



Resurssi-kuluttaja -malli ja sen makrotaloudellinen sovellutus

Matti Pihlava

Pro gradu -tutkielma

Maaliskuu 2009

MATEMATIIKAN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Matemaattinen mallintaminen	3
2.1	Yksinkertaiset reaktiot	3
2.1.1	Yhden molekyylin reaktio	3
2.1.2	Kahden molekyylin reaktio	5
2.2	Reaktioverkostot	6
3	Mallien analysointi	9
3.1	Rata-analyysi	9
3.2	Aika-akselien erottaminen	15
3.3	Ratkaisujen käyttäytyminen	21
4	Resurssi-kuluttaja -malli	29
4.1	Mallin perusmuoto	29
4.2	Gausen laajennettu resurssi-kuluttaja -malli	32
4.3	Lotkan ja Volterran peto-saalis -malli	34
4.4	Hollingin funktionaalivasteet	35
5	Makrotaloudellinen malli	40
5.1	Oletukset	40
5.2	Malli	41
5.3	Klassinen malli	46
5.4	Moderni malli	51
6	Yhteenveto	55
	Kirjallisuutta	57

1 Johdanto

Matematiikkaa on käytetty varsinkin luonnontieteissä pitkään mallintamaan havaittuja syy - seuraus -suhteita. Varsinkin fysiikassa laaditaan usein tieteellisten havaintojen perusteella malleja, joista saatuja laskennallisia tuloksia ja mitattuja havaintoja vertaamalla voidaan tarkistaa matemaattisen mallin sopivuus. Fysikaalisten tieteiden kehitys on edesauttanut sekä matematiikan teorian, että matemaattisen mallintamisen kehitystä.

Myös muut tieteenalat ryhtyivät 1900 -luvulla matemaattisesti mallintamaan omien alojensa ilmiöitä, tunnetuimpana taloustieteet. Tällöin myös matematiikassa ryhdyttiin kehittämään formaalia tapaa ja suoranaisia menetelmiä mallintamiseen.

Koska yleisesti pyritään mallintamaan reaktioita, niin tällöin päädytään malleissa dynaamisiin malleihin ja yhtälöihin. Mallit jakautuvat luonteensa mukaisesti diskreetteihin ja jatkuviin. Diskreetit mallit palautuvat teoreettisesti rekursioyhtälöihin ja jatkuvat mallit vastaavasti differentiaaliyhtälöihin.

Tässä tutkielmassa perehdytään jatkuviin malleihin ja niiden muodostamiseen. Tällöin matemaattinen teoria palautuu differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälöryhmien teoriaan ja tuloksiin. Aiempi tietous näistä osaluista auttaa ymmärtämään tuloksia, muttei ole välttämätöntä. Tutkielmassa esitetään tarvittavat tieteelliset tulokset mallien tulkitsemiseen ja tarkastelemiseen, mutta kaikkia tarvittavia tuloksia ei todisteta. Tutkielman pääpaino on johdatuksessa mallintamiseen, jolloin jotkut teoreettiset todistukset on jätetty pois aiheettomina.

Tutkielmassa erityisesti perehdytään resurssi-kuluttaja -malliin ja sen käyttäytymiseen. Mallin 'luonteen' selvittyä, tätä sovelletaan taloustieteelliseen malliin. Kuten edellä, aiempi tuntemus taloustieteistä antaa paremman käsityksen tutkielman tuloksista, muttei ole välttämätöntä.

Tutkielmassa on pyritty luomaan helposti luettava johdanto matemaattiseen mallintamiseen. Tarvittavat aputulokset esitetään, mutta tutkielman pääpaino on tarkoituksella jätetty malleihin, niiden tutkimiseen, mallien tutkimisesta saatujen tuloksien analysointiin ja tulkitsemiseen.

Tutkielman lopussa todetaan joitakin taloustieteellisiä lainalaisuuksia resurssi-

kuluttaja -mallin sovellutusta tarkastelemalla. Tarkoituksena on esittää uusi tapa tarkastella taloudellisia malleja ja tarjota uusi menetelmä jatkotarkasteluja varten.

2 Matemaattinen mallintaminen

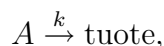
Tässä luvussa selvennetään matemaattista mallintamista. Ensin tutustutaan yksinkertaisempiin malleihin ja edetään sitä kautta monimutkaisempiin malleihin.

2.1 Yksinkertaiset reaktiot

Tarkoituksena on mallintaa jotain systeemiä. Tarkasteltava systeemi voi olla melkein mikä vain. Yleensä systeemissä on useampi toisiinsa reagoiva asia, aine tai olio. Näiden keskinäiset riippuvuudet ja muutokset ovat juuri tarkastelujen kohteena. Tässä luvussa aloitetaan tarkastelut yksinkertaisimmasta systeemistä eli kahden asian keskinäisestä reagoimisesta. Tarkastellaan aluksi erästä kemiallista reaktiota ja sen reaktioyhtälöä.

2.1.1 Yhden molekyylin reaktio

Esimerkki 2.1. Olkoon A yksittäinen molekyyli. Tällöin



missä k on reaktionopeus. Määritellään seuraavaksi funktio $A(t)$, joka esittää aineen A määrää ajan funktiona. Voidaan olettaa, että funktio on reaaliarvoinen ja differentioituva. Edelleen, edellä esitetty reaktioyhtälö voidaan myös esittää differentiaaliyhtälönä, jolloin

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad A(0) = A_0,$$

missä $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ ja $A_0 \in \mathbb{R}$. Tämän ratkaisu on tunnetusti

$$A(t) = A_0 e^{-kt}.$$

Usein differentiaaliyhtälöitä käytetään mallintamaan yleistä dynamiikkaa. Tässä yhteydessä termiä "yleistä dynamiikkaa" käytetään kuvaamaan koko systeemin toimintaa. Näin ei tarkastella yksittäistä hetkeä tai tapahtumaa, mikä tosin saadaan haluttaessa ratkaistua differentiaaliyhtälöstä. Tämä on yleistä esimerkiksi kemiassa ja fysiikassa. Koska systeemi muuttuu koko

ajan voidaan se ratkaista vain tietyllä hetkellä tai tietyssä tilassa. Tällöin myös yleensä koko systeemin tutkiminen on mielekkäämpää kuin yksittäisen tapauksen tutkiminen.

Jotta edellä esitetyn kokeellisen mallin tulos voitaisiin yleistää, täytyisi aineen määrä A olla riittävän suuri ja molekyylien reagointi olla riippumattonta toisista molekyyleistä. Aina tämä ei toteudu, mutta mallina tämä on käytökelpoinen tulos.

Tarkastellaan seuraavaksi ns. *massavaikutuksen lakia*. Olkoon A suuri määrä samanlaisia mutta toisistaan riippumattomia reagoivia molekyyliä.

$$\begin{aligned} P & \text{ (} A \text{ reagoi/aikayksikkö)} \\ &= \frac{\text{reagoivien } A \text{ -molekyylien lukumäärä/aikayksikkö}}{\text{kokonaismäärä } A \text{ -molekyyliä}} \\ &= \frac{-\frac{d(AV)}{dt}}{AV} = -\frac{d \ln A}{dt} = k, \end{aligned}$$

missä termi V on reaktiopaikan tilavuus. Tuloksessa nojataan matematiikan Suurten Lukujen lakiin käsitellessä reagoivaa ainetta kokonaisuutena. Näin voidaan näyttää kokeellisten tulosten mallintamisen yhteys ja muoto.

Reaktiovakio k myös antaa reagoinnille ajallisen määreen. Todennäköisyyslaskennasta tiedetään, että reaktioiden odotusaika T (siis reaktioiden välinen aika) on eksponentiaalisesti jakautunut. Tämän odotusajan tiheysfunktio on tällöin

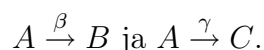
$$\varphi(T) = ke^{-kT}, \quad T > 0,$$

ja tämän odotusarvo, eli odotusajan odotusarvo, on

$$E(T) = \int_0^{\infty} T\varphi(T)dT = \frac{1}{k}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi mallia, joka koostuu useammasta yksinkertaisesta reaktiosta.

Esimerkki 2.2. Olkoon tarkasteltavat reaktiot seuraavanlaiset



Näistä kahdesta reaktiosta saadaan nyt kolme differentiaaliyhtälöä, eli ainei-

den A , B ja C määrille.

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\beta A - \gamma A \\ \frac{dB}{dt} = \beta A \\ \frac{dC}{dt} = \gamma A \end{cases}$$

Ensimmäisen differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$A(t) = A(0)e^{-(\beta+\gamma)t}.$$

Kun tämä ratkaisu sijoitetaan toiseen yhtälöön, saadaan toisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$B(t) = B(0) + \frac{\beta}{\beta + \gamma} A(0)(1 - e^{-(\beta+\gamma)t}).$$

Vastaavasti saadaan viimeisen yhtälön ratkaisu

$$C(t) = C(0) + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} A(0)(1 - e^{-(\beta+\gamma)t}).$$

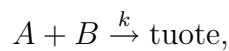
Huomattavaa on, että aineiden kokonaismäärät ovat tasapainossa

$$\frac{d(A + B + C)}{dt} = 0 \text{ ja}$$

$$A(t) + B(t) + C(t) = A(0) + B(0) + C(0).$$

2.1.2 Kahden molekyylin reaktio

Olkoon nyt kaksi reagoivaa ainetta, A ja B .



missä k on reaktionopeus. Oletetaan, että kyseistä reaktiota vastaa differentiaaliyhtälöt

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -kAB, A(0) = A_0 \\ \frac{dB}{dt} = -kAB, B(0) = B_0, \end{cases}$$

missä $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$, $A_0 \in \mathbb{R}$ ja $B_0 \in \mathbb{R}$. Edellisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisu kun $t > 0$ on

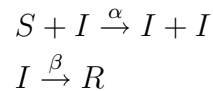
$$\begin{cases} A(t) = A_0 e^{-k B_0 t} \frac{A_0 - B_0}{A_0 e^{-k B_0 t} - B_0 e^{-k A_0 t}} \\ B(t) = B_0 e^{-k A_0 t} \frac{A_0 - B_0}{A_0 e^{-k B_0 t} - B_0 e^{-k A_0 t}}. \end{cases}$$

Edelleen täytyy olettaa, että reagoivia aineita on määrällisesti paljon ja että aineiden ainesosat reagoivat riippumattomasti toisistaan. Tällöin sekä massavaikutuksen laki että suurten lukujen laki ovat voimassa ja kyseinen mallintaminen on mielekästä.

2.2 Reaktioverkostot

Nyt tarkastellaan edellä esitettyjen reaktioiden yhdistelmiä ja sekoituksia, jolloin mallit monimutkaistuvat huomattavasti.

Esimerkki 2.3. Tarkastellaan ensin tunnettua ns. 'SIR -mallia'. Malli liittyy infektioautien mallintamiseen. Mallissa termi S (susceptible) kuvaa taudille alttiita henkilöitä, termi I (infected) kuvaa tautiin sairastuneita ja termi R (recovered/removed) taudista parantumista. Mallin reaktiot ovat



Kyseisiä reaktioita vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat nyt muotoa

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI & , S(0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = -\alpha SI + 2\alpha SI - \beta I & , I(0) = I_0 \\ \frac{dR}{dt} = \beta I & , R(0) = R_0 \end{array} \right. ,$$

joka yksinkertaistuu muotoon

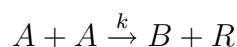
$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI & , S(0) = S_0 \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I & , I(0) = I_0 \\ \frac{dR}{dt} = \beta I & , R(0) = R_0 \end{array} \right. .$$

Tarkastellaan taas seuraavaksi reaktiota:



Ongelmana on termin A kerroin reaktiota esittävässä differentiaaliyhtälössä.

Lause 2.4. Reaktiota



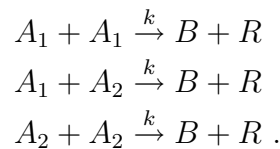
vastaavat differentiaaliyhtälöt ovat

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -kA^2 \\ \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}kA^2 \\ \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}kA^2 . \end{cases}$$

Todistus. Koska nyt ei varmasti tiedetä termin A kerrointa, niin asetetaan se joksikin positiiviseksi vakioksi. Olkoon tämä c . Nyt

$$\frac{dA}{dt} = -cA^2 . \quad (2)$$

Jaetaan termi A nyt kahteen eri termiin, eli $A = A_1 + A_2$. Jotta reaktiomme olisivat tasapainossa, saadaan reaktioiksi



Nyt saadaan differentiaaliyhtälöiksi

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= -cA_1^2 - kA_1A_2 \\ \frac{dA_2}{dt} &= -kA_1A_2 - cA_2^2 . \end{aligned} \quad (3)$$

Koska $A = A_1 + A_2$, saadaan kaavasta (2)

$$\begin{aligned} \frac{d(A_1+A_2)}{dt} &= -c(A_1 + A_2)^2 \\ &= -cA_1^2 - 2cA_1A_2 - cA_2^2 , \end{aligned}$$

ja kaavasta (3) vastaavasti

$$\frac{d(A_1 + A_2)}{dt} = -cA_1^2 - 2kA_1A_2 - cA_2^2 .$$

Kahden edellisen yhtälön nojalla $c = k$. Täten oikeat differentiaaliyhtälöt ovat

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -kA^2 \\ \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}kA^2 \\ \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}kA^2 . \quad \square \end{cases}$$

Jos $B = A$, niin

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -kA^2 + \frac{1}{2}kA^2 = -\frac{1}{2}kA^2 \\ \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}kA^2, \end{cases}$$

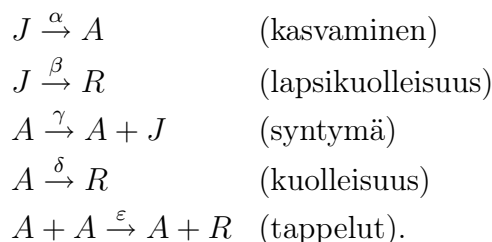
ja samalla tämä on reaktiota (1) vastaava differentiaaliyhtälöryhmä.

Huomautus 2.5. Reaktion (1) differentiaaliyhtälöryhmän (joka juuri johdettiin) ratkaisu on

$$\begin{cases} A(t) = \frac{A_0}{1 + \frac{1}{2}kA_0t} \\ R(t) = R(0) + [A(0) - A(t)]. \end{cases}$$

Tarkastellaan vielä yhtä esimerkkiä siitä kuinka malleja rakennetaan.

Esimerkki 2.6. Malli on yksinkertainen populaatiomalli. Mallissa termi J (juvenile) esittää lasta, termi A (adult) esittää aikuista ja termi R (removed) kuollutta. Mallin reaktiot:



Luonnollisesti on monta erilaista tapaa mallintaa populaatiota. Esimerkiksi syntymiseen liittyvä reaktio voidaan mallintaa eri tavalla. Myös keskinäiset kamppailut voidaan lisätä malliin jotta se olisi todenmukaisempi.

Mallia vastaava differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -(\alpha + \beta)J + \gamma A \\ \frac{dA}{dt} = \alpha J - \delta A - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 \\ \frac{dR}{dt} = \beta J + \delta A + \frac{1}{2}\varepsilon A^2. \end{cases}$$

3 Mallien analysointi

Mallien differentiaaliyhtälöryhmiä analysoidaan usein kvalitatiivisesti, jotta mallin kokonaisvaltainen käyttäytyminen ratkeaisi. Tähän on monta erilaista tapaa ja menetelmää. Tässä kappaleessa pyritään esittämään näistä yleisimmät.

3.1 Rata-analyysi

Esimerkki 3.1. Tarkastellaan uudestaan ns. 'SIR -mallia', jota tarkasteltiin esimerkissä 2.3. Tutkitaan nyt kuitenkin mallista redusoitua tapausta. Koska termi R on vaikutukseltaan pieni ja se ei esiinny muuttujien S ja I differentiaaliyhtälöissä, niin se joskus poistetaan tarkasteluista. Differentiaaliyhtälöryhmä on nyt

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I . \end{cases}$$

Yritetään selvittää ratkaisujen muoto (S, I) -tasossa.

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha SI - \beta I}{-\alpha SI} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S} . \quad (4)$$

Puolittain integroimalla saadaan

$$I = -S + \frac{\beta}{\alpha} \ln S + C ,$$

missä C on integroimisvakio.

Tarkastellaan seuraavaksi edellä saadun ratkaisun rajakäyttäytymistä ja derivaattoja. Nyt

$$\lim_{S \rightarrow 0} I = -\infty , \text{ ja } \lim_{S \rightarrow \infty} I = -\infty .$$

Kun tarkastellaan systeemin käyttäytymistä, on derivaatan etumerkillä suuri merkitys, koska sen muutoskohdissa ratkaisuradan suunta muuttuu. Kaavasta (4) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\beta}{\alpha S} &> 0 , \text{ jos } 0 < S < \frac{\beta}{\alpha} \\ &= 0 , \text{ jos } S = \frac{\beta}{\alpha} \\ &< 0 , \text{ jos } S > \frac{\beta}{\alpha} . \end{aligned}$$

Tarkastellaan vielä toista derivaattaa.

$$\frac{d^2 I}{dS^2} = -\frac{\beta}{\alpha S^2} < 0$$

Funktio on konkaavi ja tällöin voidaan todeta, että ratkaisujen maksimi on kohdassa $S = \frac{\beta}{\alpha}$.

Alkuperäisistä differentiaaliyhtälöistä huomataan vielä, että

$$\frac{dS}{dt} < 0,$$

ja

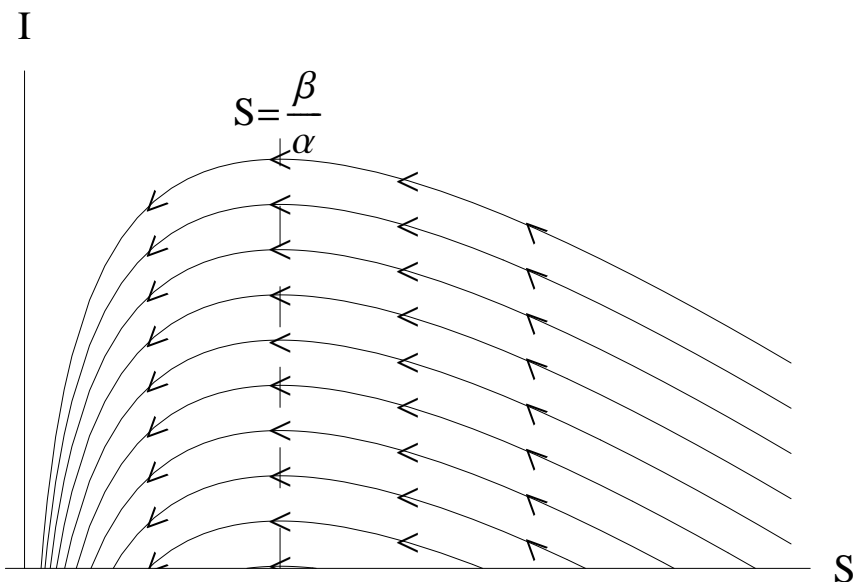
$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &> 0, \text{ jos } S > \frac{\beta}{\alpha} \\ &= 0, \text{ jos } S = \frac{\beta}{\alpha} \\ &< 0, \text{ jos } 0 < S < \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Kun nämä kaikki tulokset yhdistetään, voidaan systeemistä tehdä kuvio, joka esittää sekä mahdollisia ratkaisuratoja että derivaattojen ilmoittamat muutossuunnat (kuva 1). Näin saadaan jo melko paljon tietoa siitä, miten systeemi toimii. Integroimisvakio C määrää mikä ratkaisuparven käyrä on kyseessä. Lähtöpisteestä riippuen muuttujan I arvo joko ensin kasvaa ja sitten vähenee tai suoraan vähenee. Muuttuja S vähenee aina. Maksimi on aina kohdassa $S = \frac{\beta}{\alpha}$, jolloin $I = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha} + C$.

Kuvion ja tarkastelujen perusteella voidaan päätellä vähän systeemin dynamiikasta. Jos lähtöpisteessä $S > \frac{\beta}{\alpha}$, muuttuja I kasvaa maksimiinsa ja tämän jälkeen vähenee ja poistuu. Tälle on luonnollinen tulkinta: jos taudille alttiita henkilöitä on tarkasteltavassa joukossa yli tietyn kynnyksen, niin tällöin tauti leviää ja sairastuneiden määrä kasvaa. Kasvu jatkuu niin kauan kuin joukossa on taudille alttiita henkilöitä. Kaikki taudille alttiit henkilöt eivät välttämättä altistu taudille lainkaan, ja koska taudille jo altistuneet henkilöt alkavat parantua taudista, niin taudille sairastuneiden määrä luonnollisesti vähenee.

Huomautus 3.2. Edellisessä esimerkissä esitetty tapa käyttää ratkaisukäyrien ratoja ja derivaattojen merkkejä systeemin toiminnan ratkaisemiseksi kutsutaan *rata-analyysiksi*.

Kuva 1: Esimerkin ratkaisuratoja sekä niiden muutossuunnat.



Derivaatat ja osittaisderivaatat kertovat systeemin muutoksista, muutosten voimakkuuksista ja muutosten vaihteluista. Systeemi ei kuitenkaan aina muutu vaan siinä voi olla pisteitä tai alueita joissa muutosta ei ole, eli ns. kiintopisteitä.

Määritelmä 3.3. Vakioratkaisu $x(t) = \bar{x}$ on systeemin $\dot{x} = f(x)$ *tasapainoratkaisu*, jos $f(\bar{x}) = 0$, missä $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vakio, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin ja $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva. Pistettä \bar{x} kutsutaan *tasapainopisteeksi*.

Usein tärkeämpää kuin varsinaisen tarkan ratkaisun määrääminen on systeemin luonteen tutkiminen. Esimerkiksi halutaan tietää, mitä tapahtuu kun $t \rightarrow \infty$, suppeneeko systeemi kohti jotain ratkaisua, kasvavatko arvot rajatta, heilahtelevatko systeemin arvot jne. Hakeutuuko systeemi tasapainopisteeseen, pysyykö se siellä vai poistuuko se sieltä? Stabiliateettianalyysi vastaa näihin kysymyksiin.

Systeemin tasapainopisteet ovat kolmea eri tyyppiä sen mukaan, miten ratkaisu käyttäytyy tasapainopisteen ympäristössä.

1. Jos ratkaisu jostain tasapainopisteen ympäristöstä aina hakeutuu tasapainopisteeseen, sanotaan, että tasapainopiste on *asymptoottisesti stabiili*.
2. Jos ratkaisu jostain tasapainopisteen ympäristöstä hakeutuu annettuun mielivaltaiseen tasapainopisteen ympäristöön ja pysyy siinä, sanotaan että tasapainopiste on *stabiili*.
3. Muissa tapauksissa tasapainopiste on *epästabiili*.

Tarkka määritelmä esitetään seuraavaksi.

Määritelmä 3.4. Olkoon piste \hat{x} systeemin $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste. Jos mielivaltaista annettua lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta > 0$ niin, että systeemin ratkaisu $x(t)$, joka toteuttaa ehdon

$$d(x(0), \hat{x}) < \delta ,$$

toteuttaa myös ehdon

$$d(x(t), \hat{x}) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 ,$$

niin tasapainopiste \hat{x} on stabiili. Toisaalta jos tasapainopiste on stabiili ja on olemassa $\gamma > 0$ jolle jokainen ratkaisu $x(t)$, joka toteuttaa ehdon

$$d(x(0), \hat{x}) < \gamma ,$$

toteuttaa myös

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x} ,$$

niin tasapainopiste \hat{x} on asymptoottisesti stabiili.

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan ratkaisujen stabiilisuutta. Niille pätee sama luokittelu kuin tasapainopisteille.

Määritelmä 3.5. Olkoon $x = \phi(t)$ mikä hyvänsä yhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu. Ratkaisu $\phi(t)$ on *stabiili*, jos annetulle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta_\varepsilon > 0$, että millä hyvänsä toisella ratkaisulla $\psi(t)$, joka toteuttaa ehdon $\|\phi(0) - \psi(0)\| < \delta_\varepsilon$, on $\|\phi(t) - \psi(t)\| < \varepsilon$ aina kun $t > 0$. Jos ratkaisu ei ole stabiili, niin se on *epästabiili*.

Määritelmä 3.6. Ratkaisu $x = \phi(t)$ on *asymptoottisesti stabiili*, jos se on stabiili ja jos on olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että jos $\|\phi(0) - \psi(0)\| < \beta$, niin $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0$. Jos $\beta = \infty$, ratkaisu on *globaalisti asymptoottisesti stabiili*.

Esimerkki 3.7. Palataan esimerkkiin 3.1. Nyt saadaan systeemin tasapainopisteiksi

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI = 0 \Leftrightarrow S = 0 \text{ tai } I = 0$$

ja

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I = 0 \Leftrightarrow S = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ainoa ratkaisu yhtälöryhmälle on $I = 0$ ja tällöin koko S -akseli on tasapainopiste. Tällöin

1. Jos $0 < S \leq \frac{\beta}{\alpha}$ ja

- $I = 0$, on kyseessä stabiili tasapainopiste.
- $I > 0$, systeemi seuraa ratkaisurataa takaisin S -akselille ja stabiiliin tasapainopisteeseen.

2. Jos $S > \frac{\beta}{\alpha}$ ja

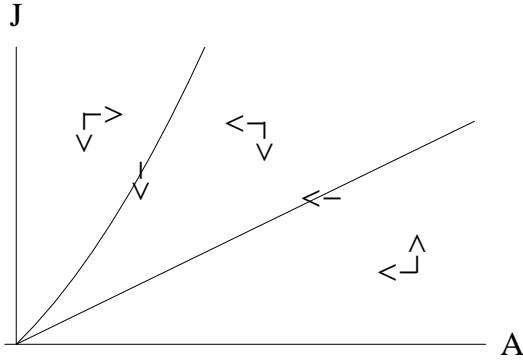
- $I > 0$, systeemi seuraa ratkaisurataa maksimin kautta takaisin S -akselille stabiiliin tasapainopisteeseen.
- $I = 0$, on kyseessä epästabiili tasapainopiste, jolloin systeemi pysyy S -akselilla. Jos termi I muuttuu edes vähän, systeemi seuraa ratkaisurataa maksimin kautta takaisin S -akselille stabiiliin tasapainopisteeseen.

Huomattavaa on, että kyseessä on vain stabiili eikä asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

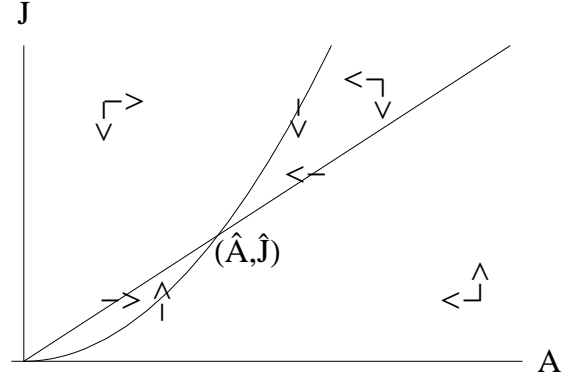
Tarkastellaan vielä toista esimerkkiä siitä, miten mallien dynamiikkaa tutkitaan.

Esimerkki 3.8. Palataan esimerkkiin 2.6. Koska muuttujat J ja A eivät riipu muuttujasta R , voidaan mallissa jättää tämä huomioimatta ja redusoida

Kuva 2: a)



b)



malli niin, että poistetaan termi R . Jäljelle jää

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = -(\alpha + \beta)J + \gamma A \\ \frac{dA}{dt} = \alpha J - \delta A - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 \end{cases}$$

Suoritetaan mallille samanlainen rata-analyysi kuin edellä. Jos asetetaan $\frac{dJ}{dt} = 0$, saadaan ratkaisuksi $J = \frac{\gamma}{\alpha + \beta} A$. Vastaavasti asettamalla $\frac{dA}{dt} = 0$ saadaan $J = \frac{1}{\alpha} A(\delta + \frac{\varepsilon}{2} A)$.

Kun $\frac{dJ}{dt} = 0$, isokliinin kulmakerroin origon läheisyydessä on $\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$. Vastaavasti kun $\frac{dA}{dt} = 0$, isokliinin kulmakerroin origon läheisyydessä on

$$\lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{dJ}{dt} \right) \Big|_{(\frac{dA}{dt})=0} = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Nyt päädytään kahteen tapaukseen: jos edellä mainitut käyrät leikkaavat (eli $0 < \frac{\delta}{\alpha} < \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$) tai eivät leikkaa toisiaan (jolloin $0 < \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \leq \frac{\delta}{\alpha}$).

a) Jos $0 < \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \leq \frac{\delta}{\alpha}$, eli käyrät eivät leikkaa toisiaan. Kun edellisiin kuviin lisätään derivaattojen merkit (mitkä selviävät nollakohdan laskemisen lausekkeista), päädytään kuvan 2 a) tilanteeseen.

Kaikki mahdolliset radat päätyvät käyrien väliseen alueeseen ja pysyvät siellä. Kaikki käyrien välissä olevat radat lopulta päätyvät origoon.

Jos $0 < \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \leq \frac{\delta}{\alpha}$, niin origo on globaalisti asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.

b) Jos $0 < \frac{\delta}{\alpha} < \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, eli käyrät leikkaavat toisensa. Merkitään käyrien leikkauspistettä (\hat{A}, \hat{J}) . Nyt systeemillä on kaksi tasapainopistettä: toinen on origo ja toinen piste (\hat{A}, \hat{J}) . Tällöin päädytään kuvan 2 b) tilanteeseen.

Kaikki radat päätyvät lopulta käyrien välisiin alueisiin ja pysyvät siellä. Kaikki käyrien välissä olevat radat päätyvät pisteeseen (\hat{A}, \hat{J}) .

Jos $0 < \frac{\delta}{\alpha} < \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, niin origo on epästabiili tasapainopiste ja piste (\hat{A}, \hat{J}) on globaalisti asympotoottisesti stabiili tasapainopiste.

Esimerkin molemmissa tapauksissa systeemillä on globaalisti asympotoottisesti stabiili tasapainopiste. Vain tapauksessa $0 < \frac{\delta}{\alpha} < \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ tasapainopiste on epätriviaali.

Kuten edellinen esimerkki osoittaa, systeemin differentiaaliyhtälöryhmää ei tarvitse välttämättä ratkaista. Jo pelkällä rata-analyysillä saadaan usein riittävästi tietoa systeemin toiminnasta. Huomattavaa on, että kaikissa tapauksissa differentiaaliyhtälöryhmä ei ratkea eksplisiittisesti, jolloin rata-analyysi on tällöin ainoa työkalu selvittää systeemin toimintaa.

Usein pelkillä yksinkertaisilla reaktioilla saadaan jo huomattavan monimutkaisia differentiaaliyhtälöryhmiä, joita on hankalaa tai jopa mahdotonta käsitellä analyttisesti. Esitetään seuraavaksi tapa, jolla saadaan yksinkertaistettua systeemejä.

3.2 Aika-akselien erottaminen

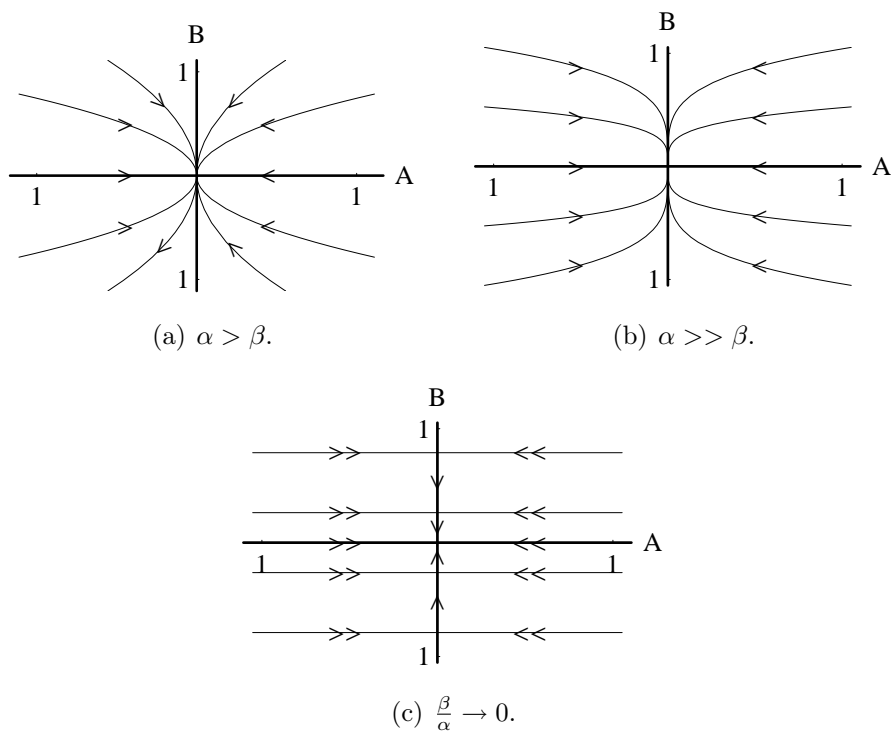
Esimerkki 3.9. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\alpha A & , \alpha > 0 \\ \frac{dB}{dt} = -\beta A & , \beta > 0 . \end{cases}$$

Oletetaan, että $\alpha > \beta$. Mallin ratkaisuun ei nyt käydä yksityiskohtaisesti vaan tarkastellaan suoraan rata-analyysiä.

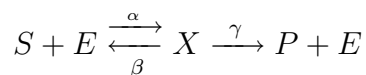
Jos nyt $\alpha > \beta$, mutta silti $\alpha \approx \beta$, niin päädytään kuvan 3(a) tilanteeseen. Oletetaan seuraavaksi, että $\alpha \gg \beta$, eli että α on paljon suurempi kuin β . Nyt päädytään kuvan 3(b) tilanteeseen. Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, kun $\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0$, jolloin päädytään kuvan 3(c) tilanteeseen.

Kuva 3: Esimerkin radat (A, B) -tasossa.



Kuten kuvista ilmenee, vakioiden keskinäisellä suhteella on suurikin merkitys systeemin toimintaan. Usein jo vakioiden merkitys kertoo niiden keskinäisistä suhteista. Eli vakioiden suuruudella on ajallinen merkitys. Toiset vakiot ovat 'ajallisesti nopeampia' kuin toiset. Vakiot sinänsä eivät ole 'nopeita' tai 'hitaita', mutta niiden suuruus vaikuttaa niihin liittyvien prosessien nopeuteen.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan seuraavaksi systeemiä, joka kuvaa entsyymien kinematiikkaa eli kemiallisten reaktioiden muutoksia käytetyn ja vapautuneen energian eri tasoilla. Reaktiot ovat nyt



sekä niitä vastaava differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SE + \beta X \\ \frac{dE}{dt} = -\alpha SE + (\beta + \gamma)X \\ \frac{dX}{dt} = +\alpha SE - (\beta + \gamma)X \\ \frac{dP}{dt} = \gamma X . \end{cases}$$

Systemin perustana olevan mallin pohjalta voidaan huomata

$$\begin{aligned} S_0 &:= S + X + P \quad \forall t \quad (\text{vakio}) \\ E_0 &:= E + X \quad \forall t \quad (\text{vakio}). \end{aligned}$$

Nyt systeemi redusoituu muotoon

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha SE + \beta(E_0 - E) \\ \frac{dE}{dt} = -\alpha SE + (\beta + \gamma)(E_0 - E) . \end{cases}$$

Edellisen differentiaaliyhtälöparin nollakohdista saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0 &\Leftrightarrow E = \frac{\beta E_0}{\alpha S + \beta} \\ \frac{dE}{dt} = 0 &\Leftrightarrow E = \frac{(\beta + \gamma)E_0}{\alpha S + \beta + \gamma} . \end{aligned}$$

Nyt päädytään kuvan 4 tilanteeseen.

Systemillä on vain yksi tasapainopiste $(0, E_0)$, johon kaikki radat päätyvät.

Olkoon nyt $S(0) = S_0$ ja $E(0) = E_0$. Mallista johtuen yleensä $S_0 \gg E_0$ ja täten myös $S(t) \gg E(t)$. Kirjoitetaan edellä saatu redusoitu systeemi toiseen muotoon

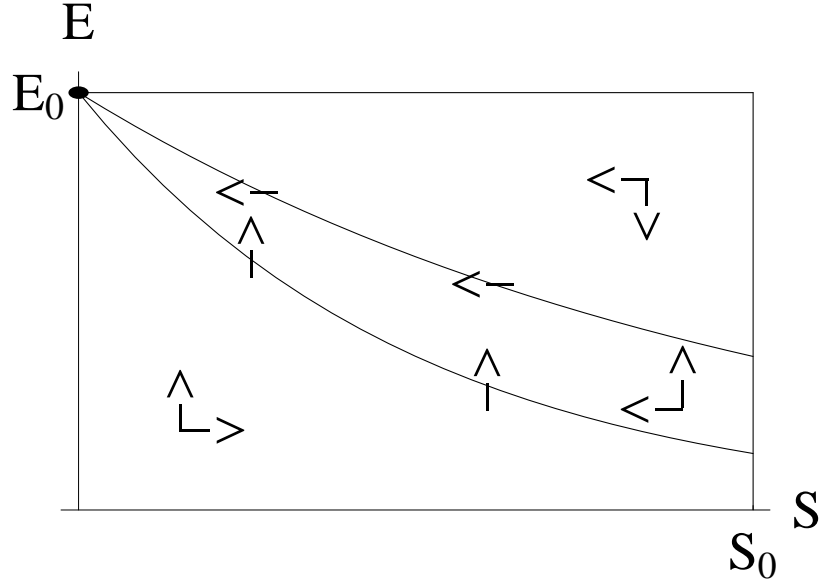
$$\begin{cases} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\alpha E + \beta \frac{E_0 - E}{S} \\ \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\alpha S + (\beta + \gamma) \frac{E_0 - E}{E} . \end{cases}$$

Edellisestä muodosta ja termien S ja E keskinäisistä suuruuksista johtuen edellisen muodon ensimmäinen yhtälö on 'pieni' tai 'hidas', ja toinen yhtälö on 'iso' tai 'nopea'.

Määritellään seuraavaksi muunnokset

$$\varepsilon := \frac{E_0}{S_0} , S^* := \frac{S}{S_0} , E^* := \frac{E}{E_0} , \alpha^* := \alpha S_0 .$$

Kuva 4: Esimerkin tasapainoradat.



Huomattavaa on, että edellä määritelty ε on suuruudeltaan pieni. Nyt käyttäen kyseisiä muunnoksia, systeemin redusoitu muoto saa muodon

$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt} = -\varepsilon\alpha^* S^* E^* + \varepsilon\beta(1 - E^*) \\ \frac{dE^*}{dt} = -\alpha^* S^* E^* + (\beta + \gamma)(1 - E^*) . \end{cases}$$

Nyt ensimmäinen yhtälö on 'hidas' ja jälkimmäinen yhtälö on 'nopea'.

Jos nyt annetaan muuttujan ε lähestyä arvoa nolla (huom. muuttujan määrittely), saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt} = 0 \\ \frac{dE^*}{dt} = -\alpha^* S^* E^* + (\beta + \gamma)(1 - E^*) . \end{cases}$$

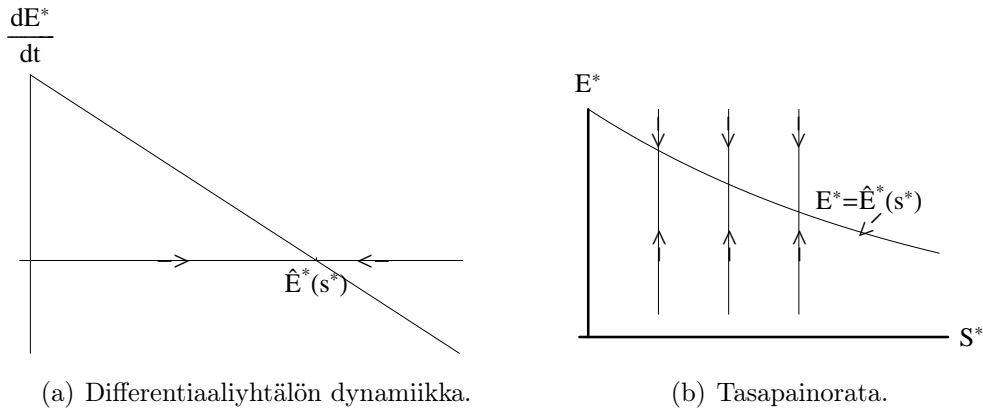
Edellä todettiin, että ensimmäinen yhtälö oli 'hidas' ja nyt muunnoksen kautta voidaan siis tarkastella 'lyhyen aikavälin tapahtumia' tai 'nopeita tapahtumia'. Tarkastelun kohteeksi tulee siis jälkimmäinen differentiaaliyhtälö, joka on tavallinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Koska kiinnostuksen kohteena on systeemin dynamiikka, niin tarvitsemme vain tasapaino-

teen, jota merkitään nyt termillä \tilde{E}^* .

$$\frac{dE^*}{dt} = 0 \Leftrightarrow \tilde{E}^*(S^*) = \frac{\beta + \gamma}{\alpha^* S^* + \beta + \gamma}$$

Nyt saadaan myös differentiaaliyhtälön dynamiikkaa kuvattua graafisesti (kuva 5(a)), mistä käy myös ilmi tasapainopiste \hat{E}^* . Kuvassa 5(b) on esitettyä graafisesti koko mallin lyhyen aikavälin dynamiikkaa.

Kuva 5: Esimerkin lyhyen aikavälin tarkastelut.



(a) Differentiaaliyhtälön dynamiikka.

(b) Tasapainorata.

Edellä tarkasteltiin 'lyhyen aikavälin tapahtumia' tai 'nopeita tapahtumia', jolloin voidaan puhua 'nopeasta ajasta'. Määritellään seuraavaksi 'hidas aika', eli $t^* := \varepsilon t$. Nyt esimerkiksi $\frac{dS^*}{dt^*} = \frac{dS^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{dS^*}{dt} \frac{1}{\varepsilon}$. Systemi saa silloin muodon

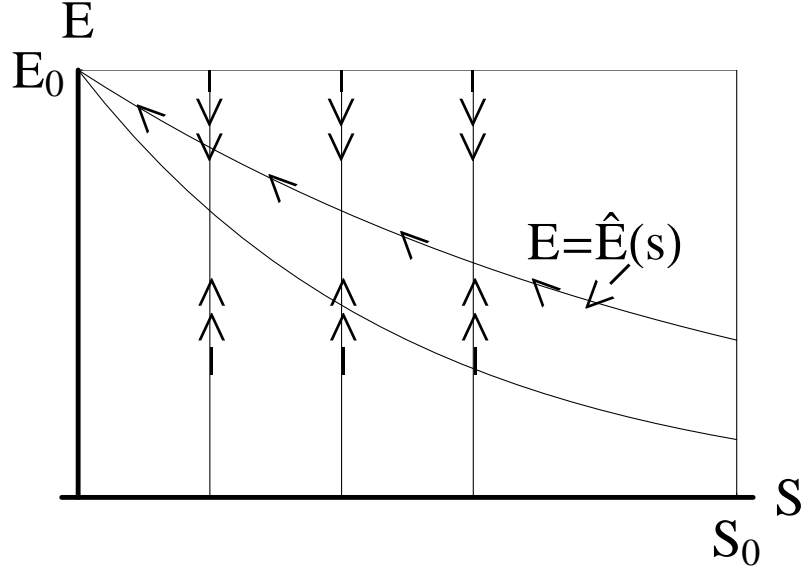
$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt^*} = -\alpha^* S^* E^* + \beta(1 - E^*) \\ \varepsilon \frac{dE^*}{dt^*} = -\alpha^* S^* E^* + (\beta + \gamma)(1 - E^*) \end{cases},$$

jolloin termi ε häviää ensimmäisestä yhtälöstä. Annetaan taas muuttujan ε lähestyä arvoa nolla, jolloin saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt^*} = -\alpha^* S^* E^* + \beta(1 - E^*) \\ 0 = -\alpha^* S^* E^* + (\beta + \gamma)(1 - E^*) \end{cases}.$$

Nyt siis tarkastellaan 'pitkän aikavälin tapahtumia' tai 'hitaita tapahtumia'. Kun jälkimmäinen yhtälö ratkaistaan, saadaan jo edellä saatu yhtäsuuruus

Kuva 6: Esimerkin tasapainoradat.



tasapainopisteelle \tilde{E}^* . Kun sijoitetaan ensimmäiseen yhtälöön $E^* = \tilde{E}^*$, saadaan

$$\frac{dS^*}{dt^*} = -\frac{-\gamma S^*}{\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + S^*}.$$

Palataan lopuksi tarkastelemaan alkuperäisiä muuttujia ja sitä, mitä niille tapahtuu. 'Nopeassa ajassa'

$$E \rightarrow \tilde{E}(s) = \frac{(\beta + \gamma)E_0}{\alpha S + \beta + \gamma},$$

ja 'hitaassa ajassa' noudatetaan differentiaaliyhtälöä

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\gamma E_0 S}{\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + S}.$$

Huomattavaa on, että näiden muunnosten tuomat lisähavainnot systeemin käyttäytymiseen pätevät vain silloin kun $S \gg E$, kuten oletettiin. Eli lähellä tasapainopistettä $(0, E_0)$ palataan alkuperäisiin tarkasteluihin. Tämä on esitetty graafisesti kuvassa 6.

3.3 Ratkaisujen käyttäytyminen

Tarkastellaan tasapainopisteiden ja ratkaisujen stabiilisuutta sekä hieman helpompaa tapaa luokitella stabiilisuuden laatu. Ensin tarvitaan seuraava aputuloks. Lineaarisen systeemin

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(0) = x_0 \quad ,$$

missä $x \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ratkaisu on tunnetusti

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad , \quad t \geq 0 \quad ,$$

missä

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad ,$$

joka suppenee kaikilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Lause 3.11. Olkoon edellä esitetyn systeemin matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n toisistaan poikkeavaa ominaisarvoa $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sekä niitä vastaavat ominaisvektorit $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}^n$. Tällöin edellä esitetyn systeemin ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$x(t) = \beta_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + \dots + \beta_n e^{\lambda_n t} b_n \quad ,$$

tietyillä arvoilla $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$.

Todistus. Valitaan arvot $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$ siten, että $x_0 = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$, mikä on mahdollista, koska tunnetusti kertoimet b_1, \dots, b_n muodostavat algebrallisen kannan avaruudessa \mathbb{C}^n . Kun $x(t)$ on kuten väitteessä, niin $x(0) = 0$ ja

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \lambda_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + \dots + \lambda_n \beta_n e^{\lambda_n t} b_n \\ &= \beta_1 e^{\lambda_1 t} A b_1 + \dots + \beta_n e^{\lambda_n t} A b_n \\ &= A (\beta_1 e^{\lambda_1 t} b_1 + \dots + \beta_n e^{\lambda_n t} b_n) \\ &= A x(t) \quad . \quad \square \end{aligned}$$

Lause 3.12. Olkoon edellä esitetyn lineaarisen systeemin matriisin A ominaisarvot λ_i , $i = 1, \dots, n$. Tasapainoratkaisu $x(t) \equiv 0$ on

1. (globaalisti) asymptoottisesti stabiili, jos $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall i$,
2. epästabiili, jos $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ jollain i ,
3. stabiili, jos $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ ja jos $\lambda_j = i\delta_j$ kertalukua k_j , niin löydetään k_j lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoria. Muuten tasapainoratkaisu $x(t) \equiv 0$ on epästabiili.

Lemma 3.13. Jos $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall i$ ja $-\gamma = \max\{\operatorname{Re} \lambda_i\}$, niin kaikilla arvoilla $-\alpha$, $-\gamma < -\alpha < 0$, on olemassa sellainen $K > 0$, että

$$|(e^{At})_{ij}| \leq K e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Todistus. Olkoon $x^i(t)$ kertalukua i oleva yleistetty ominaisvektori ja $x(t)$ näiden lineaarikombinaatio. Nyt

$$x^i(t) = e^{\lambda_i t} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda_i I)^j \cdot v^i \quad \text{ja} \quad x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t).$$

Nyt saadaan ratkaisun e^{At} mielivaltaiselle alkiolle muoto

$(e^{At})_{ij} = \sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t)$, missä $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ ja $q_i(t)$ on polynomi. Näin saadaan

$$\begin{aligned} |(e^{At})_{ij}| &\leq \sum_i \underbrace{\frac{|e^{\lambda_i t}|}{|e^{-\alpha_i t}|} |\cos \beta_i t + i \sin \beta_i t|}_{=1} |q_i(t)| \\ &= \sum_i e^{-\alpha_i t} |q_i(t)| \\ &\leq K e^{-\alpha t} \quad \square \end{aligned}$$

Todistetaan nyt lemmän 3.13 avulla edellinen lause 3.12

Todistus. Todistetaan lauseen eri kohdat yksitellen.

1. Valitaan $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Yhtälön $\dot{x} = Ax$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $\psi(t) = e^{At} \psi_0$ eli $\psi_i(t) = \sum_{j=1}^n (e^{At})_{ij} \psi_j^0$. Koska on

voimassa

$$\begin{aligned}
 |\psi_i(t)| &\leq \sum_{j=1}^n |(e^{At})_{ij}| |\psi_j^0| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n K e^{-\alpha t} |\psi_j^0| \quad (\text{vrt. lemma 3.13}) \\
 &= K e^{-\alpha t} \sum_{j=1}^n |\psi_j^0| \\
 &\leq K e^{-\alpha t} n \|\psi(0)\| \quad \forall i,
 \end{aligned}$$

niin edelleen saadaan

$$\begin{aligned}
 \|\psi(t)\| &= \max\{|\psi_1(t)|, \dots, |\psi_n(t)|\} \\
 &\leq n K e^{-\alpha t} \|\psi(0)\| \\
 &\leq n K \|\psi(0)\|.
 \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Silloin $\|\psi(t) - 0\| < \varepsilon$, jos $\|\psi(0) - 0\| < \frac{\varepsilon}{nK} = \delta_\varepsilon$. Näin ollen $x(t) \equiv 0$ on stabiili. Lisäksi $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\psi(t)\| = 0$ kaikilla arvoilla $\|\psi(0)\|$. Tällöin $x(t) \equiv 0$ on globaalisti asympotoottisesti stabiili.

2. Olkoon λ sellainen matriisin A ominaisarvo, jolla on positiivinen reaaliosa, ja olkoon v sitä vastaava ominaisvektori. Silloin $\psi(t) = C e^{\lambda t} v$ on ratkaisu. Jos λ on reaalinen, niin myös v on reaalinen ja $\|\psi(t)\| = |C| e^{\lambda t} \|v\|$. Selvästi $\|\psi(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$ ($\forall C \neq 0$). Näin ollen $x(t) \equiv 0$ on epästabiili.

Jos $\lambda = \alpha + i\beta$, niin $v = v^1 + i v^2$ ja yksinkertainen ratkaisu

$$C e^{(\alpha+i\beta)t} (v^1 + i v^2) = \psi^1(t) + i \psi^2(t) \quad (\text{kompleksinen ratkaisu})$$

$$\psi^1(t) = C e^{\alpha t} (v^1 \cos \beta t - v^2 \sin \beta t) \quad (\text{reaalinen ratkaisu})$$

Nyt $v^1 \neq 0$ ja $v^2 \neq 0$, joten $\|\psi^1(t)\| \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$.

(koska $\|\psi^1(t)\| = \max\{|\psi_1^1(t)|, \dots, |\psi_n^1(t)|\} \geq D e^{\alpha t}$)

Siis $x(t) \equiv 0$ on epästabiili.

3. Jos matriisilla A on k_j lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria jokaiselle ominaisarvolle $\lambda_j = i\delta_j$, jonka kertaluku on k_j , niin voidaan

osoittaa että on olemassa sellainen $K > 0$, jolla

$$|(e^{At})_{ij}| \leq K \text{ (vrt. lemma 3.13, } q_i(t) = D_i).$$

Tällöin $\|\psi(t)\| \leq nK \|\psi(0)\|$ jokaiselle ratkaisulle $\psi(t)$, joten ratkaisu $x(t) \equiv 0$ on stabiili.

Jos lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita on vähemmän kuin k_j , niin ratkaisut ovat muotoa $\psi(t) = Ce^{i\delta_j t}[v + t(A - i\delta_j I)v]$, missä $(A - i\delta_j I)v \neq \bar{0}$. Jos $\delta_j = 0$, niin $\psi(t) = C(v + tAv)$ ja tämä on rajoittamaton, kun $t \rightarrow \infty \forall C \neq 0$. Tällöin ratkaisu $x(t) \equiv 0$ on epästabiili.

Jos $\delta_j \neq 0$, niin $\psi(t) = \psi^1(t) + i\psi^2(t)$, missä

$$\psi^1(t) = (I + tA)v \cos \delta_j t + \delta_j t v \sin \delta_j t.$$

Ratkaisu $\psi^1(t)$ on rajoittamaton, kun $t \rightarrow \infty$, ja ratkaisu $x(t) \equiv 0$ on epästabiili. \square

Lause 3.14. Yhtälön $\dot{x} = Ax$ kaikki ratkaisut ovat stabiileja, jos $x(t) \equiv 0$ on stabiili. Vastaava tulos pätee asymptoottisesti stabiileille ja epästabiileille ratkaisuille.

Määritelmä 3.15. Olkoon $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ja $w^j = u^j + iv^j$ yleistetty ominaisvektori (jos $\beta_j = 0$, niin $v^j = \bar{0}$). Tällöin

$$B = \left\{ \underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{reaaliset, k kpl}}, \underbrace{u^{k+1}, v^{k+1}, \dots, u^m, v^m}_{\text{kompleksiset, n-k kpl}} \right\}$$

on avaruuden \mathbb{R}^n kanta. Nyt tasapainopisteen $x \equiv 0$ *stabiili aliavaruus* on $E^S = L\{u^j, v^j \mid \alpha_j < 0\}$, *epästabiili aliavaruus* $E^U = L\{u^j, v^j \mid \alpha_j > 0\}$ ja *keskusaliavaruus* $E^C = L\{u^j, v^j \mid \alpha_j = 0\}$. Voidaan osoittaa, että $E^S \oplus E^U \oplus E^C = \mathbb{R}^n$ (suora summa).

Määritelmä 3.16. Tasapainopiste $x \equiv 0$ on *hyperbolinen*, jos $E^C = \emptyset$ eli $\text{Re } \lambda_i \neq 0 \forall i$, *nielu*, jos $E^S = \mathbb{R}^n$ eli $\text{Re } \lambda_i < 0 \forall i$ ja *lähde*, jos $E^U = \mathbb{R}^n$ eli $\text{Re } \lambda_i > 0 \forall i$. Tasapainopiste $x \equiv 0$ on *satulapiste*, jos se on hyperbolinen ($E^C = \emptyset$), vähintään yhdellä ominaisarvolla on positiivinen reaaliosa ($E^U \neq \emptyset$) ja vähintään yhdellä ominaisarvolla on negatiivinen reaaliosa ($E^S \neq \emptyset$). Lineaarinen systeemi $\dot{x} = Ax$ on *yksinkertainen*, jos $\det A \neq 0$ ja $\lambda_i \neq 0 \forall i$.

Lause 3.12 ja edellinen määritelmä antavat käyttökelpoisemman tavan tutkia systeemin tasapainopisteiden ja ratkaisujen laatua verrattuna alkupe-
räisiin määritelmiin (vrt. määritelmät 3.4,3.5 ja 3.6).

Edelliset tulokset eivät välttämättä päde kaikkiin systeemeihin. Seuraava tu-
los auttaa niissä.

Määritelmä 3.17. Olkoon $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ systeemin $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste
($f(\bar{x}) = 0$). Lineaarinen systeemi $\dot{x} = Df(\bar{x}) \cdot x$ ($Df(\bar{x})$ on *Jacobin* matriisi
pisteessä \bar{x}) on systeemin $\dot{x} = f(x)$ *linearisointi pisteessä* \bar{x} .

Määritelmä 3.18. Epälineaarisen systeemin $\dot{x} = f(x)$ tasapainopiste \bar{x}
on *yksinkertainen*, jos linearisoitu systeemi $\dot{x} = Df(\bar{x})x$ on yksinkertainen
($\det Df(\bar{x}) \neq 0$ ja $\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0 \forall i$).

Lause 3.19 (*Grobmanin ja Hartmanin linearisointilause*). Oletetaan et-
tä $E \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $f \in C^1(E)$. Olkoon $\bar{x} \in E$ systeemin $\dot{x} = f(x)$ yksinker-
tainen tasapainopiste. Tällöin on olemassa sellaiset pisteen \bar{x} ympäristöt U
ja V sekä homeomorfismi $h : U \rightarrow V$, joka muuntaa systeemin $\dot{x} = f(x)$ ra-
dat (kunhan pysytään ympäristössä U) linearisoidun systeemin $\dot{x} = Df(\bar{x})x$
radoiksi suunnat säilyttäen. Sanotaan, että systeemit ovat *topologisesti tai*
kvalitatiivisesti ekvivalentit.

Huomautus 3.20. Edellinen tulos on lokaali tulos.

Huomautus 3.21. Edellisen lauseen nojalla epälineaarisen systeemin ta-
sapainopisteiden stabiilisuuden laadun tarkistus palaa linearisoidun syste-
emin ja sitä kautta lineaarisen systeemin tasapainopisteiden stabiilisuuden laa-
dun tarkastamiseen. Tosin, jos epälineaarisen systeemin tasapainopisteessä
lasketun kerroinmatriisin ominaisarvoista jokin saa arvon nolla, täytyy kek-
siä jokin muunnos (esimerkiksi koordinaatistomuunnos) stabiilisuuden tar-
kastamiseen.

Siirrytään tarkastelemaan ratkaisujen käyttäytymistä rajoitetummassa
tarkastelujoukossa \mathbb{R}^2 .

Määritelmä 3.22. Olkoon $x = \phi(t)$ yhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisu. Olete-
taan, että on olemassa sellainen positiivinen luku T , että $\phi(t + T) = \phi(t)$
 $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin $\phi(t)$ on *jaksollinen ratkaisu*, jonka jakso on T .

Huomautus 3.23. Jos ratkaisun $\phi(t)$ jakso on T , niin sillä on myös jaksot $2T, 3T, \dots$. Oletetaan T pienimmäksi jaksoksi.

Lemma 3.24. Jaksollista ratkaisua vastaa *sulkeutuva rata* vaiheavaruudessa ja päinvastoin. Voidaan puhua myös *syklistä*.

Lause 3.25 (Bendixon). Oletetaan, että $E \subset \mathbb{R}^2$ on avoin ja yhdesti yhtenäinen alue. Olkoon $f \in C^1(E)$. Systeemillä $\dot{x} = f(x)$ on sulkeutuva rata alueessa E vain, jos $\operatorname{div} f$ vaihtaa merkkiä alueessa E tai jos $\operatorname{div} f \equiv 0$ alueessa E .

Todistus. Olkoon Γ sulkeutuva rata alueessa E (vastaa jotain systeemin $\dot{x} = f(x)$ jaksollista ratkaisua) ja G tämän radan sisäosa. *Greenin lauseesta* seuraa, että

$$\begin{aligned} \iint_G \operatorname{div} f dx_1 dx_2 &= \oint_{\Gamma} (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) \quad (\text{int. vastapäivään pitkin rataa } \Gamma) \\ &= \int_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Koska integraali häviää, täytyy divergenssin (jatkuva funktio) vaihtaa merkkiä tai olla identtisesti nolla alueessa E . \square

Lause 3.26 (Dulac). Olkoon $B \in C^1(E)$, $B > 0$. Edellinen lause pätee, jos tarkastellaan divergenssiä $\operatorname{div}(Bf)$.

Edellisen lauseen funktiota B kutsutaan ns. *Dulacin funktioksi*. Tarkastellaan systeemiä $\dot{x} = f(x)$, missä $E \subset \mathbb{R}^n$ ja $f \in C^1(E)$. Olkoon $x(t) = \phi(t, x_0)$ alkuarvot tehtävän ratkaisu alkuehdolla $x(0) = x_0$.

Määritelmä 3.27. Piste $x_0 \in E$ kautta kulkeva *rata* on $\gamma(x_0) = \{x \in E \mid x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$. *Positiivinen rata* $\gamma^+(x_0)$ saadaan, kun $t \geq 0$ ja *negatiivinen rata* $\gamma^-(x_0)$, kun $t \leq 0$. Selvästi $\gamma(x_0) = \gamma^+(x_0) \cup \gamma^-(x_0)$ ja jaksolliselle ratkaisulle $\gamma^+(x_0) = \gamma^-(x_0)$.

Määritelmä 3.28. Piste $p \in E$ on radan $\gamma(x_0)$ ω -*rajapiste*, jos on olemassa sellainen jono $t_n \rightarrow \infty$, että $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_0) = p$, ja vastaavasti α -*rajapiste*, kun $t_n \rightarrow -\infty$. Radan $\gamma(x_0)$ kaikkien ω -rajapisteiden joukkoa kutsutaan ω -*rajajoukoksi* ja merkitään $\omega(x_0)$ (tai $\omega(\gamma)$). Merkintä $\alpha(x_0)$ tarkoittaa vastaavasti α -*rajajoukkoa*.

Lause 3.29. Rajajoukot $\alpha(x_0)$ ja $\omega(x_0)$ ovat suljettuja ja invariantteja. Jos positiivinen rata $\gamma^+(x_0)$ on rajoitettu, niin rajajoukko $\omega(x_0)$ on epätyhjä, yhtenäinen ja kompakti (\mathbb{R}^n : suljettu ja rajoitettu). Vastaava tulos pätee negatiiviselle radalle $\gamma^-(x_0)$ ja rajajoukolle $\alpha(x_0)$. Lisäksi $d(\gamma^+(x_0), \omega(x_0)) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. (Tässä $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$)

Seuraus 3.30. Rajajoukot $\alpha(x_0)$ ja $\omega(x_0)$ sisältävät vain täydellisiä ratoja (tasapainopiste on pistemäinen rata). Esimerkiksi rata γ ei voi päätyä sulkeutuvan radan yhteen pisteeseen, vaan se kiertää suljettua rataa koko ajan lähestyen rajapistettä.

Määritelmä 3.31. Sulkeutuva rata Γ on *rajasykli*, jos se on jonkin muun radan kuin Γ α - tai ω -rajajoukko. (Huom. ei edellytä lähestymistä molemmilta puolilta)

Lause 3.32 (*Poincarén ja Bendixonin lause*). Olkoon $E \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $f \in C^1(E)$. Oletetaan, että systeemin $\dot{x} = f(x)$ positiivinen rata $\gamma^+(x_0)$ sisältyy kompaktiin osajoukkoon $F \subset E$ (rata $\gamma^+(x_0)$ rajoitettu). Jos $\omega(x_0)$ ei sisällä tasapainopistettä, niin $\omega(x_0)$ on sulkeutuva rata (rajasykli, jos $x_0 \neq \omega(x_0)$). Vastaava tulos pätee negatiiviselle radalle $\gamma^-(x_0)$ ja rajajoukolle $\alpha(x_0)$.

Huomautus 3.33. Lauseesta 3.29 seuraa, että $\omega(x_0) \neq \emptyset$.

Lause 3.34 (*Yleistetty Poincarén ja Bendixonin lause*). Oletetaan, että edellisen lauseen oletuksien lisäksi osajoukossa F on vain äärellinen määrä tasapainopisteitä. Tällöin $\omega(x_0)$ on joko tasapainopiste, sulkeutuva rata tai tasapainopisteiden ja näiden separatriksien (satulapisteen stabiili ja epästabiili monisto) muodostama sykli.

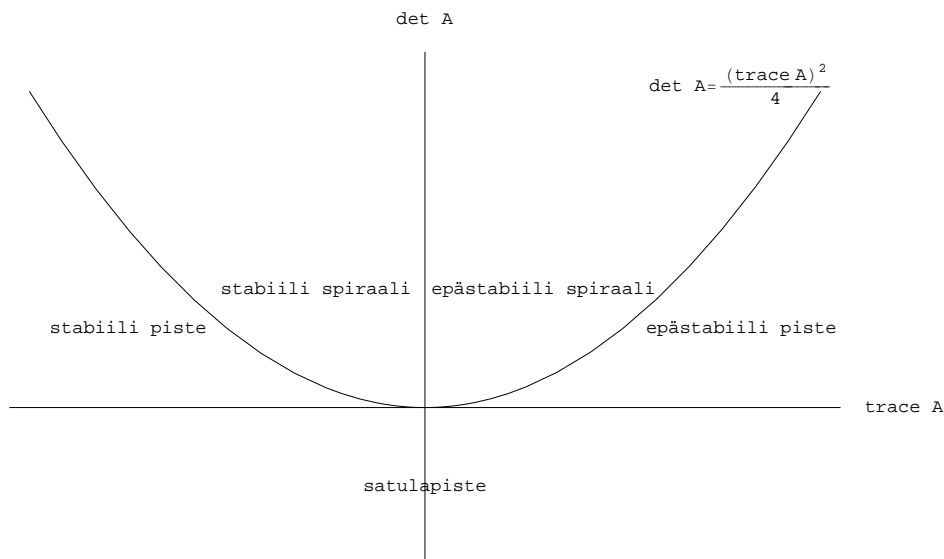
Huomautus 3.35. Avaruudessa \mathbb{R}^2 systeemin $\dot{x} = Ax$ karakteristinen yhtälö on tunnetusti

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{trace} A + \det A = 0 ,$$

missä $\operatorname{trace} A$ on matriisin A jälki. Kun nyt operoidaan avaruudessa \mathbb{R}^2 , niin

$$\operatorname{trace} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d .$$

Kuva 7: Kiintopisteiden luokittelu.



Karakteristisesta yhtälöstä saadaan ominaisarvoille kaava

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{trace } A \pm \sqrt{(\text{trace } A)^2 - 4 \det A} \right) .$$

Edellisten lausekkeiden nojalla voidaan luokitella systeemin kiintopisteet helposti matriisin A determinantin ja jäljen arvojen perusteella. Lisäksi näistä saa graafisen esityksen (kuva 7).

Kuvassa akseleilla on matriisin determinantti ja jälki. Yhtälö $\det A = \frac{(\text{trace } A)^2}{4}$ muodostaa paraabelin ylempään puolikkaaseen tasossa, joka erottaa tasapainopisteiden spiraalin luonteen tavallisista kiintopisteistä. Kun matriisin determinantti ja jälki on laskettu, muodostavat ne yhdessä koordinaattiparin tasossa jonka mukaisesti voidaan luokitella kyseinen kiintopiste.

4 Resurssi-kuluttaja -malli

Resurssi-kuluttaja -mallista esiintyy eri versioita ja johdannaisia. Tässä kapaleessa esitetään muutama näistä sekä niiden tärkeimmät ominaisuudet ja käyttäytymiset.

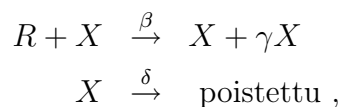
4.1 Mallin perusmuoto

Mallin perusmuoto on

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = g(R) - \beta RX & (\text{resurssi}) \\ \frac{dX}{dt} = \gamma\beta RX - \delta X & (\text{kuluttaja}), \end{cases}$$

missä funktio $g(R)$ on resurssi -termin R kasvufunktio. Huomioitavaa kyseisessä funktiossa on se, että funktio kuvaa resurssin kasvunopeutta kun mallista puuttuu kuluttaja -termi, eli $\frac{dR}{dt} = g(R)$.

Kun kasvutermi γ on luonnollinen luku, mallia esittää seuraavat yksinkertaiset reaktiot



missä sana poistettu tarkoittaa joko kuolemaa tai yleistä mallin tarkastelusta poistumista (esimerkiksi biologisissa sovellutuksissa tämä voi tarkoittaa muuttoa tarkasteltavalta alueelta).

Jos kasvutermi γ on reaalinen positiivinen luku, mallin tulkinta on hankalampaa.

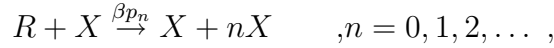
Huomautus 4.1. Joissakin sovellutuksissa kasvutermi γ tulkinna hankaluudesta johtuen kyseinen termi on skaalattu pois mallista. Tarkastellaan uusia muuttujia $Y = \frac{X}{\gamma}$ ja $\theta = \gamma\beta$. Muunnetuksi malliksi saadaan nyt

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = g(R) - \gamma\beta \cdot \frac{X}{\delta} R \\ \frac{dY}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dX}{dt} = \gamma\beta \cdot \frac{X}{\gamma} \cdot R - \frac{1}{\gamma} \cdot \delta\gamma Y , \end{cases}$$

joka yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = g(R) - \theta Y R \\ \frac{dY}{dt} = \theta Y R - \delta Y . \end{cases}$$

Yksi tapa tulkita kasvutermi γ on olettaa, että jälkeläisten lukumäärä N on satunnainen. Näin saadaan reaktioksi



missä termi $p_n = P(N = n) \geq 0$ on todennäköisyys, että yksi resurssiyksikkö tuottaa n jälkeläistä. Nyt kasvutermi γ saadaan satunnaismuuttujan N odotusarvona

$$\gamma = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n .$$

Esimerkki 4.2. Tarkastellaan perusmallin sovellutusta, jossa termi γ saa arvon $\sqrt[k]{2}-1$. Kasvutermi riippuu nyt toisesta parametrasta k , jonka oletetaan muuttuvan ajan mukana. Tällöin kasvu ei ole satunnaista, muttei myöskään varsinainen muuttuja, vaan muuttuva vakio tarkastelujen helpottamiseksi. Oletetaan vielä, että resurssi kasvaa ns. *logistisen mallin* (tai vaihtoehtoisesti *Verhulstin-Pearlin -mallin* mukaisesti). Eli

$g(R) = rR(1 - \frac{R}{K})$, missä termi $r > 0$ on populaation ns. ideaalikasvunopeus ja termi $K > 0$ on populaation ns. kantokyky. Malliksi saadaan nyt

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = rR(1 - \frac{R}{K}) - \beta R X \\ \frac{dX}{dt} = (\sqrt[k]{2} - 1)\beta R X - \delta X . \end{cases}$$

Oletetaan, että $\delta = \frac{\delta_0}{k}$ ja $k \rightarrow \infty$ jolloin tarkastellaan mallin nopeita muutoksia (huom. ei nopeaa aikaa). Tällöin saadaan

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = rR(1 - \frac{R}{K}) - \beta R X \\ \frac{dX}{dt} = 0 , \end{cases}$$

josta saadaan edelleen resurssille R kvasi-tasapainoarvo

$$R = \begin{cases} K(1 - \frac{\beta}{r} X) & , \text{ jos } 0 < X < \frac{r}{\beta} , \\ 0 & , \text{ jos } X \geq \frac{r}{\beta} . \end{cases}$$

Jos taas tarkastellaan hidasta aikaa, missä $t' = \frac{t}{k}$, saadaan

$$\frac{dX}{dt'} = \begin{cases} \beta \log 2 K(1 - \frac{\beta}{r} X) X - \delta_0 X & , \text{ jos } 0 < X < \frac{r}{\beta} , \\ -\delta_0 X & , \text{ jos } X \geq \frac{r}{\beta} . \end{cases}$$

Jos $\beta K \log 2 \leq \delta_0$, niin $\frac{dX}{dt} < 0$ kaikille $X > 0$. Mutta jos $\beta K \log 2 > \delta_0$, niin kuluttaja X käyttäytyy logistisen mallin mukaisesti. Huomattavaa on, että myös resurssi oletettiin käyttäytyvän logistisen mallin mukaisesti. Eli logistisesti kasvavasta resurssista seurasi myös logistisesti kasvava kuluttaja pitkällä aikavälillä.

4.2 Gausen laajennettu resurssi-kuluttaja -malli

Tarkastellaan seuraavaksi perusmallin laajennusta, ns. *Gausen mallia*

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = f(R) - g(R)X & \text{(resurssi)} \\ \frac{dX}{dt} = \gamma g(R)X - \delta X & \text{(kuluttaja)}. \end{cases}$$

Jos nyt valitaan funktioksi $g(R) = \beta R$, saadaan perusmalli.

Mallissa oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvasti differentioituvia. Funktiosta f oletetaan, että $f(0) = 0$ ja että on olemassa sellainen positiivinen K , että $f(R) > 0$, kun $0 < R < K$ ja $f(R) < 0$, kun $R > K$. Funktiosta g oletetaan myös, että $g(0) = 0$ ja että $g(R) > 0$, kun $0 < R < K$ ja $g(R) < 0$, kun $R > K$. Lisäksi oletetaan, että on olemassa sellainen $R_0 > 0$, että $\gamma g(R_0) = \delta$.

Mallin oletuksista seuraa, että ilman kuluttajaa X resurssilla R on globaalisti attrahoiva kiintopiste $R = K$ ja että $\gamma g(R_0) = \delta \iff \frac{dX}{dt} = 0$ ilman, että $X = 0$. Voidaan myös todeta, että funktion g monotonisuudesta seuraa, että on olemassa vain yksi $R_0 > 0$ missä $\gamma g(R_0) = \delta$. Lisäksi jos ei olisi olemassa tällaista vakiota $R_0 > 0$, niin tällöin $\gamma g(R) < \delta$ kaikille $R \geq 0$ (koska $g(0) = 0$) ja, kun $t \rightarrow \infty$, niin $X \rightarrow 0$ ja $R \rightarrow K$.

Funktiota $g(R)$ kutsutaan kuluttajan *funktionaalivasteeksi*.

Tarkastellaan seuraavaksi mallin rata-analyysiä ja kiintopisteitä.

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = 0 & \iff R = 0 \text{ tai } X = \frac{f(R)}{g(R)} \\ \frac{dX}{dt} = 0 & \iff X = 0 \text{ tai } R = R_0 \end{aligned}$$

Jatkotarkastelut jaetaan kahteen tapaukseen, kun $R_0 > K (> 0)$ ja kun $(0 <) R_0 < K$.

- Kun $R_0 > K > 0$, positiivisessa tasapainopisteessä on voimassa $R = R_0$ ja tällöin $X = \frac{f(R_0)}{g(R_0)} < 0$. Eli tämän tapauksen ainoa tasapainopiste sijaitsee triviaalissa pisteessä $(K, 0)$ (huom. voidaan todistaa että ko. triviaali tasapainopiste on globaalisti stabiili).
- Kun $0 < R_0 < K$, on systeemillä positiivinen ei-triviaali tasapainopiste pisteessä $(\hat{R}, \hat{X}) = (R_0, \frac{f(R_0)}{g(R_0)})$. Triviaalit tasapainopisteet $(0, 0)$ ja

$(K, 0)$ ovat selvästi epästabiileja.

Systeemin Jacobin matriisi pisteessä (\hat{R}, \hat{X})

$$J = \begin{pmatrix} f'(\hat{R}) - \hat{X}g'(\hat{R}) & -g(\hat{R}) \\ \gamma\hat{X}g'(\hat{R}) & \gamma g(\hat{R}) - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\hat{R}) \left[\frac{f(\hat{R})}{g(\hat{R})} \right]' & -g(\hat{R}) \\ \gamma\hat{X}g'(\hat{R}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt huomautuksen 3.35 nojalla

$$\det J = \gamma\hat{X}g'(\hat{R})g(\hat{R}) > 0,$$

ja

$$\text{trace } J = \underbrace{g(\hat{R})}_{>0} \left[\frac{f(\hat{R})}{g(\hat{R})} \right]',$$

jolloin termin $\left[\frac{f(\hat{R})}{g(\hat{R})} \right]'$ etumerkki määrää stabiilisuuden. Jos $\left[\frac{f(\hat{R})}{g(\hat{R})} \right]' < 0$, on kiintopiste stabiili, ja epästabiili jos $\left[\frac{f(\hat{R})}{g(\hat{R})} \right]' > 0$.

Olkoon nyt piste p osa positiivista rataa $\gamma^+(p)$, joka kiertää satulapisteen $(K, 0)$ kautta muodostaen suljetun alueen. Poincarén ja Bendixonin lauseen nojalla tasapainopisteen (\hat{R}, \hat{X}) ja mallin käyttäytymiselle on kolme vaihtoehtoa

1. tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) on epästabiili ja alueessa on olemassa rajasykli,
2. tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) on stabiili ja alueessa voi olla olemassa rajasykli,
3. tai rajasykliä ei ole ja tasapainopiste on tällöin globaalisti stabiili.

Huomautus 4.3. Funktioiden f ja g oletuksia tullaan tulevaisuudessa tarkasteluissa muuttamaan, mutta niitä muutetaan kuitenkin niin, että äskeiset tarkastelut vielä pätevät. Esimerkiksi, jos oletetaan, että termiä K ei ole olemassa, tai oletetaan, että funktiot f ja g ovat positiivisia (voidaan verrata tapaukseen, jossa $K \rightarrow \infty$) edelliset tarkastelut ovat voimassa positiivisen ei-triviaalin tasapainopisteen osalta pisteen R_0 olemassaolon seurauksena. Luonnollisesti tässä tapauksessa triviaalia tasapainopistettä ei ole olemassa. Jos termiä K ei ole, niin ilman kuluttajaa X resurssilla R ei aina ole olemassa globaalisti attrahoivaa kiintopistettä.

4.3 Lotkan ja Volterran peto-saalis -malli

Jatketaan seuraavaksi Gausen mallin tutkimista sen tunnetulla sovelluksella, Lotkan ja Volterran peto-saalis -mallilla. Mallissa oletetaan, että saalis eli resurssi kasvaa eksponentiaalisesti, eli $f(R) = \alpha R$. Tosin nyt Gausen mallin kaikki oletukset eivät ole voimassa koska rajoittavaa tekijää K ei tässä mallissa ole. Jos saalista eli resurssia ei ole, vähenevät pedot eli kuluttaja myös eksponentiaalisesti, eli $g(R) = \beta R$. Huomaa, että edelliseen sisältyy oletus, että petojen saalistus noudattaa massavaikutuksen lakia.

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \alpha R - \beta R X & \text{(saalis eli resurssi)} \\ \frac{dX}{dt} = \gamma \beta R X - \delta X & \text{(saalista eli kuluttaja).} \end{cases}$$

Mallia tarkasteltaessa löydetään kaksi tasapainopistettä, kuten Gausen mallista:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = 0 & \iff R = 0 \text{ tai } X := \hat{X} (= \frac{f(R)}{g(R)}) = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{dX}{dt} = 0 & \iff X = 0 \text{ tai } R := \hat{R} (= R_0) = \frac{\delta}{\gamma\beta}, \end{aligned}$$

eli triviaali $(0, 0)$ ja $(\hat{R}, \hat{X}) = (\frac{\delta}{\gamma\beta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Jacobin matriisi pisteessä (\hat{R}, \hat{X})

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} f'(\hat{R}) - \hat{X}g'(\hat{R}) & -g(\hat{R}) \\ \gamma\hat{X}g'(\hat{R}) & \gamma g(\hat{R}) - \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta\hat{X} & -\beta\hat{R} \\ \gamma\beta\hat{X} & \gamma\beta\hat{R} - \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta\hat{R} \\ \gamma\beta\hat{X} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jacobin matriisin karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 + \gamma\beta^2\hat{X}\hat{R} = \lambda^2 + \alpha\delta = 0,$$

jolloin ominaisarvot ovat $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\delta}$, eli puhtaasti imaginääriset. Nyt ominaisarvot eivät kerro mitään tasapainopisteen stabiilisuudesta, mutta koska $\text{trace } J = 0$, ei myöskään huomautus 3.35 valaise tilannetta.

Huomautus 4.4. Mallia voidaan tutkia ns. *systemin liikevakiofunktion* avulla ja saada tulos, että mallin ratkaisu koostuu äärettömän monesta suljetusta radasta ja tasapainopisteessä (\hat{R}, \hat{X}) on systemin maksimi. Tätä tarkastelua ei esitetä tässä teoksessa.

4.4 Hollingin funktionaalivasteet

Holling (1959) määritteli kolme erilaista funktionaalivastetta Gausen laajennettuun malliin. Näitä kutsutaan vastaavasti Hollingin funktionaalivasteiksi *tyyppiä I, II tai III*. Ensimmäinen funktionaalivaste on lineaarinen, esimerkiksi $g(R) = \beta R$. Tämä tapaus käsiteltiin jo Lotkan ja Volterran peto-saalis-mallissa.

Toinen funktionaalivaste on hyperbolinen

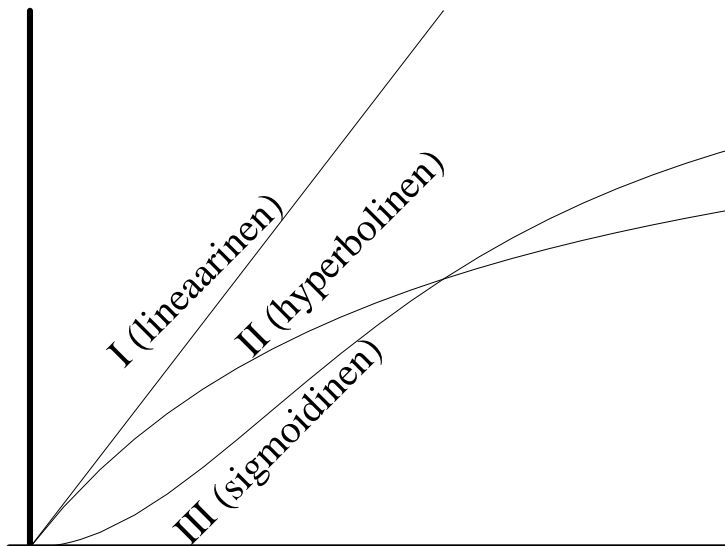
$$g(R) = \frac{\beta R}{1 + \beta T R},$$

ja kolmas on sigmoidinen

$$g(R) = \frac{\beta R^2}{1 + \beta T R^2}.$$

Molemmissa funktioissa parametri T esittää kulutukseen ja lepoon käytettävää aikaa. Siis aikaa joka kuluu itse kulutuksien välissä. Lisäksi molemmissa funktioissa parametri β kuvaa yhdessä aikayksikössä suoritettua kulutuksen määrää kulutusaikana. Funktioivasteet on esitetty graafisesti kuvassa 8.

Kuva 8: Hollingin funktionaalivasteet.



Huomautus 4.5. Hollingin funktionaalivasteet pohjautuvat biologiaan ja liittyvät havaittuun biologiseen käyttäytymiseen. Näiden funktioiden merkitykseen tai tarkoitukseen ei puututa tässä tutkimuksessa. Myöskään funktioita ei erikseen johdeta vaan käytetään näitä sellaisenaan.

Tarkastellaan seuraavaksi Gausen laajennettua mallia jossa on Hollingin tyyppiä II oleva funktionaalivaste ja resurssi kasvaa logistisen mallin mukaisesti, eli

$$f(R) = rR \left(1 - \frac{R}{K}\right) \text{ ja } g(R) = \frac{\beta R}{1 + \beta TR},$$

ja tarkasteltava malli on nyt

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = rR \left(1 - \frac{R}{K}\right) - \frac{\beta R}{1 + \beta TR} X \\ \frac{dX}{dt} = \gamma \frac{\beta R}{1 + \beta TR} X - \delta X. \end{cases}$$

Molemmat funktiot $f(R)$ ja $g(R)$ toteuttavat Gausen mallin oletukset. Jälkimmäisen funktion tapauksessa saadaan lisäehto

$$\lim_{R \rightarrow \infty} g(R) = \frac{1}{T} > \frac{\delta}{\gamma}.$$

Ratkaistaan ensin Gausen mallin termi R_0 yhtälöstä $g(R_0) = \frac{\delta}{\gamma}$ ja saadaan

$$R_0 = \frac{\delta}{\beta(\gamma - \delta T)} > 0,$$

koska juuri oletettiin, että $\frac{1}{T} > \frac{\delta}{\gamma}$.

Kuten Gausen mallin tarkasteluissa todettiin, jos $R_0 > K$, mallilla ei ole positiivista ei-triviaalia tasapainopistettä ja piste $(K, 0)$ on globaalisti stabiili.

Jos $0 < R_0 < K$, mallissa on positiivinen ei-triviaali tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) .

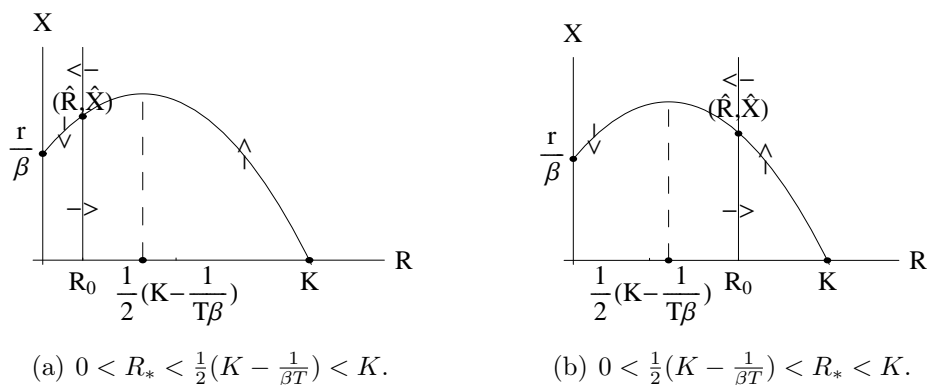
Kyseisen tasapainopisteen lokaali stabiilisuus perustui osamäärän

$$\left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' = \frac{2rT}{K} \left[\frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right) - R \right], \text{ kun } R = \hat{R},$$

etumerkkiin. Tästä saadaan lokaaliselle stabiilisuudelle ehto

- Jos $0 < R_0 < \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$, niin $\left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' > 0$ ja tällöin tasapainopiste on lokaalisti epästabiili. Lisäksi tällöin mallissa on syklinen rajajoukko joka hankaloittaa mallin tarkasteluja.

Kuva 9: Tarkasteltavan mallin lokaali stabiilisuus.



- Jos $0 < \frac{1}{2}(K - \frac{1}{\beta T}) < R_0 < K$, niin $\left[\frac{f(R)}{g(R)}\right]' < 0$ ja tällöin tasapainopiste on lokaalisti stabiili.

Kuvassa 9 on esitetty mallin lokaalisti stabiilit mahdolliset tapaukset graafisesti. Tarkastellaan tarkemmin mallin globaalia stabiilisuutta seuraavassa lauseessa.

Lause 4.6. Olkoon edellisessä mallissa nyt $\frac{1}{T} > \frac{\delta}{\gamma}$ ja $0 < \frac{1}{2}(K - \frac{1}{\beta T}) \leq R_0 < K$. Tällöin tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) on globaalisti stabiili.

Todistus. Poincarén ja Bendixonin lauseen nojalla riittävä ehto tasapainopisteen globaalille stabiilisuudelle on osoittaa, ettei mallissa voi olla sulkeutuvia ratoja (tai rajasyklejä). Tässä todistuksessa tosin poiketaan aiemmista esimerkeistä ja malleista ja todistetaan väite Dulacin lauseen avulla. Käytettävä Dulacin funktio on

$$u(R, X) = \frac{X^{\alpha-1}}{g(R)},$$

missä vakio $\alpha > 0$ määrätään myöhemmin.

Dulacin lauseen mukaisesti tarkastellaan nyt divergenssiä

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \begin{pmatrix} u \frac{dR}{dt} \\ u \frac{dX}{dt} \end{pmatrix} &= X^{\alpha-1} \left(\left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' + \alpha \left(\gamma - \frac{\delta}{g(R)} \right) \right) \\ &= \frac{X^{\alpha-1}}{R} \left(\underbrace{\frac{2rT}{K} R \left[\frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right) - R \right]}_{\text{parabolinen}} - \underbrace{\alpha \left(\frac{\delta}{\beta} - (\gamma - \delta T) R \right)}_{\text{lineaarinen}} \right). \end{aligned}$$

Yhtälön parabolinen osa (alaspäin aukeava) leikkaa R -akselin pisteissä $R = 0$ ja $R = \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$. Yhtälön lineaarinen osa leikkaa R -akselin pisteessä $R = R_0$. Pelkästään lineaarinen osa riippuu parametrimestä α , joten valitsemalla sopivasti saadaan divergenssi ei-positiiviseksi. Koska parabolinen osa on alaspäin aukeava, niin jos $R_0 > \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$, on tällöin lineaarinen osa aina parabolista osaa suurempi. Jos $R_0 = \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$, niin tällöin lineaarinen osa sivuaa parabolista osaa pisteessä $R = \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$. Kaikilla muilla muuttujan R arvoilla lineaarinen osa sijaitsee parabolisen osan yläpuolella. Tällöin on myös voimassa

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} u \frac{dR}{dt} \\ u \frac{dX}{dt} \end{pmatrix} \leq 0$$

kaikilla arvoilla (R, X) . Yhtäsuuruus on voimassa vain kun $R = R_0 = \frac{1}{2} \left(K - \frac{1}{\beta T} \right)$. Tällöin mallissa ei voi olla sulkeutuvia ratoja (tai rajasyklejä). \square

Tarkastellaan vielä mallia, jossa on Hollingin tyyppiä III oleva funktionaalivaste. Säilytetään malli muilta osin samanlaisena. Malli on nyt

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = rR \left(1 - \frac{R}{K} \right) - \frac{\beta R^2}{1 + \beta T R^2} X \\ \frac{dX}{dt} = \gamma \frac{\beta R^2}{1 + \beta T R^2} X - \delta X. \end{cases}$$

Kuten aiemmin mallissa on positiivinen tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) . Jälleen tarkastellaan osamäärää

$$\left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' = \frac{r \beta T (-2R^3 + KR^2) - K}{\beta KR^2}.$$

Huomattavaa on, että

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' = -\infty < 0 .$$

Osamäärä saa arvon nolla vain jos

$$z(R) := -2R^3 + KR^2 = \frac{K}{\beta T} .$$

Nyt määritellyn funktion $z(R)$ derivaatan nollakohdat

$$z'(R) = -6R^2 + 2KR = 0$$

sijaitsevat pisteissä $R = 0$ ja $R = \frac{1}{3}K$. Funktion toinen derivaatta on

$$z''(R) = -12R + 2K .$$

Koska $z''(0) = 2K > 0$, niin piste $R = 0$ on lokaali minimi. Vastaavasti, koska $z''(\frac{1}{3}K) = -2K$, niin piste $R = \frac{1}{3}K$ on lokaali maksimi. Lisäksi, koska $z'(R) > 0$ kun $0 < R < \frac{1}{3}K$ ja $z'(R) < 0$ kun $R > \frac{1}{3}K$, on piste $R = \frac{1}{3}K$ globaali maksimi. Tällöin

$$z\left(\frac{1}{3}K\right) = \left(\frac{K}{3}\right)^3 .$$

Edellä suoritetun funktion $z(R)$ tarkastelujen perusteella löydetään mallille kaksi mahdollista ratkaisua:

- Jos $\left(\frac{K}{3}\right)^3 < \frac{K}{\beta T}$, yhtälöllä $z(R) = \frac{K}{\beta T}$ ei ole ratkaisua. Koska $\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{f(R)}{g(R)} \right]' = -\infty < 0$, on derivaatta aina negatiivinen. Tällöin myös tarkasteltava osamäärä on aina negatiivinen ja täten tasapainopiste (\hat{R}, \hat{X}) on lokaalisti stabiili.
- Jos $\left(\frac{K}{3}\right)^3 > \frac{K}{\beta T}$, yhtälöllä $z(R) = \frac{K}{\beta T}$ on kaksi ratkaisua. Tällöin myös derivaattakin vaihtaa suuntaansa kaksi kertaa. Osamäärä ensin vähenee, sitten kasvaa ja lopulta taas vähenee. Tässä tapauksessa tasapainopiste voi olla lokaalisti sekä stabiili että epästabiili.

5 Makrotaloudellinen malli

Systeemiä, jota seuraavaksi yritetään mallintaa, kutsutaan taloustieteessä ns. suljetuksi makromalliksi. Tämä tarkoittaa, että käsiteltävä systeemi on jokin kuvitteellinen valtio, joka ei käy ulkomaankauppaa. Tällöin valtio itse tuottaa (resurssi) kaiken mitä se tarvitsee ja kuluttaa (kuluttaja) tämän. Tässä mallissa käytetään taloustieteessä käytettyjä merkintöjä muuttujista. Resurssi, jota tässä vaiheessa tulkitaan tuotokseksi, merkitään termillä S (supply), ja kuluttaja -termiä merkitään termillä D (demand).

Tarkasteluissa ei pyritä selittämään taloustieteitä, vaan pyritään tutkimaan taloustieteen mukaista mallia matemaattisen mallin avulla. Mallin sopivuuden myötä saadaan esitettyä taloustieteellisiä perustuloksia, mutta tarkoituksena on esittää erilainen tarkastelutapa. Taloustieteistä lainataan myös mallin oletukset.

5.1 Oletukset

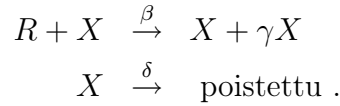
Kuten jo edellä mainittiin, systeemin dynamiikka on verrattavissa resurssi-kuluttaja -mallin dynamiikkaan, jolloin malli on hyvin määritelty.

Malli perustuu kuvitteelliseen valtioon, jossa kaikki sen asukkaat osallistuvat toimintaan. Tällöin kaikkien asukkaiden tuotot ja kulutukset ovat aggregoituja määreitä. Tällöin matemaattisen mallintamisen oletukset reagoivien yksilöiden lukumäärän suuruudesta ja tilastollisesta riippumattomuudesta ovat voimassa.

Huomautus 5.1. Mallissa olisi mahdollista käyttää muuttujina termejä AS (aggregate supply) ja AD (aggregate demand). Termeinä käytetään tässä tutkielmassa lyhyempiä versioita yksinkertaisuuden vuoksi. Mallia voitaisiin kutsua myös suljetun makrotalouden kokonaiskysynnän ja -tarjonnan -malliksi. Näin ei ole tehty, koska mallin olemus selviää tutkielmasta riippumatta siitä miksi sitä kutsutaan. Myöskään taloustieteissä nimitykset eivät ole yhtenäisiä.

5.2 Malli

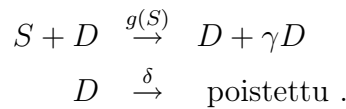
Tarkastellaan resurssi-kuluttaja -mallin reaktioita



Gausen mallissa termi βR on korvattu funktiolla $g(R)$. Käytetään nyt Gausen laajennettua mallia pohjana sillä poikkeuksella, että resurssia (R) merkitään termillä S ja kuluttajaa (X) merkitään termillä D . Tarkasteltava malli on nyt

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = f(S) - g(S)D & (\text{resurssi}) \\ \frac{dD}{dt} = \gamma g(S)D - \delta D & (\text{kuluttaja}), \end{cases}$$

ja sitä vastaavat reaktiot ovat



Kuten resurssi-kuluttaja -mallissa, jos mallissa ei ole kulutusta resurssi silti kasvaa, eli $\frac{dS}{dt} = f(S)$. Funktiota $f(S)$ voidaan kutsua resurssin S luonnolliseksi kasvunopeudeksi. Oletetaan, että $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Huomautus 5.2. Funktion f edellä esitettyyn autonomiseen kasvuun sisältyy taloustieteellinen oletus resurssin kulutuksen ja tuottamisen luonnollisesta kehityksestä. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka vaihdantaa ei käydä (jolloin syntyisi erillinen kulutus), tuotantoa on olemassa, ja tämä kehittyä jatkuvasti – tosin vain omaan käyttöön.

Kulutuksen ja siten kuluttajien kasvu on tässä tapauksessa hyvin pientä ja tällöin termi γ on hyvin pieni. Termi δ edustaa myös tässä mallissa mallista poistumista, eli tässä luonnollisessa mallissa kuolemaa, ja termi on suuruusluokaltaan pieni. Tärkeää mallissa on termien γ ja δ osamäärä $\frac{\gamma}{\delta}$. Tämä kuvaa kuluttajien todellista lisääntymistä tai vähentymistä. Luonnollinen tulkinta osamäärälle on syntyvien ja kuolevien suhde. Funktio $g(S)$ eli funktionaalivaste oletetaan myös olevan differentioituva, eli $g \in C^1(\mathbb{R})$. Koska malli perustui Gausen malliin, tarkastellaan seuraavaksi Gausen mallin oletuksia ja niiden soveltumista nykyiseen malliin. Kuten jo todettiin,

funktiot f ja g molemmat oletetaan jatkuvasti differentioituviksi. Funktion f osalta Gausen mallin oletukset pätevät sellaisenaan.

Huomautus 5.3. Tässä mallissa oletetaan, että resurssin määrä on aina ei-negatiivinen. Gausen mallissa oletettiin, että määrän kasvulla on kiintopiste K ja että kasvu voi olla negatiivista. Edelleen nämä pätevät, mutta lisäksi

$$\int f(S)dS \geq 0 .$$

Funktion g oletetaan nyt olevan ei-negatiivinen. Tällöin oletus $g(0) = 0$ pätee edelleen. Myös oletus $g(S) > 0$ kun $S > 0$ pätee edelleen. Oletus $g'(S) > 0$ kun $S > 0$ ei päde enää vaan tätä on lievennettävä oletukseen $g'(S) \geq 0$ kun $S > 0$. Koska $g(S) > 0$ ja $g'(S) \geq 0$ kun $S > 0$, voidaan olettaa, että on olemassa sellainen $S_0 \geq 0$, että $\gamma g(S_0) = \delta$. Huomioi, että Gausen mallissa oletetaan, että S_0 on aidosti positiivinen. Funktion $g(S)$ oletusten lievennys perustuu täysin mallin luonnollisuuteen.

Tarkastellaan mallin rata-analyysiä ja kiintopisteitä. Koska malli perustui Gausen malliin, ja koska tasapainopisteen olemassaoloon vaikuttavia oletuksia ei ole muutettu, myös näiden stabiliteettianalyysit ovat yhtenevät. Kun $S_0 > K > 0$, mallin ainoa tasapainopiste on triviaali ratkaisu $(K, 0)$. Kun $0 < S_0 < K$, mallilla on positiivinen ei-triviaali tasapainopiste pisteessä $(\hat{S}, \hat{D}) = (S_0, \frac{f(S_0)}{g(S_0)})$. Edelleen, osamäärän $\left[\frac{f(\hat{S})}{g(\hat{S})}\right]'$ etumerkki määrää tasapainopisteen lokaalin stabiilisuuden. Tasapainopisteen globaali stabiilisuus ja siten mallin käyttäytyminen selviävät mm. Poincarén ja Bendixonin lauseen avulla.

Esimerkki 5.4. Esimerkissä 4.2 tarkasteltiin yksinkertaista resurssi-kuluttaja -mallin muotoa. Mallissa funktio f oli lineaarinen ja funktio g oli logistinen. Mallissa huomattiin, että pitkällä aikavälillä logistisesti kasvavasta resurssista seurasi myös logistisesti kasvava kuluttaja. Sama malli taloustieteellisesti tulkittuna ei ole niin yksinkertainen kuin miltä se näyttää, eikä äskeinen tulos ole taloustieteellisesti oletettava tulos.

Muutetaan mallia siten, että molemmat funktiot ovat positiivisesti lineaarisia. Tällöin molempien termien kasvu on rajoittamatonta (suoraan integroituna saadaan eksponentiaalinen kasvu). Lisäksi, mallin oletusten mukaisesti

termit γ ja δ ovat suuruusarvoltaan lähes samoja, ja oletetaan niiden olevan nyt yhtäsuuret ja samat kuin esimerkissä 4.2, eli $\gamma = \delta = \sqrt[k]{2} - 1$. Tarkasteltava malli on

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \alpha S - \beta S D \\ \frac{dD}{dt} = (\sqrt[k]{2} - 1)\beta S D - (\sqrt[k]{2} - 1)D . \end{cases}$$

Koska mallin parametri δ on nyt kiinnitetty, eivät esimerkin 4.2 mukaiset tarkastelut nyt päde.

Tarkastellaan seuraavaksi mallin tasapainopisteitä

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = 0 &\iff S = 0 \text{ tai } D = \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{dD}{dt} = 0 &\iff D = 0 \text{ tai } S = \frac{1}{\beta} . \end{aligned}$$

Mallilla on nyt kaksi tasapainopistettä – triviaali origo ja positiivinen ei-triviaali $(\hat{S}, \hat{D}) = (\frac{1}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Mallin Jacobin matriisi pisteessä (\hat{S}, \hat{D})

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \hat{D} & -\beta \hat{S} \\ (\sqrt[k]{2} - 1)\beta \hat{D} & (\sqrt[k]{2} - 1)(\beta \hat{S} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ (\sqrt[k]{2} - 1)\alpha & 0 \end{pmatrix} .$$

Nyt $\det J = (\sqrt[k]{2} - 1)\alpha > 0$ ja $\text{trace } J = 0$, jolloin huomautus 3.35 ei kerro stabiilisuudesta mitään. Myös matriisin ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaariset, jolloin mallin stabiilisuutta pitäisi tarkastella muilla keinoilla.

Huomautus 5.5. Edellinen esimerkki on hyvä esimerkki mallista, joka näyttää yksinkertaiselta, mutta jonka tutkiminen voi olla hankalaa.

Tarkastellaan lopuksi toista esimerkkiä mallista, joka on hieman luonnollisempi.

Esimerkki 5.6. Tarkastellaan mallia, jossa molemmat parametrit γ ja δ eivät ole kiinnitettyjä. Oletetaan lisäksi, että molemmat funktiot f ja g ovat Hollingin tyyppiä III. Tähän oletukseen sisältyy sekä kuluttajan että resurssin oppimisen käsite, eli kasvu on hidasta ennen kuin 'opitaan', minkä jälkeen kasvu on nopeampaa. Lisäksi oletukseen sisältyy taloustieteellinen oletus rajatuottavuudesta, eli kasvu ajan mittaan vähenee. Malli on nyt

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha S^2}{1 + \alpha T S^2} - \frac{\beta S^2}{1 + \beta T S^2} D \\ \frac{dD}{dt} = \gamma \frac{\beta S^2}{1 + \beta T S^2} D - \delta D . \end{cases}$$

Kuten edellisessä esimerkissä, parametrien α ja β oletetaan olevan positiivisia. Tarkastellaan ensin mallin yleistä käyttäytymistä. Mallin oletusten mukaisesti parametrit γ ja δ ovat suuruudeltaan pieniä suhteessa muuttujiin. Olkoon ε mielivaltaisen pieni positiivinen luku. Määritellään apumuuttujat $\gamma^* = \frac{\gamma}{\varepsilon}$, $\delta^* = \frac{\delta}{\varepsilon}$, $S^* = \varepsilon S$ ja $D^* = \varepsilon D$. Kun nämä sijoitetaan malliin, saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt} &= \varepsilon \frac{\alpha(S^*)^2}{\varepsilon^2 + \alpha T(S^*)^2} - \frac{\beta(S^*)^2}{\varepsilon^2 + \beta T(S^*)^2} D^* \\ \frac{dD^*}{dt} &= \varepsilon \gamma^* \frac{\beta(S^*)^2}{\varepsilon^2 + \beta T(S^*)^2} D^* - \delta^* D^* . \end{cases}$$

Kun nyt annetaan parametrin ε lähestyä arvoa nolla, saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS^*}{dt} &= -\frac{\beta(S^*)^2}{\beta T(S^*)^2} D^* \\ \frac{dD^*}{dt} &= -\delta^* D^* . \end{cases}$$

Aika-akselia ei ole nyt erotettu, mutta koska parametrit γ ja δ ovat suuruudeltaan eri luokkaa kuin muuttujat S ja D , malli käyttäytyy erilailla kun muuttujat S ja D ovat kasvaneet huomattavasti. Kun riittävästi aikaa kuluu, päästään edellä esitettyyn tilaan mallissa, jolloin molemmat kasvut vähenevät. Mallin taloustieteellinen oletus rajatuottavuudesta samalla johtaa mallin rajoitettuun käyttäytymiseen.

Äskeinen tulos ei ole taloustieteellisesti oletettava eikä yksinkertainen tulos. Tarkastellaan seuraavaksi mallin kiintopisteitä. Ratkaistaan ensin tarvittava parametri S_0 . Arvoksi saadaan

$$S_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{\delta} - T} .$$

Koska parametrin S_0 oletetaan olevan positiivinen, negatiivinen vaihtoehto ei käy. Lisäksi saadaan ehto $\frac{\gamma}{\delta} > T$, koska parametri ei voi olla imaginäärinen. Samalla tämä tarkoittaa, että mallissa syntyvien ja kuolevien suhteen eli todellisen syntyvyyden täytyy olla suurempi kuin kulutuksien välinen aika. Nyt voidaan olettaa, että $0 < S_0 < K$, jolloin mallilla on positiivinen eitriviaali tasapainopiste $(\hat{S}, \hat{D}) = (S_0, \frac{f(S_0)}{g(S_0)})$. Nyt

$$\frac{f(S_0)}{g(S_0)} = \frac{\alpha + \alpha\beta T S_0^2}{\beta + \alpha\beta T S_0^2} .$$

Edelleen, tasapainopiste on stabiili, kun $\left[\frac{f(\hat{S})}{g(\hat{S})}\right]' < 0$. Nyt

$$\left[\frac{f(\hat{S})}{g(\hat{S})}\right]' = \frac{2\alpha\beta TS_0(\beta - \alpha)}{(\beta + \alpha\beta TS_0^2)^2},$$

jolloin tasapainopiste on stabiili kun $\alpha > \beta$, ja epästabiili kun $\beta \geq \alpha$.

Koska parametrit α ja β edustivat kulutusintensiiteettiä (resurssin tuottaminen myös kuluttaa resursseja), mallin tasapainopiste on stabiili, kun resurssien tuottamiseen kulutetaan enemmän resursseja kuin mitä kuluttajat kuluttavat. Tämäkään ei ole taloustieteellisesti triviaali tulos.

Kuten Gausen mallia käsiteltäessä todettiin, mallin globaalille käytökselle on Poincarén ja Bendixonin lauseen nojalla kolme vaihtoehtoa. Jos tasapainopiste on epästabiili, niin mallissa on rajasykli. Jos tasapainopiste on stabiili, niin alueessa voi silti olla rajasykli tai sitten tasapainopiste on globaalisti stabiili.

Edellä esitetyt tarkastelut, missä käytettiin apumuuttujia, ja todettiin mallin rajoittuneisuus, myös tukevat mallin globaalia käyttäytymistä koskevia johtopäätöksiä.

Tasapainopisteen stabiilisuus määräytyy tapauskohtaisesti mallin parametrien mukaan. Kuitenkin epätriviaali tulos mallin rajoittuneisuudesta on merkittävä. Riippumatta siitä, onko mallissa rajasykli, mallin dynamiikka pysyy aina rajoitettuna, mikä taloustieteellisesti on toivottu tulos.

5.3 Klassinen malli

Ensimmäiset makrotaloudelliset mallit perustuivat yksinkertaiseen lineaariseen optimointiin. Kun tuotanto (resurssi) ja kulutus (kuluttaja) tiedettiin, kyettiin laskemaan tasapainopiste lineaaristen yhtälöiden leikkauspisteestä. Tarkasteltaessa suljettua makrotaloutta, havaittiin, että sekä kulutus että tuotto ovat rajoitettuja – poiketen aiemmista malleista. Tämä havainto oli ristiriidassa perinteisten taloudellisten mallien oletusten kanssa. Tarkastellaan seuraavaksi sovellutusta eräästä taloustieteellisesti tunnetusta kulutusfunktioista¹. Kutsutaan tätä mallia *klassiseksi malliksi*. Oletetaan seuraavaksi, että molemmat funktiot f ja g ovat ns. *logistisen mallin* mukaisia (vrt. esim. 4.2). Tällöin

$$f(S) = g(S) = rS\left(1 - \frac{S}{K}\right), \quad \forall S, r, K \geq 0,$$

missä vakiot r ja K ovat erisuuret funktioille f ja g .

Tarkastellaan makrotaloudellisen mallin oletuksia. Funktion f oletuksista saadaan, että

$$\int f(S)dS \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq \frac{K_1}{2}.$$

Vastaavasti funktion g oletuksista saadaan, että

$$g(S) > 0, \text{ kun } S > 0 \Leftrightarrow 0 < S < K_2,$$

ja

$$g'(S) \geq 0, \text{ kun } S > 0 \Leftrightarrow 0 < S \leq \frac{K_2}{2}.$$

Nämä yhdistämällä saadaan resurssille S ehto

$$0 \leq S \leq \min\left\{\frac{K_1}{2}, \frac{K_2}{2}\right\}.$$

Nyt sekä kulutus että tuotto ovat kasvavia kunnes saavutetaan lakipiste pisteessä $S = \frac{K}{2}$, jolloin suljetun talouden kasvunopeus ei voi teoreettisesti kasvaa. Funktioilla on tunnetusti sekä kantokyky (vakio K) että ideaalikasvunopeus (vakio r) jotka oletetaan olevan reaalisia ja ei-negatiivisia. Mallin

¹[6] s. 16: Ando, Modigliani (1963). Ol. ettei mallissa ole mukana säästöjä.

tulkinta on perinteisesti luonteva, koska suljetussa taloudessa voidaan tuottaa ja kuluttaa rajallisesti. Taloustieteellisesti huomattavaa on – resurssin S määrittelyalueesta johtuen – että mallissa ei voida ylittää funktioiden luonnollisen kasvunopeuden maksimia. Tällöin sekä tuoton että kulutuksen kasvunopeudet ovat aina kasvavia. Malliksi saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r_1 S \left(1 - \frac{S}{K_1}\right) - r_2 S \left(1 - \frac{S}{K_2}\right) D \\ \frac{dD}{dt} = \gamma r_2 S \left(1 - \frac{S}{K_2}\right) D - \delta D . \end{cases}$$

Tarkastellaan ensin mallin kiintopisteitä. Asettamalla $\frac{dD}{dt} = 0$ saadaan joko $D = 0$ tai $\gamma r_2 S \left(1 - \frac{S}{K_2}\right) = \delta$. Jälkimmäisestä ehdosta saadaan yhtälö

$$S^2 - K_2 S + \frac{\delta K_2}{\gamma r_2} = 0 .$$

Yhtälön ratkaisu on

$$S = \frac{K_2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}} \right) .$$

Ratkaisun positiivinen vaihtoehto ei ole resurssin S määrittelyalueessa, joten se sivuutetaan toistaiseksi. Determinantista saadaan lisää ehtoja: jos $r_2 K_2 = \frac{4\delta}{\gamma}$, niin $S = \frac{K_2}{2} := \hat{S}_1$, ja jos $r_2 K_2 < \frac{4\delta}{\gamma}$, niin $S = \frac{K_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}}\right) := \hat{S}_2$. Samat ehdot luonnollisesti ratkaisevat myös yhtälön $\gamma g(S_0) = \delta$. Merkittään vielä $S = \frac{K_2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}}\right) := \hat{S}_3$. Vastaavasti asettamalla $\frac{dS}{dt} = 0$ saadaan yhtälö $D = \frac{r_1 \left(1 - \frac{S}{K_1}\right)}{r_2 \left(1 - \frac{S}{K_2}\right)} := \hat{D}$. Tarkastelemalla tätä yhtälöä, havaitaan että yhtälö on melkein lineaarinen, mutta kun lasketaan tämän derivaatta, saadaan

$$\frac{d\hat{D}}{dS} = \frac{-\frac{r_1 r_2}{K_1} + \frac{r_1 r_2}{K_2}}{\left(r_2 - \frac{r_2}{K_2} S\right)^2} .$$

Derivaatasta nähdään, että sitä ei ole määritelty kohdassa $S = K_2$, ja että derivaatta on aina identtisesti nolla jos $K_1 = K_2$. Oletetaan nyt ettei näin ole.

Mallilla on nyt kaksi triviaalia tasapainopistettä: $(\hat{S}, \hat{D}) = (0, 0)$ ja $(\hat{S}, \hat{D}) = (K_1, 0)$. Tarkastellaan mallin ei-triviaaleja tasapainopisteitä. Mallin Jacobin matriisi pisteessä (\hat{S}, \hat{D}) on

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1}{K_1} \hat{S} - r_2 \hat{D} + \frac{2r_2}{K_2} \hat{S} \hat{D} & -r_2 \hat{S} + \frac{r_2}{K_2} \hat{S}^2 \\ \gamma r_2 \hat{D} - \gamma \frac{2r_2}{K_2} \hat{S} \hat{D} & -\gamma \frac{r_2}{K_2} \hat{S}^2 - \delta \end{pmatrix} .$$

Oletetaan ensin, että $\hat{S} = \hat{S}_1 = \frac{K_2}{2}$. Jacobin matriisin determinantti on nyt

$$\text{Det } J = - \frac{\overbrace{r_1}^{\geq 0} (K_1 - K_2) \overbrace{(r_2 K_2 \gamma + 4\delta)}^{\geq 0}}{\underbrace{4K_1}_{\geq 0}} > 0 ,$$

kun $K_1 < K_2$. Oletetaan että edellinen ehto on voimassa. Jacobin matriisin jälki on nyt

$$\text{Tr } J = r_1 - \frac{r_1 K_2}{K_1} - \frac{r_2 K_2 \gamma}{4} - \delta \stackrel{\text{ol. } r_2 K_2 = 4\delta/\gamma}{=} r_1 \left(1 - \underbrace{\frac{K_2}{K_1}}_{> 1} \right) < 0 .$$

Saadaan tulos, että jos $K_1 < K_2$, niin tasapainopiste $(\hat{S}_1, \hat{D}) = \left(\frac{K_2}{2}, \frac{2r_1(1 - \frac{K_2}{2K_1})}{r_2} \right)$ on lokaalisti stabiili. Sama tulos saadaan Gausen mallin tuloksesta jos tarkastellaan osamäärää $\left[\frac{f(\hat{r})}{g(\hat{r})} \right]'$. Nyt

$$\left[\frac{f(\hat{S}_1)}{g(\hat{S}_1)} \right]' = -\frac{2r_1}{r_2 K_1} + \frac{4r_1(1 - \frac{K_2}{2K_1})}{r_2 K_2} < 0 \Leftrightarrow K_1 < K_2 .$$

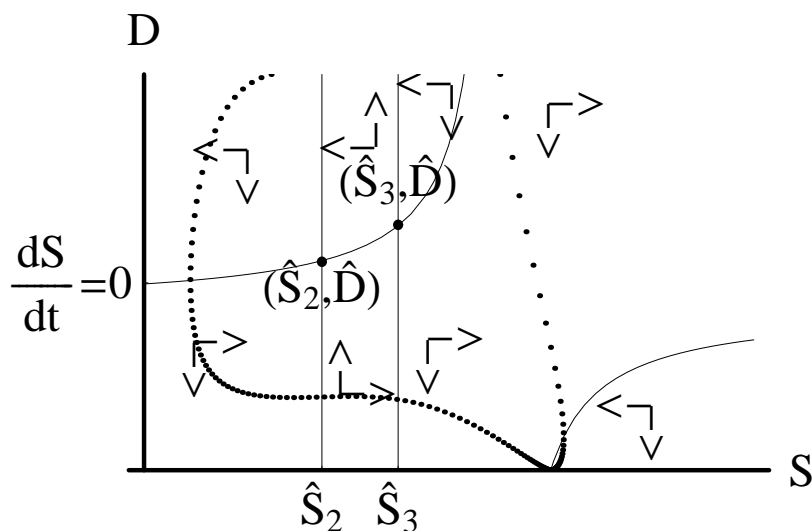
Koska oletettiin, että $\hat{S} = \hat{S}_1 = \frac{K_2}{2}$, täytyy tämän myös toteuttaa resurssin S oletukset jolloin saadaan, että $\hat{S} = \hat{S}_1 = \frac{K_2}{2} < \frac{K_1}{2}$, ja edelleen $K_1 < K_2$. Tämä on ristiriidassa lokaalin stabiilisuuden ehtojen kanssa ja täten aiempien tarkastelujen nojalla tapauksessa $\hat{S} = \hat{S}_1 = \frac{K_2}{2}$ mallissa on olemassa rajasykli (vrt. kuva 10).

Oletetaan nyt, että $\hat{S} = \hat{S}_2 = \frac{K_2}{2} (1 - \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}})$. Tarkastellaan nyt Gausen laajennetun mallin tulosten nojalla vain osamäärää $\left[\frac{f(\hat{r})}{g(\hat{r})} \right]'$. Nyt

$$\left[\frac{f(\hat{S}_2)}{g(\hat{S}_2)} \right]' = \frac{4r_1(K_1 - K_2)}{r_2 K_1 K_2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}} \right)^2} < 0 ,$$

kun $K_1 < K_2$. Jos näin on, ja $r_2 K_2 < \frac{4\delta}{\gamma}$, niin tasapainopiste (\hat{S}_2, \hat{D}) on lokaalisti stabiili (vrt. kuva 11). Tämä ei sulje pois mahdollisuutta, että myös

Kuva 10: Klassisen mallin rata-analyysi, kun $K_1 > K_2$. Parametrit: $r_1 = 1.2$, $K_1 = 1.6$, $r_2 = 1.7$, $K_2 = 1.4$, $\delta = 1.1$ ja $\gamma = 1.9$.

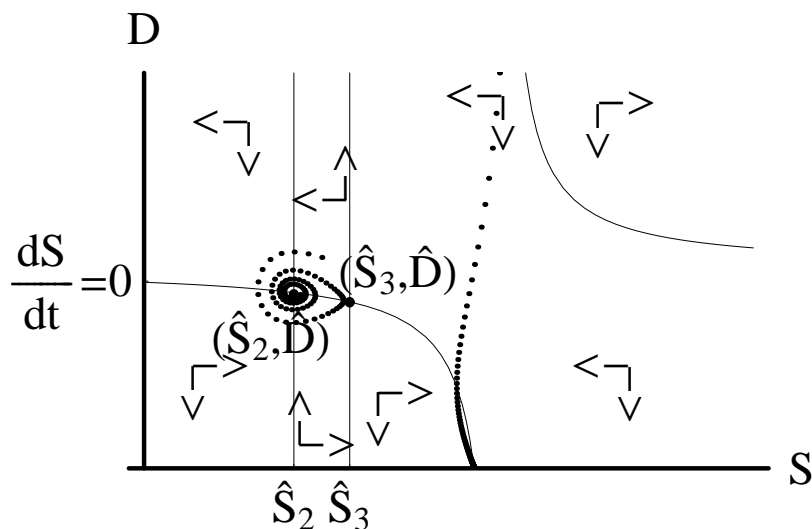


tässä tapauksessa mallissa olisi olemassa rajasykli.

Kuten Gausen mallia tarkasteltaessa havaittiin, lokaalisti stabiilin tasapainopisteen alueella voi olla rajasykli. Jos rajasykliä ei ole, tasapainopiste on globaalisti stabiili. Voidaan myös todeta, että mallin triviaalit tasapainopisteet ovat selvästi epästabiileja.

Tarkastellaan vielä mallin rata-analyysiä. Analyysi on esitetty kuvissa 10 - 11. Kuvista nähdään, että mallin rata-analyysin ratkaisuradat riippuvat vakioiden keskinäisistä suuruuksista - erityisesti vakioiden K_1 ja K_2 arvoista. Analyysistä voidaan päätellä, että jos $S > K_2$, niin mallilla on vain triviaali tasapainopiste $(\hat{S}, \hat{D}) = (K_1, 0)$ jos ja vain jos $K_1 > K_2$. Jos $K_1 = K_2$, niin tällöin malli degeneroituu, kuten aiemmin todettiin. Jos $S < K_2$, mallilla on epästabiili tasapainopiste $(\hat{S}, \hat{D}) = (0, 0)$ ja epätriviaali tasapainopiste (\hat{S}, \hat{D}) . Kaikki tasapainopisteet (\hat{S}_1, \hat{D}) , (\hat{S}_2, \hat{D}) ja (\hat{S}_3, \hat{D}) ovat tässä alueessa. Vakioiden keskinäiset suhteet määräävät mikä näistä on tasapainopiste. Luonnollisesti kaikki tasapainopisteet eivät ole olemassa yhtä aikaa vaikka kuvissa ne on kaikki esitetty. Analyysin perusteella edelleen mallilla voi olla rajasykli, mutta tätä tarkastelua ei tässä esitetä.

Kuva 11: Klassisen mallin rata-analyysi, kun $K_1 < K_2$. Parametrit: $r_1 = 1.2$, $K_1 = 1.3$, $r_2 = 1.7$, $K_2 = 1.4$, $\delta = 1.1$ ja $\gamma = 1.9$.



Kuvissa on esitetty katkoviivoituksella dynamiikan esimerkkiratoja. Kuvasta 10 näkyy kuinka malli 'ajautuu' kohti ainoata stabiilia kiintopistettä $(\hat{S}, \hat{D}) = (K_1, 0)$. Kuvasta 11 puolestaan nähdään, että vaikka mallilla on nyt lokaalisti stabiili kiintopiste, niin silti mallin triviaali tasapainopiste 'dominoi' mallin käyttäytymistä.

Mallin tulos, että tasapainopiste (\hat{S}_2, \hat{D}) on ainakin lokaalisti stabiili, on edellisen kappaleen tarkastelujen nojalla melkein odotettavaa. Taloustieteellisesti mielenkiintoiset tulokset ovat itse tasapainopisteiden arvot $\hat{S}_1 = \frac{K_2}{2}$ ja $\hat{S}_2 = \frac{K_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\gamma r_2 K_2}}\right)$. Näitä voidaan approksimoida: $0 \leq \hat{S} \leq \frac{K_2}{2}$. Mallin tarkastelujen alussa todettiin, että sekä kulutus- että resurssifunktioiden maksimit ovat pisteessä $S = \frac{K}{2}$. Mallin stabiilit tasapainopisteet ovat mallin kulutuksen luonnollisen kasvunopeuden maksimissa tai sen alapuolella. Tämä tulos muutti taloustieteiden oletuksia merkittävästi. Vaikka malli on tarjontapainoitteinen, kuluttaja 'määrää' tasapainopisteen suuruuden vaikka resurssia voisi tuottaa ja siis kuluttaa enemmän tai vähemmän. Historiallisesti tämä havainto johti suoraan kaikkien tulevien mallien kuluttajalähtöisyyteen tai vähintään mallien oletusten muuttumiseen.

5.4 Moderni malli

Edellisen mallin tulosten pohjalta makrotaloudelliset mallit muuttuivat huomattavasti. Erityisesti tulos mallin tasapainopisteiden arvoista, jotka sijoituivat kulutuksen luonnollisen kasvunopeuden maksimin ja sen kantokyvyn väliin, herättivät kiinnostusta. Tällöin kuluttajat kuluttavat melkein kaiken mahdollisen. Tämä herätti kysymyksen siitä, että jos kulutusta ja tuotantoa ei olisi rajoitettu mitenkään, olisiko mallilla edelleen tasapainopistettä. Koska aiemmin oli tarkasteltu lineaarisia funktioita jotka eivät olleet rajoitettuja, tarkastelujen kohteeksi tuli monimutkaisempia malleja.

Tarkastellaan vielä mallia missä kulutusta ja tuottoa ei ole rajoitettu mitenkään. Oletetaan, että sekä resurssi- että kulutusfunktiot ovat Hollingin tyyppiä III. Tätä tarkasteltiin jo esimerkissä 5.6. Tällöin funktioihin sisältyy kulutukseen ja tarjontaan liittyvät oppimisen käsitteet – kulutus ja tuotto kasvavat myöhemmin enemmän koska niitä pitää 'oppia' kuluttamaan ja tuottamaan. Lisätään malliin vielä lineaarinen kulutuksen kasvu. Tämä kuvastaa kulutuksen oppimista mutta samalla kulutuksen kyltymättömyyttä. Nykytermein lineaarista termiä voisi kutsua inflaatioksi. Edelleen malli on taloustieteellisesti sanottuna tarjontalähtökohtainen kuten edelliset mallit. Reaktioyhtälöksi saadaan

$$\begin{array}{ccc} S + D & \xrightarrow{g(S)+h(S)} & D + \gamma D \\ D & \xrightarrow{\delta} & \text{poistettu} , \end{array}$$

ja differentiaaliyhtälöryhmäksi

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = f(S) - [g(S) + h(S)] D & (\text{resurssi}) \\ \frac{dD}{dt} = \gamma [g(S) + h(S)] D - \delta D & (\text{kuluttaja}), \end{cases}$$

Kun edelliseen sijoitetaan funktiot f , g ja $h(S) = aS$, saadaan

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha S^2}{1+\alpha T S^2} - \left[\frac{\beta S^2}{1+\beta T S^2} + aS \right] D \\ \frac{dD}{dt} = \gamma \left[\frac{\beta S^2}{1+\beta T S^2} + aS \right] D - \delta D . \end{cases}$$

Tarkastellaan kulutusfunktiota hieman tarkemmin:

$$g(S) = \frac{\beta S^2}{1 + \beta T S^2} + aS = \frac{a\beta T S^3 + \beta S^2 + aS}{1 + \beta T S^2} .$$

Tätä tarkasteltaessa voidaan huomata, että

$$g(S) = \frac{o(S^3)}{o(S^2)} = o(S) .$$

Lineaarinen termi on vakioista riippumatta 'määrävämpi', jolloin voimme approksimoida funktiota ja määrittellä uudestaan $g(S) = bS$. Malliksi tulee

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \frac{\alpha S^2}{1+\alpha T S^2} - bSD \\ \frac{dD}{dt} = \gamma bSD - \delta D . \end{cases}$$

Mallilla on kaksi tasapainopistettä. Triviaali $(\hat{S}, \hat{D}) = (0, 0)$ ja ei-triviaali $(\hat{S}, \hat{D}) = (\frac{\delta}{\gamma b}, \frac{\alpha \delta \gamma}{\gamma^2 b^2 + \alpha T \delta^2})$. Jacobin matriisi pisteessä (\hat{S}, \hat{D}) on

$$J = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha \hat{S}}{(1+\alpha T \hat{S}^2)^2} - b\hat{D} & -b\hat{S} \\ \gamma b \hat{D} & \gamma b \hat{S} - \delta \end{pmatrix} .$$

Tasapainopisteessä $(\hat{S}, \hat{D}) = (\frac{\delta}{\gamma b}, \frac{\alpha \delta \gamma}{\gamma^2 b^2 + \alpha T \delta^2})$ Jacobin matriisin determinantti on

$$\text{Det } J = \left[\frac{2\alpha \hat{S}}{(1 + \alpha T \hat{S}^2)^2} - b\hat{D} \right] (\gamma b \hat{S} - \delta) + \gamma b^2 \hat{S} \hat{D} = \frac{b\alpha \gamma \delta^2}{b^2 \gamma^2 + T\alpha \delta^2} > 0 ,$$

ja jälki

$$\text{Tr } J = \frac{\overbrace{b\alpha \gamma \delta (b^2 \gamma^2 - T\alpha \delta^2)}^{\geq 0}}{\underbrace{(b^2 \gamma^2 + T\alpha \delta^2)^2}_{\geq 0}} < 0 ,$$

kun

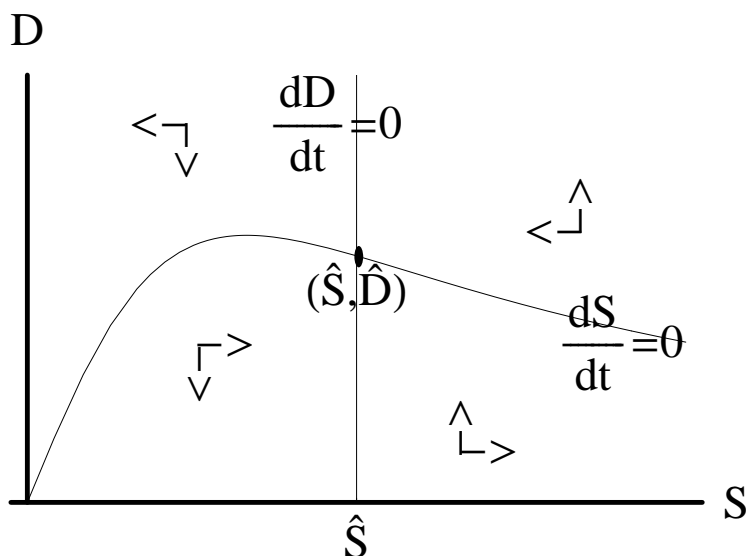
$$b^2 \gamma^2 - T\alpha \delta^2 < 0 \Leftrightarrow T > \frac{b^2}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^2 .$$

Tällöin tasapainopiste on lokaalisti stabiili. Tarkastellaan vielä Gausen mallin mukaista ehtoa $\left[\frac{f(\hat{S})}{g(\hat{S})} \right]' < 0$. Nyt

$$\left[\frac{f(\hat{S})}{g(\hat{S})} \right]' = \left[\frac{\alpha \delta}{\gamma b^2 \left(1 + \frac{\alpha T \delta^2}{\gamma^2 b^2} \right)} \right]' = - \frac{2\alpha^2 T \delta^2}{\gamma^2 b^3 \left(1 + \frac{\alpha T \delta^2}{\gamma^2 b^2} \right)^2} + \frac{\alpha}{b \left(1 + \frac{\alpha T \delta^2}{\gamma^2 b^2} \right)} < 0 ,$$

kun $T > \frac{b^2}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^2$, eli sama ehto kuin edellä.

Kuva 12: Modernin mallin rata-analyysi.



Tarkastellaan vielä mallin rata-analyysiä. Analyysi on esitetty kuvassa 12. Nyt

$$\frac{dD}{dt} = 0 \Leftrightarrow D = 0 \vee \hat{S} = \frac{\delta}{\gamma b},$$

ja

$$\frac{dS}{dt} = 0 \Leftrightarrow \hat{D} = \frac{\alpha S}{b + \alpha b T S^2}.$$

Jälkimmäisen yhtälön maksimi on pisteessä $S = \frac{1}{\sqrt{(2-\alpha)T}}$. Tästä saadaan myös parametrille α välttämätön ehto $0 < \alpha \leq 2$. Huomattavaa on, että molemmat yhtälöt riippuvat mallin eri parametreista, ja siten niiden arvot eivät riipu toisistaan. Kuvasta voidaan myös havaita, että vaikka tasapainopiste on ainakin lokaalisti stabiili, ei rajasyklin mahdollisuutta voi sulkea pois mallin tuloksista.

Tuloksessa merkittävintä on se, että tasapainopiste on olemassa, ja että sen arvo riippuu pelkästään funktioiden parametreista. Parametrin T , eli kulu- tukseen ja lepoon käytettävän ajan, täytyy olla suurempi kuin syntyvien ja kuolevien suhteen neliö kerrottuna yhdessä aikayksikössä suoritetun kulutuk- sen määrän neliön ja inflaatiokertoimen suhteella. Eli reaalisen syntyvyyden

(tai kuolleisuuden) neliö kerrottuna inflaatiokorjatulla kulutuksen määrän neliöllä joka on riippuvainen ajasta antaa meille reaalisen, inflaatiokorjatun ja aikariippuvaisen kokonaiskulutuksen neliön. Mutta mallin kulutuksen tasapaino ei riipu tästä, vaan mallin tasapaino on riippuvainen näiden aikaintensiteetistä. Eli kulutuksen välissä pitää olla aikaa jolloin tuotanto 'ehtii' tuottaa lisää ja kuluttajat levätä.

Tulos on erittäin luonnollinen mutta samalla muokkasi tulevia malleja. Tämän 'modernin mallin' jälkeen tarkastelut ovat entistä enemmän keskittyneet sekä kulutuksen tarkastelemiseen että avoimiin makrotaloudellisiin malleihin. Jälkimmäisiä tarkasteltaessa voidaan 'törmätä' myös peliteoriaan jos mallissa on useampia talouksia. Tällöin sekä ratkaisut että tulokset ovat huomattavasti monimutkaisempia.

6 Yhteenveto

Tutkielmassa pyrittiin antamaan lukijalle käsitys, miten matemaattiset mallit rakentuvat ja tutkittiin, miten resurssi-kuluttaja -mallilla voidaan mallintaa suljettua makrotaloutta. Lisäksi todettiin muutama makrotaloudellinen lainalaisuus mallia tutkimalla.

Tutkielman valtaosa keskittyi matemaattisten mallien tutkimisen esittämiseen. Vaikka tämä ei sisällöllisesti ollut tarkoitettua, niin tarvittavat työkalut yksinkertaisten mallien yksinkertaiseen tutkimiseen piti esittää, vaikka se teoreettisesti ei ole yksinkertaista. Tavoiteltu sisältö löytyy juuri löydetyistä tuloksista.

Tutkielman sovellutuksessa tehtiin mallista taloudelliset perusoletukset, jolloin ei otettu kantaa näiden taloustieteellisiin oletuksiin tai väittämiin. Tutkielman tarkoituksena ei ollut tutkia näitä oletuksia, vaan niitä käytettiin sellaisenaan. Tarkoituksena oli esittää mallin sovellutus ja kuinka sillä voidaan sekä esittää suljettua makrotaloutta että tutkia sitä matemaattisesti. Havaituista tuloksista, mm. esimerkin 5.4 tulos, että pitkällä aikavälillä logistisesti kasvavasta resurssista seuraa myös logistisesti kasvava kuluttaja, ei ole taloustieteellisesti triviaali tulos, ja tähän juuri pyrittiin. Myös esimerkin 5.6 tulokset, että rajatuottavuudesta seuraa rajoitettu käyttäytyminen ja että mallin tasapaino on stabiili kun resurssien tuottamiseen kulutetaan enemmän resursseja kuin mitä kuluttajat kuluttavat, ovat molemmat merkittäviä taloustieteellisiä perustuloksia. Lisäksi, kappaleissa 5.3 ja 5.4 johdettiin hieinan makrotaloustieteiden historiaa esimerkkien valossa. Malleista saatujen tulosten seuraamuksina tapahtuneiden tutkimusten suuntautumisten muutosta pyrittiin esittämään.

Huomattavaa on, että tutkielmassa päädyttiin näihin tuloksiin, havaintoihin ja väittämiin vain tutkimalla erilaisia tapauksia resurssi-kuluttaja -mallista eikä johtamalla niitä oletuksista, mikä on perinteinen taloustieteellinen tapa. Tutkielmassa pyrittiin juuri esittämään, miten saadaan tällaisia taloustieteellisiä perustuloksia resurssi-kuluttaja -mallia tutkimalla verrattuna taloustieteiden perinteisiin menetelmiin. Tällä tavoin pyrittiin huomaan uutta tai erilaista menetelmää taloudellisten mallien suunnitteluun ja tarkastelemiseen.

Oletettavaa on, että lisätarkasteluilla selviäisi muitakin tuloksia kuin mitä tässä esitettiin.

Kirjallisuutta

- [1] Geritz, Stefan: *Mathematical Modelling*. University of Turku Institute for Applied Mathematics, Lecture notes, 2004.
- [2] Geritz, Stefan: *Adaptive Dynamics*. University of Turku Institute for Applied Mathematics, Lecture notes, 2003.
- [3] Geritz, Stefan & Parvinen, Kalle: *Mathematical Modelling*. University of Turku Institute for Applied Mathematics / University of Helsinki Institute for Applied Mathematics, Lecture notes, September 2005.
- [4] Pursiheimo, Ulla: *Differentiaaliyhtälöt*. University of Turku Institute for Applied Mathematics, Lecture notes, March 1999.
- [5] Hemminki, Jarmo: *Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi*. University of Turku Institute for Applied Mathematics, Lecture notes, 2003.
- [6] Koiranen, Hannu: *Makroteoria 2*. University of Turku Institute for Economics, Lecture notes, 2005.
- [7] Ruskeepää, Heikki: *Mathematica -opas*. Yliopistokustannus Oy / Otatieto, Helsinki 2000, ISBN 951-672-292-X.