen koherentin valon etenemistä Pythonin tmm-moduulilla Braggin peilissä. Valitaan 25 paria kahta eri ainetta, joiden taitekertoimet ovat 1,5 ja 2,6. Paksuudet ovat  $\lambda/(4 \cdot n)$ , missä tyhjiön aallonpituudeksi  $\lambda$  valitaan 800 nm.

Kuvassa 6 on esitetty lämpökartta Braggin peilin heijastussuhteesta tyhjiössä etenevän valon aallonpituuden ja tulokulman suhteen. Tässä simulaatiossa Braggin peilin resonanssiaallonpituus  $\lambda_0$  on 800 nm. Tämän ympäröimää suuren heijastuvuuden aluetta kutsutaan pysäytyskaistaksi (engl. stopband), jossa teoriassa mikään tälle aallonpituusalueelle kuuluva valo ei läpäise peiliä, kun kerroksia on äärettömän monta [17]. Pysäytyskaistan leveys on tässä arviolta  $\Delta\lambda = 277\text{nm}$ , kun tulokulma on  $0^\circ$ .

Pysäytyskaistan leveys voidaan laskea myös teoreettisesti kaavalla [18]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{4}{\pi} \arcsin\left(\frac{n_H - n_L}{n_H + n_L}\right), \quad (47)$$

mistä kaistan leveydeksi saadaan  $\Delta\lambda = 276,6\text{nm}$ .

## 2.3 Mikroaviteetti

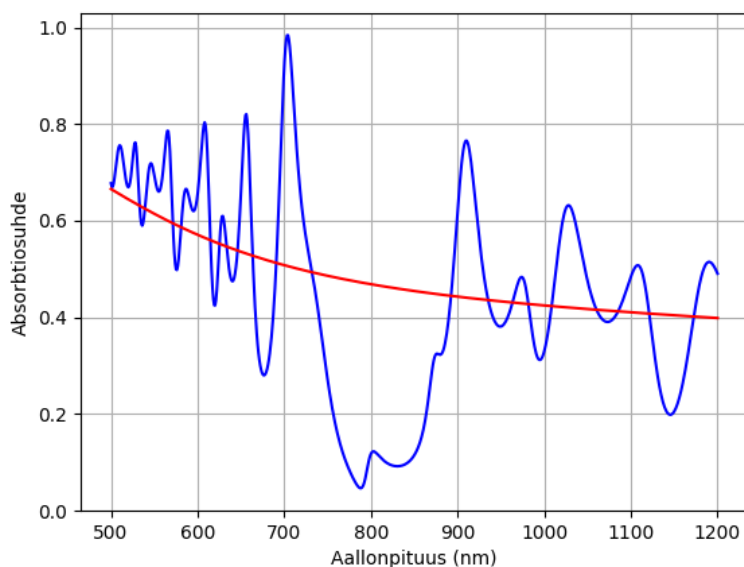
Mikroaviteetti on laite, jolla voidaan vangita valoa ja muuttaa sen tajuutta [20]. Sen toiminta perustuu laiteen sisällä tapahtuvaan valon vahvistavaan interferenssiin [21]. Ne ovat erityisen hyödyllisiä optoelektronikassa, koska niillä voidaan kaventaa valodiodien (LED) spektriviivaa sekä niiden emittoivan valon intensiteettiä voidaan kasvattaa ja suunnata paremmin [22].

LEDien lisäksi optoelektronikassa mikroaviteetteja sisällytetään valokennoihin parantamaan niiden tehokkuutta [21]. Valokennot ovat antureita, joilla havaitaan valoa. Näiden sisällä on materiaalia, joka absorboi valoa, ja osa tästä energiasta muuntuu sähköenergiaksi [23].

Yksinkertaisin mikroaviteetti on niin sanottu Fabry-Pérot mikroaviteetti, joka koostuu kahdesta vastakkaisesta peilistä [22]. Peilit ovat yleensä Braggin peilejä tai puoliläpinäkyviä metallisia peilejä [20].

Simuloidaan TM-polarisoituneen koherentin valon etenemistä valokennossa, johon on sisällytetty Fabry-Pérot mikroaviteetti, Pythonin tmm-moduulilla. Mikroaviteetti valokenno koostuu ensiksi yhdestä Braggin peilistä, jossa on 10 paria vuorottelevia 105 nm ja 87 nm paksuisia kerroksia, joiden taitekertoimet ovat 1,9 ja 2,3. Jälkimmäinen Braggin peili koostuu 10 parista vuorottelevia 56 nm ja 45 nm paksuista kerroksista, joiden taitekertoimet ovat 3,1 ja 3,9. Peilien välissä on 117 nm paksuinen kerros, jonka taitekerroin on  $1,7+0,5i$ , jossa  $i$  on imaginaariyksikkö. taitekertoimen imaginaariosa kuvaa aineen absorptiokykyä [11].

Mikroaviteetti valokenno absorboi osan valosta, jolloin materiaalille pätee  $R + T < 1$ . Valon aallonpituudesta riippuva absorptiosuhde  $A(\lambda)$  voidaan laskea kaavalla



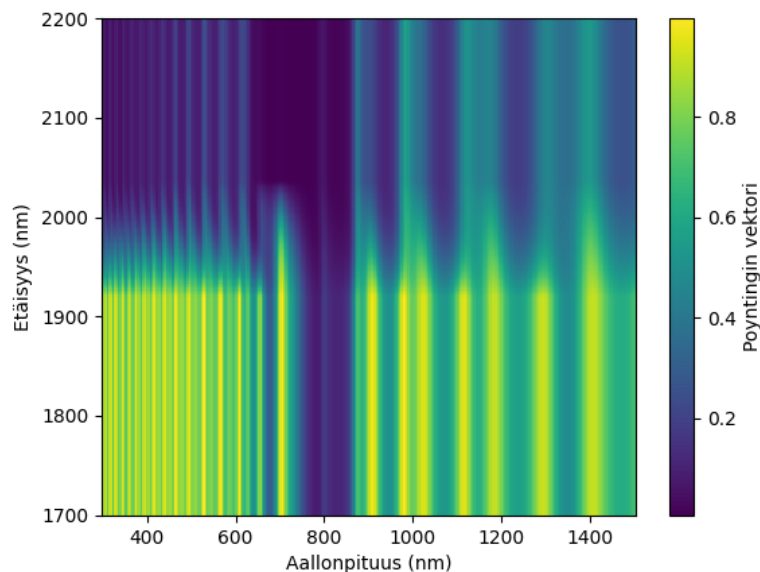
Kuva 7. Absorbtiosuhteen kuvaaja aallonpituuden suhteen tulokulman ollessa  $0^\circ$ . Sininen käyrä kuvaa mikrokaviteetti valokennon absorbtiosuhdetta ja punainen käyrä kuvaa absorboivan aineen absorbtiosuhdetta ilman mikrokaviteettia. Mikrokaviteetti valokenno koostuu kahdesta Braggin peilistä ja niiden välissä olevasta absorboivasta aineesta. Mikrokaviteetin resonanssiaallonpituus on 700 nm. Tällä aallonpituudella suurin osa tulevasta valosta absorboituu.

[24]:

$$A(\lambda) = 1 - T(\lambda) - R(\lambda). \quad (48)$$

Pythonin tmm-moduulilla mitataan mikrokaviteetti valokennon heijastussuhde ja läpäisyssuhde aallonpituuden suhteen ja kaavalla (48) lasketaan sen absorbtiosuhde. Lisäksi mitataan absorptiosuhde, kun Braggin peilit poistetaan ja valo etenee pelkästään samassa valoa absorboivassa aineessa.

Kuvassa 7 sininen käyrä esittää mikrokaviteetti valokennon absorbtiosuhdetta ja punainen käyrä esittää yksittäisen absorboivan kerroksen absorbtiosuhdetta, kun saapuvan valon tulokulma on  $0^\circ$ . Kuvaajasta havaitaan, että mikrokaviteetti lisää valon absorboitumista tietyillä aallonpituuksilla. Merkittävin absorboitumispiikki on aallonpituudella 700 nm, jossa lähes kaikki valo absorboituu. Kuvaajasta myös havaitaan ensimmäisen Braggin peilin pysäytyskaista, joka kuuluu aallonpituusalueelle 750 – 900 nm. Tällä alueella suurin osa valosta heijastuu ensimmäisestä Braggin



Kuva 8. Lämpökartta rajapinnan normaalin poyntingin vektorin suuruudesta etäisyyden ja aallonpituuden suhteen. Sähkökenttä on esitetty yksiköissä, missä tuleva sähkökenttä on  $|E| = 1$  [16]. Valon interferenssi on vahvasta, kun Poyntingin vektorin suuruus on lähellä arvoa yksi. Kuvaajasta nähdään 700 nm aallonpituuden kuuluvan jälkimmäisen Braggin peilin pysäytyskaistalle, jolloin valo heijastuu kahden Braggin peilin välissä voimakkaimmin juuri tällä aallonpituudella.

peilistä.

Tutkitaan vielä poyntingin vektorin rajapinnan suuntaista suuruutta aiemman mikrokaviteetti valokennon sisällä Pythonin tmm-moduulilla. Kuvassa 8 on poyntingin vektorin suuruus aallonpituuden ja etäisyyden suhteen. Tässä etäisyys on etäisyys mikrokaviteetin alusta. Ensimmäinen Braggin peili päättyy 1920 nm etäisyydellä ja toinen Braggin peili alkaa 2037 nm etäisyydellä. Koska Braggin peilien resonanssiaallonpituudet eivät ole samat (ensimmäisellä 800 nm ja toisella 700 nm), niiden pysäytyskaistat ovat eri aallonpituusalueella. Tämä saa aikaan ensimmäisen peilin sisällä vahvistavan interferenssin 700 nm aallonpituudella, mikä ei läpäise toista peiliä, jolloin valo jää pidemmäksi aikaa kahden Braggin peilin väliin, jossa valo vahvistuu entisestään interferenssin takia. Mikrokaviteetin resonanssiaallonpituudella 700 nm valo siis heijastuu voimakkaimmin kahden Braggin peilin välissä, jolloin suurin osa valosta absorboituu materiaaliin.

### 3 Johtopäätökset

Luvussa 1 ratkaistiin Maxwellin yhtälöt siirtomatriisimenetelmällä. Menetelmässä aluksi johdettiin Maxwellin yhtälöistä kaavoissa (11) ja (13) esitetyt sähkömagneettisen taso-aallon reunaehdot kahden aineen rajapinnalla. Näitä ehtoja käyttäen johdettiin kaavoissa (23), (24), (29) ja (30) esitetyt Fresnelin yhtälöt, jotka kuvaavat sähkömagneettisen säteilyn heijastumista ja läpäisemistä kahteen aineen rajapinnalla. Lopuksi johdettiin reunaehtoja käyttäen kaavassa (46) esitetty siirtomatriisiyhtälö, joka kuvaa valon heijastumista ja läpäisemistä monikerroksisesta aineesta, joka on isotrooppinen, lineaarinen ja homogeeninen.

Luvussa 2 kuvailtiin lyhyesti ohutkalvon, Braggin peilin ja mikrokaviteetin toimintaperiaatteita ja mahdollisia käyttökohteita. Lisäksi valon etenemistä simuloitiin näissä Pythonin tmm-moduulilla, joka perustuu siirtomatriisimenetelmään.

Yksittäisen ohutkalvon simulaatiossa tuloksista havaittiin, että lasin päällystäminen ohutkalvolla vähentää sen heijastumista tietyillä aallonpituusalueilla merkittävästi riippuen ohutkalvon taitekertoimesta ja paksuudesta.

Braggin peilin simulaatiossa mitattiin peilin heijastussuhde aallonpituuden ja tuloikulman suhteen. Tuloksista laskettiin peilin pysäytyskaistan leveys, joka laskettiin myös teoreettisesti. Arvot olivat lähes samat keskenään, joten voidaan olettaa, että simulaatio antaa tarkkoja tuloksia.

Mikrokaviteetin simulaatiossa mitattiin absorbtiosuhdetta aallonpituuden suhteen mikrokaviteetti valokennolle, joka koostuu kahdesta Braggin peilistä ja niiden välissä olevasta absorboivasta aineesta. Lisäksi mitattiin mikrokaviteetti valokennon sisällä olevan normaalin suuntaisen poyntingin vektorin suuruutta. Tuloksista nähtiin, että mikrokaviteetilla voidaan lisätä valon absorboitumista merkittävästi tietyillä aallonpituuksilla.

Siirtomatriisimenetelmällä voidaan helposti ja tarkasti simuloida valon etenemistä yksittäisestä ohutkalvosta monimutkaisempiin optisiin laitteisiin, jotka koostuvat

monesta ohuesta kerroksesta. On kuitenkin huomioitava, että materiaalin taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta ja tässä työssä kerroksien taitekerroimet olivat vakiot, jolloin simulaatiotulokset eivät vastaa tarkasti todellisuutta [18]. Lisäksi, kun siirtomatriisimenetelmää sovelletaan todellisiin materiaaleihin, on otettava huomioon, että materiaalit saattavat olla anisotrooppisia tai rajapinnat voivat johtaa sähköä, jolloin valon simulointi siirtomatriisimenetelmällä näissä aineissa on huomattavasti haastellisempaa, mutta se on silti mahdollista [8, 9].

## Viitteet

- [1] M. M. Shabat, H. J. El-Khozondar, A. A. AlShembari ja R. J. El-Khozondar, *Modern Physics Letters B* **32**, 1850346 (2018).
- [2] W. Li, *IEEE journal of quantum electronics* **46**, 970 (2010).
- [3] X. Wang, C. Yin, Z. Cao, X. Wang, C. Yin ja Z. Cao, *Progress in Planar Optical Waveguides* 17 (2016).
- [4] T. G. Mackay ja A. Lakhtakia, *The transfer-matrix method in electromagnetics and optics* (Springer Nature, 2022).
- [5] T. Zhan, X. Shi, Y. Dai, X. Liu ja J. Zi, *Journal of Physics: Condensed Matter* **25**, 215301 (2013).
- [6] A. Benamira ja S. Pattanaik, kirjassa *Computer Graphics International Conference*, Springer (PUBLISHER, 2020), pp. 83–95.
- [7] F. Abeles, *JOSA* **47**, 473 (1957).
- [8] S. Teitler ja B. Henvis, *JOSA* **60**, 830 (1970).
- [9] S. Khorasani ja B. Rashidian, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **4**, 251 (2002).
- [10] C. C. Katsidis ja D. I. Siapkas, *Applied optics* **41**, 3978 (2002).
- [11] E. Hecht, *Optics* (Pearson, 2017).
- [12] U. Hohenester, *Nano and Quantum Optics* (Springer, 2020).
- [13] Z. H. Mohammed, kirjassa *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing (PUBLISHER, 2019), No. 3, p. 032026.
- [14] O. Stenzel *et al.*, *The physics of thin film optical spectra* (Springer, 2015).
- [15] R. Rojas, G. Fuster ja V. Slüsarenko, *European journal of physics* **32**, 761 (2011).
- [16] S. Byrnes, tmm: Transfer Matrix Method for Multilayer Thin Films, 2020, version 0.1.8.
- [17] S. Horsley, J.-H. Wu, M. Artoni ja G. La Rocca, *American Journal of Physics* **82**, 206 (2014).
- [18] Y. Du, B.-S. Chen, J.-J. Lin, H.-W. Tseng, Y.-L. Wu ja C.-F. Yang, *Modern Physics Letters B* **35**, 2140001 (2021).
- [19] S. Guldin ja S. Guldin, *Inorganic Nanoarchitectures by Organic Self-Assembly* 117 (2013).



- [20] H. Becker, S. Burns, N. Tessler ja R. Friend, *Journal of Applied Physics* **81**, 2825 (1997).
- [21] Y. Long, *Journal of Modern Optics* **57**, 2092 (2010).
- [22] D. P. Puzzo, M. G. Helander, P. G. O'Brien, Z. Wang, N. Soheilnia, N. Kherani, Z. Lu ja G. A. Ozin, *Nano letters* **11**, 1457 (2011).
- [23] G. Pace, A. Grimoldi, M. Sampietro, D. Natali ja M. Caironi, *Semiconductor Science and Technology* **30**, 104006 (2015).
- [24] M. Furchi, A. Urich, A. Pospischil, G. Lilley, K. Unterrainer, H. Detz, P. Klang, A. M. Andrews, W. Schrenk, G. Strasser *et al.*, *Nano letters* **12**, 2773 (2012).