# Heikot mittaukset ja heikot arvot

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
Teoreettinen fysiikka
2013
Mikko Tukiainen
Tarkastajat:
Dosentti Pekka Lahti
FT Jussi Schultz

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos
TUKIAINEN, MIKKO: Heikot mittaukset ja heikot arvot
Pro gradu-tutkielma 101s.
Teoreettinen fysiikka
Elokuu 2013

---

Fysikaalisen suureen mittauksen universaali konsepti on, että mitattava systeemi tuodaan tavalla tai toisella kontaktiin mittalaitteen kanssa, jonka jälkeen mittalaitteen mitta-asteikolta luetaan mitattavan suureen arvo. Klassisessa fysiikassa jokainen suure voidaan ainakin periaatteessa mitata mielivaltaisella tarkkuudella missä tahansa systeemin tilassa, ilman että tila muuttuisi mittauksen aikana. Tämä ei kuitenkaan yleisesti päde kvanttimekaniikassa – sitä vastoin kvanttimekaniikan mittausteorian perustulos on, että mittaus tavallisesti muuttaa mitattavan systeemin tilaa.

Edellinen perustulos ei kuitenkaan poissulje sitä, että tehtäessä sopiva erittäin epätarkka mittaus myös tilanmuutos voisi olla vähäistä. Tällaisia mittauksia on olemassa ja niitä kutsutaan heikoiksi mittauksiksi. Heikon mittauksen ilmeinen haittapuoli on, että myös mittauksessa saatavan informaation määrä on vähäistä. Kuitenkin toistamalla heikkoa mittausta useita kertoja, myös informaation määrää saadaan kasvatettua.

Tavanomaisesti fysikaalisen suureen arvoista puhuttaessa tarkoitetaan sen arvoja, likimääräisiä arvoja, keskiarvoja ja ehdollisia keskiarvoja. Lisäksi suureelle voidaan määritellä myös niin sanotut heikot arvot. Osoittautuu, että suureen heikko arvo voidaan operationaalisesti saavuttaa sopivan heikon ja ”vahvan” mittauksen jonomittauksen tuloksena. Heikot mittaukset ja heikot arvot ovat aktiivisen tutkimuksen alla, ja viimeaikoina niitä on käytetty muun muassa tilanmääritystehtävissä.

Tässä tutkielmassa tutustun heikkojen mittausten teoriaan lähtien liikkeelle yleisestä kvanttimekaniikan mittausteoriasta. Osoitan myös, kuinka heikot arvot realisoituvat heikon ja ”vahvan” mittauksen jonomittauksessa. Lisäksi analysoin joitakin keskeisiä ja tuoreita heikkoja mittauksia ja heikkoja arvoja käsitteleviä julkaisuja.

Asiasanoja: Heikko mittaus, heikko arvo, mittausteoria, standardimalli, tilanmääritys, mittausepätarkkuusrelaatio

# Sisältö

”*Kaiken voi oppia, jos ottaa riittävän pieniä askeleita.*”

– Pekka Lahti

# Johdanto

Kvanttimekaniikka on probabilistinen teoria, jonka matemaattinen perusta on systeemiä kuvaavan Hilbertin avaruuden operaattoriteoria: kyseisessä Hilbertin avaruudessa tilat ja fysikaaliset suureet määritellään sopivina Hilbertin avaruuden lineaarioperaattoreina ja operaattoriarvoisina mittoina. Probabilistisuus ilmenee näiden tilojen ja suureiden määrääminä todennäköisyysmittoina. Juuri tämä probabilistinen operaattoriteoria kytkeytyy fysikaaliseen todellisuuteen kokeellisesti määritettävien mittaustulostilastojen kautta.

Kvanttimekaniikassa mittauksen ja mittaustulostilastojen matemaattista perustaa kuvaa mittausteoria, joka myös vahvasti tukeutuu operaattoriteoriaan. Erityispiirteenä kvanttimekaanisissa mittauksissa klassisiin mittauksiin verrattuna on, että kvanttimekaniikassa suureen mittaus tavallisesti muuttaa mitattavan systeemin tilaa. Kuitenkin osoittautuu, että on olemassa niin sanottuja heikkoja mittauksia, joissa suureen mittaus muuttaa mitattavan systeemin tilaa vain niin vähän, että muutos voidaan mitättömyytensä vuoksi jättää huomioimatta. Haittapuolena näissä mittauksissa on, että myöskään mitattavasta suureesta ei saada juurikaan informaatiota.

Heikkoihin mittauksiin liittyvät läheisesti niin sanotut heikot arvot. Ne molemmat esiteltiin Yakir Aharonovin, David Albertin ja Lev Vaidmanin vuonna 1988 julkaisemassa paperissa *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-*$\frac{1}{2}$ *Particle Can Turn Out to be 100*. Idea tässä alkuperäisjulkaisussa on nimensä mukaisesti osoittaa, että heikkojen mittausten avulla spin-$\frac{1}{2}$ -suureen mittaustuloksissa voidaan päätyä roimasti spin-$\frac{1}{2}$ -suureen tavanomaisen arvoalueen ulkopuolelle. Heikkojen arvojen käyttökohteiden määrä on sittemmin laajentunut ja tällä hetkellä ne ovat aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Yllämainitun nojalla lienee selvää, että tässä tutkielmassa esiteltävien tuloksien ymmärtämiseksi lukijalta vaaditaan ainakin perustietoja Hilbertin avaruuksien operaattoriteoriasta. Tutkielmani ensimmäisen luvun tarkoituksena on lyhyesti esitellä näitä tarvittavia perustuloksia. Toisessa luvussa esittelen kytkentää operaattoriteorian ja kvanttimekaniikan perusteiden välillä. Nämä kaksi lukua toimivat kvanttimekaniikan perusteorian lyhyenä kertauksena, jotka valistunut lukija voi halutessaan sivuuttaa. Kolmannessa luvussa perehdyn myöhemmin tarvittavaan kvanttimekaniikan mittausteoriaan ja esittelen myös heikkojen mittausten sekä jonomittausten perusteita.

Tämän tutkielmani pääaihetta eli heikkoja mittauksia ja heikkoja arvoja analysoin tutkielmani kahdessa viimeisessä luvussa. Neljännessä luvussa esittelen heikot arvot ja erityisesti pyrin selventämään eroa suureen erilaisten arvojen välillä. Lopulta tutkielmani viimeisessä eli viidennessä luvussa annan johdonmukaisen analyysin joistakin keskeisistä heikkoihin mittauksiin ja heikkoihin arvoihin liittyvistä tuloksista.

# 1 Operaattoriteoriaa

Tässä luvussa on jatkon kannalta tarpeellisin osin esitelty Hilbertin avaruuksien operaattoriteoriaa sekä operaattorimittojen integrointiteoriaa ja luvun tarkoituksena on toimia tutkielmani matemaattisena johdantona. Perusteoksena on koko luvun ajan käytetty kirjaa [1] ja luvussa pintapuolisesti esiteltävän operaattoriteorian syvällisemmän ymmärtämisen kannalta kyseinen viite onkin erittäin suositeltavaa luettavaa.

## 1.1 Hilbertin avaruuden operaattoreista

Olkoon $E$ (kompleksinen) vektoriavaruus. Kuvausta $s : E \times E \mapsto \mathbb{C}$ kutsutaan *sisätuloksi* ($E$:ssä) ja avaruuden $E$ sanotaan olevan *sisätuloavaruus* (varustettuna $s$:llä), jos kaikilla $\psi, \varphi, \eta \in E$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ on voimassa:

(S1) $s(\varphi, \lambda\psi + \mu\eta) = \lambda s(\varphi, \psi) + \mu s(\varphi, \eta)$ (*lineaarisuus*)

(S2) $s(\varphi, \psi) = \overline{s(\psi, \varphi)}$ (*konjugaattisymmetrisyys*)

(S3) $s(\varphi, \varphi) \geq 0$ (*positiivisuus*)

(S4) $s(\varphi, \varphi) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi = 0.$ (*degeneroitumattomuus*)

Jatkossa merkitään $s(\varphi, \psi) = \langle\varphi|\psi\rangle$. Sisätulo indusoi vektoriavaruuteen $E$ *normin* kaavan $\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$ kautta, ja normi puolestaan indusoi *metriikan* kaavan $d(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$ kautta.

Jonoa $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \subset E$ kutsutaan *Cauchyn jonoksi*, jos jokaista positiivilukua $\epsilon$ kohti on olemassa sellainen rajaluku $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, että $d(\varphi_n, \varphi_m) < \epsilon$, kaikilla $n, m > n_\epsilon$. Metristä avaruutta, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee kutsutaan *täydelliseksi.*

Sisätulon indusoiman metriikan suhteen täydellistä sisätuloavaruutta kutsutaan *Hilbertin avaruudeksi,* ja merkitään geneerisesti symbolilla $\mathcal{H}$. Tässä tutkielmassa Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ *yksikkövektoreiden joukosta* käytetään merkintää $\mathcal{H}_1 = \{\varphi \in \mathcal{H} | \, \|\varphi\| = 1\}$. Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ *aliavaruudella* tarkoitetaan sen vektorialiavaruutta, eli epätyhjää osajoukkoa, joka sisältää alkioidensa lineaarikombinaatiot. Aliavaruus $\mathscr{D}$ on *tiheä* $\mathcal{H}$:ssa, jos sen sulkeuma on $\mathcal{H}$, eli $\overline{\mathscr{D}} = \mathcal{H}$. Hilbertin avaruuden *kannalla* tarkoitetaan sen vektoriavaruuskantaa, ja kantaa $\mathcal{K}$ sanotaan *ortonormaalikannaksi*, jos $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ja $\langle\psi|\varphi\rangle = 0$ kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{K}$, $\psi \neq \varphi$. Jokaisessa Hilbertin avaruudessa on ortonormaalikanta. Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$ on *separoituva*, jos sillä on numeroituva ortonormaalikanta.

Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ aliavaruudessa $\mathscr{D}(A)$ määriteltyä lineaarikuvausta $A : \mathscr{D}(A) \to \mathcal{H}$ kutsutaan *(Hilbertin avaruuden lineaari-) operaattoriksi.* Operaattoreiden $A_i : \mathscr{D}(A_i) \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$ *summa* $A_1 + A_2$ määritellään $(A_1 + A_2)\varphi = A_1\varphi + A_2\varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A_1 + A_2) = \mathscr{D}(A_1) \cap \mathscr{D}(A_2)$ ja *tulo* eli yhdistetty kuvaus $A_1 \circ A_2 = A_1A_2$ määritellään $(A_1A_2)\varphi = A_1(A_2\varphi)$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A_1A_2) = \{\varphi \in \mathscr{D}(A_2) | A_2\varphi \in \mathscr{D}(A_1)\}$.

Lineaarikuvausta $A : \mathscr{D}(A) \to \mathcal{H}$ kutsutaan *rajoitetuksi (lineaari-)operaattoriksi*, jos on olemassa sellainen kiinteä luku $M \in [0, \infty)$, että $\|A\varphi\| \leq M\|\varphi\|$, kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A)$. Kiinteän luvun $M$ olemassaolo on yhtäpitävää $A$:n jatkuvuuden kanssa. Jatkuvuuden avulla rajoitetun lineaarioperaattorin $A$ määrittelyalue $\mathscr{D}(A)$ voidaan laajentaa käsittämään koko $\mathcal{H}$, siis voidaan asettaa $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Rajoitettujen operaattoreiden joukkoa merkitään $\mathscr{L}(\mathcal{H})$. Rajoitettujen operaattoreiden joukossa määritellään *operaattorinormi* kaavalla $\|A\| = \sup\{\|A\varphi\| | \, \varphi \in \mathcal{H}_1\}$.

Rajoitettu lineaarioperaattori $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on *kompakti*, jos $\mathcal{H}$:n yksikköpallon kuvan sulkeuma $A$:n kuvauksessa, toisin sanoen joukko $\overline{\{A\varphi| \, \|\varphi\| \leq 1\}}$, on kompakti. Kompaktien rajoitettujen lineaarioperaattoreiden joukolle käytetään merkintää $\mathscr{C}(\mathcal{H})$.

Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ duaali $\mathcal{H}^*$ määritellään koostuvan kaikista jatkuvista lineaarikuvauksista $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$. Aivan keskeinen Hilbertin avaruuksien ominaisuus on *itseduaalisuus*, minkä osoittaa seuraavaksi esiteltävä Fréchet-Rieszin lause.

**Lause 1.1** (Fréchet-Rieszin esityslause)**.** Jokaista $f \in \mathcal{H}^*$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $\psi \in \mathcal{H}$ siten, että $f(\varphi) = \langle\psi|\varphi\rangle$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Lisäksi $\|f\|_\infty := \sup\{f(\varphi) \, | \, \varphi \in \mathcal{H} \; \|\varphi\| \leq 1\} = \|\psi\|$. [1, s.18] □

Erityisesti edellisestä lauseesta seuraa, että jokaisella $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on yksikäsitteinen duaalioperaattori, eli pian määriteltävä adjungaatti, olemassa $\mathscr{L}(\mathcal{H})$:ssa.

Operaattori $A$ on *tiheästi määritelty*, jos sen määrittelyalue $\mathscr{D}(A)$ on tiheä $\mathcal{H}$:ssa. Tiheästi määritellyn operaattorin $A$ *adjungaatiksi* $A^*$ kutsutaan sitä yksikäsitteisesti määrättyä operaattoria, jolle pätee

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}(A^*) = \{\psi \in \mathcal{H} | \varphi \mapsto \langle \psi | A\varphi \rangle \text{ on jatkuva } \mathscr{D}(A)\text{:ssa}\} \\ &\langle A^*\psi|\varphi\rangle = \langle \psi|A\varphi\rangle \quad \forall \psi \in \mathscr{D}(A^*), \varphi \in \mathscr{D}(A). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Operaattori on *itseadjungoitu*, jos $A = A^*$, eli $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(A^*)$ ja $A\varphi = A^*\varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A)$. Rajoitettujen itseadjungoitujen operaattoreiden joukkoa merkitään lyhyesti $\mathscr{L}_s(\mathcal{H})$. Operaattoria $U \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ sanotaan *unitaariseksi*, jos $UU^* = I = U^*U$, ja kaikkien unitaarioperaattoreiden joukkoa merkitään $\mathscr{U}(\mathcal{H})$.

Operaattoria $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ sanotaan *positiiviseksi*, jos $\langle \varphi|A\varphi\rangle \geq 0$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, jolloin käytetään merkintää $A \geq 0$. Jokainen positiivinen operaattori on myös itseadjungoitu, ja positiivisten operaattoreiden joukkoa merkitään $\mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$.

**Esimerkki 1.2.** Projektio-operaattorit $P \in \mathscr{P}(\mathcal{H}) = \{P \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) | P^* = P = P^2\}$ ovat kaikki positiivisia operaattoreita. Vektoreiden $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ määräämästä kuvauksesta $\varphi \mapsto \langle \psi|\varphi\rangle\phi$ saatavalle lineaarioperaattorille käytetään merkintää $|\phi\rangle\langle\psi|$. Operaattori $|\phi\rangle\langle\psi|$ ei (yleisesti) ole positiivinen, sillä se ei ole edes itseadjungoitu. Operaattorista $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ $\varphi \in \mathcal{H}_1$, eli projektiosta vektorin $\varphi$ virittämälle yksiulotteiselle aliavaruudelle, käytetään myös merkintää $P[\varphi]$.

Jokaista operaattoria $A \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $B \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$, jolle $A = B^2$, jolloin merkitään $B = \sqrt{A}$ ja operaattoria $B$ kutsutaan $A$:n *neliöjuureksi*. Operaattorin $A$ *itseisarvolla* tarkoitetaan positiivista operaattoria $|A| = \sqrt{A^*A}$.

Olkoon $\mathcal{K}$ mielivaltainen Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaalikanta. Kaikilla $T \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$ merkitään

$$\operatorname{tr}[T] = \sum_{\xi \in \mathcal{K}} \langle \xi | T\xi \rangle \quad (\leq \infty). \tag{1.1.2}$$

Joukkoa $\{T \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) | \operatorname{tr}[|T|] < \infty\}$ kutsutaan *jälkiluokaksi,* merkitään $\mathscr{T}(\mathcal{H})$, ja sen alkioita kutsutaan *jälkiluokkaoperaattoreiksi.* $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ on $\mathscr{L}(\mathcal{H})$:n vektorialiavaruus ja kaikilla $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$, $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on $TA \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ sekä $T^* \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$. Tällöin myös $(T^*A^*)^* = AT \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$. Jälkiluokka $\mathscr{T}(\mathcal{H})$ on siis $\mathscr{L}(\mathcal{H})$:n **-ihanne.*

Operaattorin $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ *jäljeksi* kutsutaan lukua $\operatorname{tr}[T] = \sum_{\xi \in \mathcal{K}} \langle \xi | T\xi \rangle$. Kuvaus $\operatorname{tr} : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ on selvästi lineaarinen. Seuraavaan lauseeseen on kerätty joitakin jäljen ominaisuuksia.

**Lause 1.3.** (i) Operaattorin $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ jälki on ortonormaalikannan $\mathcal{K}$ valinnasta riippumaton, ts.

$$\sum_{\xi \in \mathcal{K}} \langle \xi | T\xi \rangle = \sum_{\zeta \in \mathcal{L}} \langle \zeta | T\zeta \rangle, \tag{1.1.3}$$

missä $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{L}$ ovat mielivaltaisia Hilbertin avaruuden ortonormaalikantoja.

(ii) Jälki on unitaarisesti invariantti, ts. $\operatorname{tr}[UTU^*] = \operatorname{tr}[T]$ kaikilla $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$, $U \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$.

(iii) Jälki on syklinen, ts. $\operatorname{tr}[AT] = \operatorname{tr}[TA]$ kaikilla $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$.

[1, s.113] □

Kuvaus $\mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}^+$, $T \mapsto \operatorname{tr}[|T|]$ määrittelee *jälkinormin* jälkiluokassa ja merkitään $\|T\|_{\mathrm{tr}} := \operatorname{tr}[|T|]$. Jälkiluokka on jälkinormin suhteen täydellinen normiavaruus eli pari $(\mathscr{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathrm{tr}})$ on Banachin avaruus. Jälkinormi on operaattorinormia karkeampi, toisin sanoen $\|T\| \leq \|T\|_{\mathrm{tr}}$ kaikilla $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$. Erityisesti kaikilla $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ ja $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ pätee

$$|\operatorname{tr}[AT]| \leq \|A\| \|T\|_{\mathrm{tr}}. \tag{1.1.4}$$

Määritellään kaikilla $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ kuvaus $f_A : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$; $f_A(T) = \mathrm{tr}\,[A\,T]$. Kuvaus $A \mapsto f_A$ määrittelee lineaarisen isometrisen bijektion avaruudelta $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ Banachin avaruuden $(\mathscr{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{\mathrm{tr}})$ duaalille: erityisesti siis jokaista kyseisen duaalin alkiota $f : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, siten että $f = f_A$. Tuloksena saadaan tärkeä dualiteetti $\mathscr{L}(\mathcal{H}) \simeq \mathscr{T}(\mathcal{H})^*$, missä dualiteetin välittävät edellä olevat kuvaukset $A \mapsto f_A$. Tämän dualiteetin välityksellä jokaista rajoitettua lineaarikuvausta $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$ vastaa yksikäsitteinen lineaarinen *duaalikuvaus*[1] $\Phi^* : \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, joka täysin määräytyy relaatiosta

$$f_A(\Phi(T)) = \mathrm{tr}\,[A\,\Phi(T)] = \mathrm{tr}\,[\Phi^*(A)\,T] = f_{\Phi^*(A)}(T) \tag{1.1.5}$$

kaikilla $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$.

## 1.2 Integrointia operaattorimitan suhteen

Tässä alaluvussa esitellään lyhyesti operaattorimitan suhteen integrointia ja siihen liittyviä perustuloksia. Koko tutkielman ajan $\Omega$ on jokin epätyhjä topologinen avaruus ja $\mathscr{A} \subset 2^\Omega$ on jokin siihen liittyvä $\sigma$-algebra. Erityisesti Borelin $\sigma$-algebrasta, eli suppeimmasta avaruuden $\Omega$ avoimet joukot sisältävästä $\sigma$-algebrasta, käytetään merkintää $\mathcal{B}(\Omega)$.

Joukkofunktio $p : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ on *kompleksimitta*, jos $p(\emptyset) = 0$ ja jos kaikilla erillisillä jonoilla $(X_i)_{i=1}^\infty \subset \mathscr{A}$

$$p(\dot\cup_{i=1}^\infty X_i) = \sum_{i=1}^\infty p(X_i). \tag*{($\sigma$-additiivisuus)}$$

Se on *todennäköisyysmitta*, jos $p(X) \geq 0$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$ ja jos lisäksi $p(\Omega) = 1$. Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ operaattoriarvoinen kuvaus. Kaikilla $X \in \mathscr{A}, \varphi, \psi \in \mathcal{H}$ määritellään $E_{\psi,\varphi}(X) := \langle\psi|E(X)\varphi\rangle$; tapauksessa $E_{\varphi,\varphi}$ merkitään lyhyesti $E_\varphi$. Kuvausta $E$ kutsutaan

[1] Vastaavasti lineaarikuvausta $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$ kutsutaan sen duaalikuvauksen $\Phi^* : \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *preduaalikuvaukseksi.*

(i) *operaattorimitaksi*, jos kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ $E_{\psi,\varphi}$ on kompleksimitta,

(ii) *positiivioperaattorimitaksi*, jos lisäksi $E(X) \geq 0$, eli $E_\varphi(X) \geq 0$, kaikilla $X \in \mathscr{A}$ ja $\varphi \in \mathcal{H}$.

(iii) Positiivioperaattorimitta on *semispektraalimitta*, jos kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ $E_\varphi$ on todennäköisyysmitta,

(iv) ja jos lisäksi $E(X) \in \mathscr{P}(\mathcal{H})$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, sitä kutsutaan *spektraalimitaksi*.

Seuraava lemma antaa yhteyden positiivioperaattori- ja spektraalimittojen välillä.

**Lemma 1.4.** Positiivioperaattorimitalle $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(i) $E(X \cap Y) = E(X)E(Y)$ kaikilla $X, Y \in \mathscr{A}$, (*multiplikatiivisuus*)

(ii) $E(X)^2 = E(X)$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$. (*idempotenttisuus*)

[1, s.43] □

Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ operaattorimitta ja $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{X_i}$ $\mathscr{A}$-yksinkertainen funktio, eli $X_i \in \mathscr{A}$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, jos $i \neq j$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ kaikilla $i = 1, ..., n$, ja $\chi_{X_i}$ joukon $X_i$ karakteristinen funktio. Silloin $f$:n integraali $E$:n suhteen määritellään operaattorina

$$\int_\Omega f\, dE = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i). \tag{1.2.1}$$

Merkitään symbolilla $\mathcal{F}_\mathscr{A}$ sup-normin suhteen rajoitettujen $\mathscr{A}$-mitallisten funktioiden joukkoa. Seuraavaa lemmaa apuna käyttäen voimme määritellä myös $\mathcal{F}_\mathscr{A}$-funktioiden integroinnin operaattorimitan suhteen.

**Lemma 1.5.** Olkoon $f \in \mathcal{F}_\mathscr{A}$. Silloin on olemassa jono yksinkertaisia funktioita $f_n$, siten että jono suppenee tasaisesti kohti $f$:ää $\Omega$:ssa ja $|f_n(\omega)| \leq |f(\omega)|$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Erityisesti yksinkertaisten funktioiden joukko on tiheä $\mathcal{F}_\mathscr{A}$:ssa. [1, s.47] □

Edellisen lemman ja $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ täydellisyyden nojalla kuvaus $f \mapsto \int f\,dE$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla laajentaa yksinkertaisten funktioiden joukolta koskemaan myös rajoitettuja funktioita. Seuraava tulos on keskeinen positiivioperaattorimittoja koskeva integraalimuunnostulos.

**Lemma 1.6.** Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ positiivioperaattorimitta, $Y$ joukko ja $\mathscr{B} \subset 2^Y$ $\sigma$-algebra. Olkoon $g : \Omega \to Y$ mitallinen funktio, eli $g^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ kaikille $B \in \mathscr{B}$. Silloin kuvaus $E^g : \mathscr{B} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, määriteltynä $E^g(B) = E(g^{-1}(B))$, on positiivioperaattorimitta, ja kaikille rajoitetuille mitallisille funktioille $f$ pätee

$$\int_Y f\,dE^g = \int_\Omega (f \circ g)\,dE \tag{1.2.2}$$

[1, s.49] □

Rajoitetun funktion integrointi operaattorimitan suhteen tuottaa aina rajoitetun operaattorin. Nimittäin positiivioperaattorimitalle $E$ pätee $\|\int f\,dE\| \leq 2\|E(\Omega)\| \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| < \infty$ kaikilla $f \in \mathcal{F}_{\mathscr{A}}$. Toisaalta, koska jokainen kompleksimitta $\mu$ voidaan ilmaista neljän positiivisen mitan $\eta_i \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$, $i = 1, 2, 3, 4$ avulla $\mu = (\eta_1 - \eta_2) + \imath(\eta_3 - \eta_4)$, niin kolmioepäyhtälön ja ylläolevan nojalla seuraa, että $\|\int f\,dE\| \leq \|\int f\,dE_1\| + \|\int f\,dE_2\| + \|\int f\,dE_3\| + \|\int f\,dE_4\| < \infty$, missä $E_i : \mathscr{A} \to \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$, $i = 1, 2, 3, 4$ ovat positiivioperaattorimittoja.

Myös rajoittamatonta ($\mathscr{A}$-mitallista) funktiota voidaan integroida operaattorimitan suhteen ja tuloksena saadaan luonnollisestikin rajoittamaton operaattori. Seuraava lause konkretisoi tilanteen.

**Lause 1.7.** Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ operaattorimitta, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathscr{A}$-mitallinen funktio ja $\varphi \in \mathscr{D}(f, E) := \{\varphi \in \mathcal{H} |\, f\, E_{\psi,\varphi}\text{-integroituva kaikilla}\, \psi \in \mathcal{H}\}$. Silloin on olemassa yksikäsitteinen vektori $L(f, E)\varphi \in \mathcal{H}$ siten, että

$$\langle\psi|L(f, E)\varphi\rangle = \int f\,dE_{\psi,\varphi}, \tag{1.2.3}$$

kaikilla $\psi \in \mathcal{H}$. $\mathscr{D}(f, E)$ on $\mathcal{H}$:n aliavaruus ja näin määräytyvää lineaarioperaattoria

$L(f,E) : \mathscr{D}(f,E) \to \mathcal{H}$ kutsutaan $f$:n integraaliksi operaattorimitan $E$ suhteen ja merkitään $L(f,E) = \int f dE$. [2, s.328] □

Merkitään $\widetilde{\mathscr{D}}(f,E)$:llä niiden vektoreiden $\varphi \in \mathcal{H}$ joukkoa, joilla funktio $|f|^2$ on $E_\varphi$-integroituva.

**Lemma 1.8.** Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ operaattorimitta, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mitallinen funktio.

(i) Jos $E(X) \geq 0$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, niin $\widetilde{\mathscr{D}}(f,E)$ on $\mathscr{D}(f,E)$:n sisältyvä $\mathcal{H}$:n aliavaruus.

(ii) Jos $E(X) \in \mathscr{P}(\mathcal{H})$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, niin $\widetilde{\mathscr{D}}(f,E) = \mathscr{D}(f,E)$.

[2, s.328] □

Edellisen lemman inkluusio $\widetilde{\mathscr{D}}(f,E) \subset \mathscr{D}(f,E)$ voi olla aito [2, s.330].

**Lemma 1.9.** Olkoon $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ operaattorimitta. Jos $E(X) = E(X)^*$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$ ja $f$ on reaalinen mitallinen funktio, niin $L(f,E)$ on symmetrinen operaattori, eli $\langle\psi|L(f,E)\varphi\rangle = \langle L(f,E)\psi|\varphi\rangle$ kaikilla $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(f,E)$. [2, s.330] □

### 1.2.1 Spektraaliteoriaa

Spektraalimitat ovat tärkeässä roolissa kvanttimekaniikassa. Osoittautuu, että jokainen reaalinen spektraalimitta indusoi yksikäsitteisen itseadjungoidun operaattorin, ja jokaista itseadjungoitua operaattoria kohti on olemassa yksikäsitteinen reaalinen spektraalimitta. Tämän osoittaa itseadjungoitujen operaattoreiden *spektraalilause*, joka esitellään pian. Sitä ennen esitellään kuitenkin itse spektrin käsite.

Olkoon $A$ Hilbertin avaruuden operaattori. $A$:n *resolventiksi* $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ määritellään niiden pisteiden $z \in \mathbb{C}$ joukko, joille on olemassa rajoitettu operaattori $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ siten, että $B(zI - A) = I|_{\mathscr{D}(A)}$ ja $(zI - A)B = I$, toisin sanoen resolventti $\rho(A)$ on niiden pisteiden joukko, joilla operaattorilla $(zI - A)$ on olemassa rajoitettu käänteisoperaattori. Edelleen $A$:n *spektri* $\sigma(A)$ määritellään $A$:n resolventtijoukon komplementtina eli $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$. $A$:n ollessa itseadjungoitu operaattori sen spektri on kokonaisuudessaan reaalinen, ts. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Luku $a \in \mathbb{C}$ on *ominaisarvo*, jos on olemassa $\varphi_a \in \mathscr{D}(A)\backslash\{0\}$, siten että $A\varphi_a = a\varphi_a$. Vektoreita $\varphi_a$ kutsutaan tällöin $A$:n ominaisarvoon $a$ liittyväksi ominaisvektoreiksi, ja ominaisarvoon $a$ liittyvien ominaisvektoreiden virittämää (suljettua) aliavaruutta, *ominaisavaruutta*, merkitään $M_a$. Itse ominaisarvojen joukkoa merkitään $\sigma_p(A)$, ja sitä kutsutaan myös $A$:n *pistespektriksi*. Selvästi $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. $A$:n *jatkuvaksi spektriksi* kutsutaan $A$:n pistespektrin $\sigma_p(A)$ komplementtia $A$:n spektrissä, ja sitä merkitään symbolilla $\sigma_c(A)$; toisin sanoen $\sigma_c(A) = \sigma(A)\backslash\sigma_p(A)$.

**Lause 1.10** (Spektraalilause)**.** Olkoon $A$ itseadjungoitu operaattori. Silloin on olemassa yksikäsitteinen spektraalimitta $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, siten että

$$\mathscr{D}(A) = \widetilde{\mathscr{D}}(id, E) \tag{1.2.4}$$

ja kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A)$

$$\langle\varphi|A\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} x\, dE_\varphi(x). \tag{1.2.5}$$

Tällöin merkitään $A = \int_{\mathbb{R}} x\, dE(x)$, ja oikeaa puolta kutsutaan itseadjungoidun operaattorin $A$ *spektraalihajotelmaksi*. [1, s.72]

□

Edellisen lauseen tilanteessa kutsumme spektraalimittaa $E$ itseadjungoituun operaattoriin $A$ liittyväksi spektraalimitaksi: korostaaksemme tätä merkitsemme jatkossa $A$:han liittyvää spektraalimittaa symbolilla $E^A$.

(Semi-)spektraalimitan $E$ *tueksi* kutsutaan laajimman ehdon $E(U) = 0$ täyttävää avoimen joukon $U \subset \Omega$ komplementtia, ja sitä merkitään $\mathrm{supp}(E)$. Toisin sanoen (semi-)spektraalimitan $E$ tuki on suppein suljettu joukko, jolle $E(\mathrm{supp}(E)) = I$.

**Lemma 1.11.** $\mathrm{supp}(E^A) = \sigma(A)$. [1, s.75] □

Spektraalilauseessa riittäisi integrointi $A$:n spektrin $\sigma(A)$ yli, sillä edellisen lemman mukaisesti integrointi yli spektrin $\sigma(A) = \mathrm{supp}(E^A)$ komplementin tuottaa vain nollan. Siis: $A = \int_{\sigma(A)} x\, dE^A(x)$. Nyt hajotelmaa voi jatkaa piste- ja jatkuvan spektrin avulla vielä pidemmälle:

$$A = \sum_{\sigma_p(A)} a\, P_a + \int_{\sigma_c(A)} x\, dE(x), \tag{1.2.6}$$

missä $P_a$ on projektio $A$:n ominaisarvoon $a$ liittyvälle ominaisavaruudelle $M_a$. Kompaktin itseadjungoidun operaattorin spektrin nollasta eroava osa koostuu ainoastaan sen ominaisarvoista, joten kaikilla $A \in \mathscr{C}_s(\mathcal{H})$ spektraalilause on yksinkertaista muotoa $A = \sum_{\sigma_p(A)} a\, P_a$.

Spektraalilauseelle on voimassa myös käänteinen tulos nimittäin jokainen reaalinen spektraalimitta määrää aina erään yksikäsitteisen itseadjungoidun operaattorin.

**Lause 1.12.** Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ spektraalimitta. Silloin on olemassa yksikäsitteinen itseadjungoitu operaattori $A$, jolle $E = E^A$. Toisin sanoen joukko $\widetilde{\mathscr{D}}(id, E)$ on $\mathcal{H}$:n tiheä aliavaruus ja on olemassa yksikäsitteisesti määrätty itseadjungoitu operaattori $A$, jolle $\mathscr{D}(A) = \widetilde{\mathscr{D}}(id, E)$, ja

$$\langle \varphi | A\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x\, dE_{\varphi}(x), \tag{1.2.7}$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}$. [1, s.66] □

Edellisen alaluvun mukaisesti $\mathscr{A}$-mitallisia funktioita voidaan integroida myös spektraalimitan suhteen. Erityisen tärkeitä ovat itseadjungoidun $A$ operaattorin funktiot $f(A)$. Olkoon $E^A$ itseadjungoitua operaattoria $A$ vastaava spektraalimitta. ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$-)mitallisilla funktioilla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään $f(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dE^A(x)$, jolloin $f(A)$ on eräs yksikäsitteinen operaattori. Seuraavaan lemmaan on kerätty joitakin oleellisia tuloksia.

**Lemma 1.13.** Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mitallinen funktio ja $A$ itseadjungoitu operaattori.

(i) Jos $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, niin $f(A) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ on rajoitettu operaattori, jolle $\|f(A)\| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

(ii) Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on rajoittamaton funktio, niin $f(A) : \mathscr{D}(f(A)) \to \mathcal{H}$ on rajoittamaton itseadjungoitu operaattori, jolle $\mathscr{D}(f(A)) = \mathscr{D}(f, E^A) = \widetilde{\mathscr{D}}(f, E^A)$ on tiheä $\mathcal{H}$:n aliavaruus.

(iii) $f(A)^* = \overline{f}(A)$. Erityisesti $f(A)$ on itseadjungoitu silloin ja vain silloin, kun $f$ on reaaliarvoinen.

[1, s.47, 66] □

### 1.2.2 Yksiparametrinen unitaariryhmä

*Hermiten funktioiden* virittämässä aliavaruudessa $L_0 \subset L^2(\mathbb{R})$ määritellään *Fourier-muunnos* kaavalla

$$(\mathcal{F}_0 f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath xp} f(x)\, dx \tag{1.2.8}$$

kaikilla $f \in L_0$. Koska jokainen $L_0$:n alkio on Lebesgue integroituva, kyseinen integraali on hyvin määritelty. Kuvaus $\mathcal{F}_0 : L_0 \to L^2(\mathbb{R})$ on integraalin lineaarisuuden nojalla lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\|\mathcal{F}_0 f\| = \|f\|$ kaikilla $f \in L_0$. Koska $L_0$ on tiheä $L^2(\mathbb{R})$:n aliavaruus, lineaarikuvaus $\mathcal{F}_0$ laajenee hyvin määritellyksi rajoitetuksi lineaarioperaattoriksi $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, joten myös $L^2(\mathbb{R})$:ssä voidaan määritellä vektorin Fourier-muunnos kaavan (1.2.8) tapaan:

$$(\mathcal{F}\varphi)(p) \equiv \widehat{\varphi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath xp} \varphi(x)\, dx. \tag{1.2.9}$$

Huomautettakoon, että vaikka Fourier-muunnos laajeneekin koko avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, niin ylläoleva pisteittäinen määritelmä pätee, vain kun $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Hieman samaan tapaan määritellään spektraalimitan $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *Fourier-Stieltjes-muunnos*:

$$\widehat{E}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath xt}\, dE(t). \tag{1.2.10}$$

$\widehat{E}(x) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, sillä kuvaus $t \mapsto e^{\imath xt}$ on rajoitettu kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Itseasiassa $\widehat{E}(x) \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, sillä $\widehat{E}(x)^*\widehat{E}(x) = \widehat{E}(x)\widehat{E}(x)^* = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-\imath xt}e^{\imath xt'}\, dE(t)\, dE(t') \stackrel{1.4}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath xt}e^{\imath xt}\, dE(t) = I$. Edelleen kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ $\widehat{E}(x+y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath xt}e^{\imath yt}\, dE(t) = \widehat{E}(x)\widehat{E}(y)$, joten $\widehat{E}$ on ryhmähomomorfismi additiiviselta ryhmältä $\mathbb{R}$ multiplikatiiviselle ryhmälle $\mathscr{U}(\mathcal{H})$. Erityisesti $\widehat{E}(0) = I$.

Olkoon $A$ spektraalimittaan $E$ yksikäsitteisesti liittyvä itseadjungoitu operaattori, jolloin edellisen alaluvun mukaisesti $\widehat{E}(x) = e^{ixA}$.

**Lemma 1.14.** (i) Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to x_0} \widehat{E}(x)\varphi = \widehat{E}(x_0)\varphi$.

(ii) $\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{E}(h)\varphi - \varphi}{h} = \imath A\varphi$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(A)$.

(iii) Jos $\varphi \in \mathcal{H}$ on sellainen, että raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{\widehat{E}(h)\varphi - \varphi}{h}$ on olemassa, niin $\varphi \in \mathscr{D}(A)$.

[1, s.80] □

Kuvausta $\mathbb{R} \ni x \mapsto U(x) \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$ sanotaan *vahvasti jatkuvaksi yksiparametriseksi unitaariryhmäksi*, jos $U(x) \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, $U(x+y) = U(x)U(y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $\lim_{x\to x_0} \widehat{E}(x)\varphi = \widehat{E}(x_0)\varphi$ kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{H}$. Edellä todetun mukaan $\widehat{E}$ on eräs vahvasti jatkuva yksiparametrinen unitaariryhmä ja se siis syntyy oleellisesti eräästä yksikäsitteisestä itseadjungoidusta operaattorista $A$. Seuraavaksi esiteltävä Marshall Stonen lause osoittaa, että jokainen vahvasti jatkuva yksiparametrinen unitaariryhmä on juuri tällaista muotoa.

**Lause 1.15** (Stonen lause)**.** Olkoon $\mathbb{R} \ni x \mapsto U(x) \in \mathscr{U}(\mathcal{H})$ vahvasti jatkuva yksiparametrinen unitaariryhmä. Silloin on olemassa yksikäsitteinen itseadjungoitu operaattori $A$ siten, että $U(x) = e^{ixA}$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$. [1, s.80] □

### 1.2.3 Momenteista

Eräs tärkeä esimerkki rajoittamattomien funktioiden integroinnista ovat ns. *momenttioperaattorit*: niistä erääseen ollaan tutustuttu jo spektraalilauseen yhteydessä, nimittäin jokainen itseadjungoitu operaattori on sitä vastaavan spektraalimitan ensimmäinen momentti, $A = E^A[1]$. Tämän alaluvun ajaksi valitaan pohja-avaruudeksi $\mathbb{R}$ ja siihen liittyväksi $\sigma$-algebraksi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Merkitään jatkossa kuvausta $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, lyhyesti $x^k$. Todennäköisyysmitan $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ *k:s momentti* $\mu[k]$ määritellään funktion $x^k$ integraalina $\mu$:n suhteen: $\mu[k] = \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mu$.

Semispektraali- ja spektraalimitan momentit määritellään samaan tapaan: funktion $x^k$ integraali semispektraalimitan $E$ suhteen on sen *k:s momenttioperaattori* $E[k] := \int_{\mathbb{R}} x^k \, dE$, määriteltynä määrittelyalueessaan $\mathscr{D}(x^k, E) = \{\varphi \in \mathcal{H} | \, x^k \, E_{\psi,\varphi}\text{-integroituva kaikilla } \psi \in \mathcal{H}\}$. Erityisesti spektraalimitan $E^A$ tapauksessa $\mathscr{D}(x^k, E^A)$ on aina tiheä $\mathcal{H}$:ssa, ja $E^A[k]$ on itseadjungoitu; spektraalimitan multiplikatiivisuudesta ja spektraalilauseesta 1.10 seuraa että $E^A[k] = E^A[1]^k = A^k$. $E$:n ollessa semispektraalimitta $E[k]$ on lemman 1.9 nojalla kylläkin aina symmetrinen operaattori, mutta ei välttämättä itseadjungoitu: yleisesti $E[k]$ ei ole edes tiheästi määritelty. Kuitenkin $E[1]$:n ollessa itseadjungoitu voidaan osoittaa seuraava käyttökelpoinen tulos.

**Lemma 1.16.** Semispektraalimitalle $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, jonka ensimmäinen momentti $E[1]$ on itseadjungoitu, seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(i) $E$ on spektraalimitta,

(ii) $E[2] = E[1]^2$

(iii) $\int x^2 \, dE_\varphi = \|E[1]\varphi\|^2$, kaikilla $\varphi \in \widetilde{\mathscr{D}}(x, E)$. [3, s.17] □

Myöhemmin tarvitaan vielä seuraavaa semispektraalimittojen momentteja koskevaa tulosta.

**Lemma 1.17.** Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ semispektraalimitta. Määritellään $E_\lambda(X) = E(\lambda X)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Silloin myös $E_\lambda$ on semispektraalimitta, ja

$$E_\lambda[k] = \frac{1}{\lambda^k} E[k]. \tag{1.2.11}$$

*Todistus.* Lemman 1.6 nojalla $E_\lambda$ on semispektraalimitta ja

$$E_\lambda[k] = \int_{\mathbb{R}} x^k \, dE(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^k} \int_{\mathbb{R}} x^k \, dE(x) = \frac{1}{\lambda^k} E[k]. \tag{1.2.12}$$

□

## 1.3 Mittojen konvoluutio

Tässä alaluvussa konstruktoidaan kahden mitan välinen konvoluutio tulomitan avulla, sekä esitellään siihen liittyviä tuloksia tarpeellisilta osin. Tulomittoja on huolellisesti käsitelty lähteessä [4] ja erityisesti kompleksimittojen konvoluutiota on käsitelty lähteessä [5], ja ne ovat tämän alaluvun peruslähteet.

Olkoon $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kaksi kompleksimittaa. Näiden mittojen *tulomitta* $\mu \times \nu$ on yksikäsitteinen (karteesisen tuloavaruuden $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ generoimassa) $\sigma$-algebrassa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ määritelty mitta, jolle pätee:

$$(\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y), \tag{1.3.1}$$

kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

**Lause 1.18.** Olkoon $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kaksi kompleksimittaa. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mu \times \nu$-integroituva funktio. Silloin $\nu$-melkein kaikilla $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y)$ on $\mu$-integroituva. Lisäksi kuvaus $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, \cdot)\, d\mu(x)$ on $\nu$-integroituva, ja

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y). \tag{1.3.2}$$

[4, s.193] □

Kompleksimittojen $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ välinen *konvoluutio* $\mu * \nu$ määritellään tulomitan avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)(X) &= (\mu \times \nu)(\{(x, y) |\, x + y \in X\}) \\ &= \int \chi_X(x + y)\, d(\mu \times \nu)(x, y), \quad X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

**Lemma 1.19.** Kompleksimittojen $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ konvoluutio $\mu * \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ on kompleksimitta.

*Todistus.* Olkoon $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = x+y$. Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ yhdistetty kuvaus $\chi_X \circ \phi$ on rajoitettu ja mitallinen, ja siten integroituva tulomitan $\mu \times \nu$ suhteen, joten konvoluutio $\mu * \nu$ on edellisen lauseen 1.18 nojalla hyvin määritelty.

Selvästi $(\mu * \nu)(\emptyset) = 0$. Tarkastetaan vielä $\sigma$-additiivisuus. Olkoon $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ jono erillisiä joukkoja. Tulomitta $(\mu \times \nu)$ voidaan jakaa positiivisten mittojen $\eta_j$, $j = 1,2,3,4$ osiksi, siten että $(\mu \times \nu) = \eta_1 - \eta_2 + \imath\,(\eta_3 - \eta_4)$. Koska funktio $\chi_X$ on positiivinen ja mitallinen kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $\chi_{\dot\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}$, niin *monotonisen konvergenssin lauseen* nojalla kullekin $j = 1,2,3,4$ pätee

$$\int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d\eta_j(x,y) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} \int \chi_{X_i}\,d\eta_j(x,y). \tag{1.3.4}$$

Tästä väite seuraa, sillä nyt

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)(\dot\cup X_i) &= \int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) \\
&= \int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d\eta_1(x,y) - \int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d\eta_2(x,y) \\
&\quad + \imath\left( \int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d\eta_3(x,y) - \int \sum_{i\in\mathbb{N}} \chi_{X_i}(x+y)\,d\eta_4(x,y) \right) \\
&\overset{(1.3.4)}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int \chi_{X_i}(x+y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mu * \nu)(X_i).
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

□

**Lemma 1.20.** Olkoot $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kaksi kompleksimittaa ja $k \in \mathbb{N}$.

(i) Borel-funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on $\mu * \nu$-integroituva, jos kuvaus $(x,y) \mapsto f(x+y)$ on integroituva tulomitan $\mu \times \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$ suhteen. Tällöin

$$\int f(x)\,d(\mu * \nu)(x) = \int f(x+y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) \tag{1.3.6}$$

(ii) Funktio $(x,y) \mapsto (x+y)^k$ on $\mu \times \nu$ integroituva tarkalleen silloin, kun funktio

$x \mapsto x^k$ on sekä $\mu$- että $\nu$-integroituva. Silloin

$$\int (x+y)^k \, d(\mu \times \nu) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \left( \int x^{k-n} \, d\mu(x) \right) \left( \int y^n \, d\nu(y) \right). \quad (1.3.7)$$

[5, s.2] □

**Lemma 1.21.** Olkoot $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ kompleksimittoja. Silloin

$$(\mu * \nu)(X) = \int_{\mathbb{R}} \mu(X-y) \, d\nu(y). \quad (1.3.8)$$

*Todistus.* [2] Olkoon $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = x+y$. Kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ yhdistetty kuvaus $\chi_X \circ \phi$ on rajoitettu ja mitallinen, ja siten integroituva tulomitan $\mu \times \nu$ suhteen. Täten lauseen 1.18 nojalla kuvaus

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \mu(X-y) = \int \chi_{X-y}(x) \, d\mu(x) = \int \chi_X(x+y) \, d\mu(x) \in \mathbb{C} \quad (1.3.9)$$

on $\nu$-integroituva. Edelleen edellisen lemman ja lauseen 1.18 nojalla kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(X) &= \int \chi_X(x) \, d(\mu * \nu)(x) = \int \chi_X(x+y) \, d(\mu \times \nu)(x,y) \\ &= \int \left( \int \chi_X(x+y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int \mu(X-y) \, d\nu(y). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

□

Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ semispektraalimitta ja olkoon $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ todennäköisyysmitta. Seskvilineaarimuoto

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int \mu(X-y) \, dE_{\psi,\varphi}(y) \quad (1.3.11)$$

[2] Todistus on oleellisesti peräisin lähteestä [5].

on rajoitettu kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sillä

$$|\int \mu(X-y)\, dE_{\psi,\varphi}(y)| \leq \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\int \mu(A-y)\, dE_{\psi,\varphi}(y)| < \infty \tag{1.3.12}$$

[1, s.33], joten ylläolevien mittojen välinen konvoluutio $\mu * E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ voidaan edellisen lemman nojalla määritellä muodossa $\langle\psi|(\mu * E)(X)\varphi\rangle := (\mu * E_{\psi,\varphi})(X)$, kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; jatkossa merkintä $\mu * E$ ymmärretään aina tässä mielessä.

**Lemma 1.22.** Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ semispektraalimitta ja $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ todennäköisyysmitta. Silloin $\mu * E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on semispektraalimitta.

*Todistus.* Lemman 1.19 nojalla $\mu * E_{\psi,\varphi}$ on kompleksimitta kaikilla $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$. Toisaalta

$$(\mu * E_\varphi)(X) = \int \chi_X(x+y)\, d(\mu \times E_\varphi)(x,y) \tag{1.3.13}$$

on (positiivisen funktion integraalina positiivisen mitan suhteen) positiivinen kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja

$$(\mu * E_\varphi)(\mathbb{R}) = \int \mu(\mathbb{R}-y)\, dE_\varphi(y) = 1 \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathcal{H}_1, \tag{1.3.14}$$

mikä osoittaa väitteen. □

# 2 Kvanttimekaniikan todennäköisyysrakenne

Kvanttimekaniikan perusta luotiin erittäin lyhyen ajanjakson aikana vuosina 1925-1926 Werner Heisenbergin ja Erwin Schrödingerin toimesta ja teorian perusteet kehittyivät pitkälti lopulliseen muotoonsa myöhemmin 1920-luvun loppupuolen aikana Max Bornin, Pascual Jordanin, Paul Diracin, Niels Bohrin sekä muiden aikalaisten töiden tuloksena. Erityisesti John von Neumannin työpanoksen ansiosta tämän varhaisen kvanttiteorian matemaattiset perusteet selkeytyivät huomattavasti vuoteen 1932 mennessä. Vaikka kvanttiteoria on sittemmin tietenkin laajentunut – eikä toki vieläkään ole valmis – niin nyt jo yli 80 vuotta vanhan perustan voidaan sanoa olevan erittäin vahvalla pohjalla: lukuisat kvanttimekaniikan puolesta ja vastaan tehdyt kokeelliset työt ovat poikkeuksetta osoittaneet teorian olevan pätevä. [6]

Tässä luvussa esitellään, kuinka edellä hahmoteltu Hilbertin avaruus -teoria liittyy kvanttimekaniikan perusteoriaan. Seuraavaksi annettava lyhyt katsaus käsittelee tätä laajaa kokonaisuutta vain tutkielman kannalta oleellisin osin. Kvanttimekaniikan perusteista kiinnostunut lukija voi halutessaan tutustua esimerkiksi kirjoihin [1], [7], [8], [9] ja [10] – ne ovat myös tämän luvun perusviitteet.

## 2.1 Suure ja tila

Kvanttimekaniikka on todennäköisyysteoria, jossa todennäköisyydet saadaan systeemiä kuvaavan (kompleksisen) separoituvan Hilbertin avaruuden sisätulon kautta. Kvanttimekaniikan kannalta relevantteja Hilbertin avaruuksia ovat muun muassa $\mathbb{C}^n$ ja neliöllisesti integroituvien funktioiden sisätuloavaruus $L^2(\mathbb{R}^n) := L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dm < \infty\}$, missä $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ on Lebesguen mitta [3]. Lisäksi voidaan osoittaa, että jokainen Hilbertin avaruus on isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{C})$, kun mitta $\mu$ valitaan sopivasti. Toisaalta voidaan myös osoittaa, että jokainen separoituva Hilbertin avaruus on

[3] Hermiten funktiot muodostavat $L^2(\mathbb{R}^n)$:n erään numeroituvan kannan, joten $L^2(\mathbb{R}^n)$ on separoituva.

isometrisesti isomorfinen Hilbertin avaruuden $l^2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(n)|^2 < \infty\}$ kanssa.

Tilajoukoksi kvanttimekaniikassa otetaan positiiviset jäljen yksi operaattorit ja tilajoukolle käytetään merkintää $\mathscr{S}(\mathcal{H}) = \{\rho \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+ \mid \mathrm{tr}\,[\rho] = 1\}$. Se on (epätyhjä, kun $\dim(\mathcal{H}) \geq 1$,) konveksi joukko. Tilajoukon ääripisteitä eli alkioita, joita ei voida esittää kahden muun alkion (aitona) konveksikombinaationa, kutsutaan *puhtaiksi tiloiksi* ja tiloja, jotka eivät ole puhtaita, kutsutaan *sekoitetuiksi tiloiksi.* Seuraava tulos karakterisoi puhtaat tilat.

**Lemma 2.1.** Olkoon $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(i) $\rho$ on ääripiste,

(ii) $\rho^2 = \rho$,

(iii) $\rho = P[\varphi]$, jollekin vektorille $\varphi \in \mathcal{H}_1$,

(iv) $\mathrm{tr}\,[\rho^2] = 1$.

Edellisen lemman (iii)-kohdan vuoksi puhtaasta tilasta käytetään usein myös nimitystä *vektoritila.* Eräs edellisestä lemmasta saatava tärkeä seuraus on myös se, että $\mathscr{S}(\mathcal{H})$:lla on aina ääripisteitä olemassa, kun $\dim(\mathcal{H}) \geq 1$, sillä silloin löydetään ainakin yksi yksikkövektori $\varphi \in \mathcal{H}_1$, ja sitä vastaava vektoritila $P[\varphi]$ on ääripiste. Seuraava lause osoittaa, että jokainen tila on lausuttavissa tilajoukon ääripisteiden avulla, ja sen avulla monet yleisiä tiloja koskevat lineaariset ongelmat voidaan palauttaa helpommin käsiteltävien puhtaiden tilojen ongelmiksi.

**Lause 2.2** (Tilojen spektraalirakenne)**.** Olkoon $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Silloin $\rho$ on esitettävissä jälkinormin $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ suhteen suppenevana (mahdollisesti äärettömänä) summana puhtaista tiloista, toisin sanoen

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} p_i P[\varphi_i], \tag{2.1.1}$$

missä $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_1$ on $\rho$:n ominaisvektoreista koostuva $\mathcal{H}$:n ortonormaali joukko, $\{p_i | \, i \in \mathbb{N}\} \setminus \{0\}$ on sama kuin $\rho$:n nollasta eriävien ominaisarvojen joukko ja $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

*Todistus.* Tämä on seuraus kompaktin rajoitetun itseadjungoidun operaattorin spektraalihajotelmasta, sillä $\mathscr{S}(\mathcal{H}) \subset \mathscr{T}(\mathcal{H}) \subset \mathscr{C}(\mathcal{H})$ ([1, s.111-112]). □

Ensimmäinen edellisen lauseen käyttökohde löytyy seuraavasta lauseesta.

**Lause 2.3.** Olkoon $E : \mathscr{A} \mapsto \mathscr{L}(\mathcal{H})$ semispektraalimitta ja $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Kuvaus $\mathscr{A} \to [0,1]$; $X \mapsto \mathrm{tr}\,[E(X)\rho]$ on todennäköisyysmitta.

*Todistus.* Todistus on suora seuraus tilaoperaattorin $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ spektraalirakenteesta, jäljen lineaarisuudesta ja jatkuvuudesta sekä siitä, että kullakin $\varphi \in \mathcal{H}_1$ $E_\varphi$ on todennäköisyysmitta. □

Systeemin $\mathcal{S}$ fysikaalista *suuretta* eli observaabelia esittää jokin Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ semispektraalimitta $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Historiallisista ja mittausteknisistä syistä spektraalimittaan $E^A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ (yksikäsitteisesti) liittyvää itseadjungoitua operaattoria $A$ nimitetään *tarkaksi suureeksi* – syy tähän erotteluun tulee selvemmin esille standardimittausta käsittelevässä jaksossa.

Edellinen lause antaa oikeutuksen muotoilla niin sanottu *kvanttimekaniikan todennäköisyyspostulaatti*:

**Määritelmä 2.4.** Kaavalla

$$p_\rho^E(X) := \mathrm{tr}\,[E(X)\,\rho]\,, \tag{2.1.2}$$

$X \in \mathscr{A}$, $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ määritelty todennäköisyysmitta $p_\rho^E$ kuvaa tilastollisessa mielessä suureen $E$ mittaustulosjakaumaa tilassa $\rho$, toisin sanoen luku $p_\rho^E(X)$ on todennäköisyys, että suureen $E$ mittaus systeemille $\mathcal{S}$ tilassa $\rho$ tuottaa tuloksen joukosta $X$.

Kun $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on spektraalimitta, eli $E = E^A$ jollekin itseadjungoidulle operaattorille $A$, edellä oleva todennäköisyys kirjoitetaan $p_\rho^A(X) = \mathrm{tr}\left[E^A(X)\,\rho\right]$.

Voidaan osoittaa, että yhdessä Hilbertin avaruuksien perusteorian ja kvanttimekaniikan todennäköisyysrakenteen kanssa tilajoukko $\mathscr{S}(\mathcal{H})$ jo kiinnittää semispektraalimittojen joukon laajimpana mahdollisena suureiden joukkona ja todennäköisyydet $p_\rho^E(X)$ juuri lukuina $\operatorname{tr}[E(X)\,\rho]$: suureet ja todennäköisyydet $p_\rho^E$ ovat siis hyvin määriteltyjä.

Kuvaus $\beta : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \mapsto \mathbb{C}$ on *(kompleksinen) kaksoismitta*, jos $\beta(X,\cdot)$ ja $\beta(\cdot, Y)$ ovat mittoja kaikilla $X \in \mathscr{A}_1$ ja $Y \in \mathscr{A}_2$. Kaksoismitan avulla voidaan määritellä myös niin sanottu *kaksoissuure*: positiivioperaattorikaksoismitta $M : \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on ($E_1$:n ja $E_2$:n) kaksoissuure, jos $M$:n marginaalikuvaukset $E_1 : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ ja $E_2 : \mathscr{A}_2 \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} M(X, \Omega_2) &= E_1(X), \\ M(\Omega_1, Y) &= E_2(Y) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

ovat suureita.

## 2.2 Yhdistetyt systeemit

Tässä alaluvussa esiteltävät tulokset yleistyvät mille tahansa äärelliselle määrälle Hilbertin avaruuksia.

**Lemma 2.5.** Olkoon $\mathcal{H}_a$ ja $\mathcal{H}_b$ Hilbertin avaruuksia. On olemassa Hilbertin avaruus $\mathcal{H}_{ab}$ ja bilineaarinen kuvaus $f : \mathcal{H}_a \times \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_{ab}$, jolle

(i) joukon $\{f(\varphi,\psi)\,|\,\varphi \in \mathcal{H}_a, \psi \in \mathcal{H}_b\}$ virittämä $\mathcal{H}_{ab}$:n aliavaruus on tiheä $\mathcal{H}_{ab}$:ssa

(ii) $\langle f(\varphi_1,\psi_1)|f(\varphi_2,\psi_2)\rangle_{\mathcal{H}_{ab}} = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle_{\mathcal{H}_a}\langle\psi_1|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}_b}$ kaikilla $\varphi_1,\varphi_2 \in \mathcal{H}_a$, $\psi_1,\psi_2 \in \mathcal{H}_b$.

(iii) Oletetaan, että parit $(\mathcal{H}_{ab}, f)$ ja $(\widetilde{\mathcal{H}}_{ab}, \widetilde{f})$ täyttävät edellisen lemman ehdot (i) ja (ii). Silloin on olemassa isometrinen isomorfismi $g : \mathcal{H}_{ab} \to \widetilde{\mathcal{H}}_{ab}$ jolle $g \circ f = \widetilde{f}$.

[1, s.199-200] □

Lemman 2.5 antamaa oleellisesti yksikäsitteistä paria $(\mathcal{H}_{ab}, f)$ kutsutaan Hilbertin avaruuksien $\mathcal{H}_a$ ja $\mathcal{H}_b$ *(Hilbertin) tensorituloksi*, ja jatkossa merkitsemme $\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ ja $f(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_a$, $\psi \in \mathcal{H}_b$.

Lemman 2.5 tärkeä seuraus on, että tensoroimalla yhteen komponenttiavaruuksien $\mathcal{H}_a$ ja $\mathcal{H}_b$ ortonormaalikantoja saadaan aina jokin $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$:n ortonormaalikanta. Vaikka jokainen $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$:n vektori $\xi$ on *Parsevalin identiteetin* avulla lausuttavissa *hajoavien vektoreiden* (mahdollisesti äärettömänä) lineaarikombinaationa $\xi = \sum_{i,j} \langle \varphi_i \otimes \psi_j | \xi \rangle \, \varphi_i \otimes \psi_j$, missä $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{H}_a$ ($\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}_b$) on $\mathcal{H}_a$:n ($\mathcal{H}_b$:n) ortonormaalikanta, on syytä kuitenkin huomauttaa, että jokainen $\xi \in \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ ei ole hajoavaa muotoa.

**Lause 2.6.** Olkoon $\mathcal{H}_a$ ja $\mathcal{H}_b$ Hilbertin avaruuksia ja $A : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a$ sekä $B : \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_b$ rajoitettuja lineaarikuvauksia. On olemassa yksikäsitteinen rajoitettu lineaarikuvaus $A \otimes B : \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, jolle $A \otimes B(\varphi \otimes \psi) = A\varphi \otimes B\psi$. [1, s.202] $\square$

Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ määritellään tuttuun tapaan tilat $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, rajoitetut operaattorit $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, projektiot $P \in \mathscr{P}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, itseadjungoidut operaattorit $A : \mathscr{D}(A) \to \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, niiden spektraalimitat $E^A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$ jne.

Olkoon $A : \mathscr{D}(A) \to \mathcal{H}_a$ itseadjungoitu operaattori ja $E^A$ sen spektraalimitta. Kuvaus $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, $X \mapsto E^A(X) \otimes I_b$ on spektraalimitta ja sen määräämä itseadjungoitu operaattori on $A \otimes I_b$. Olkoon $B : \mathscr{D}(B) \to \mathcal{H}_b$ toinen itseadjungoitu operaattori ja $E^B$ sen spektraalimitta. Spektraalimitat $X \mapsto E^A(X) \otimes I_b$ ja $Y \mapsto I_a \otimes E^B(Y)$ ovat keskenään kommutatiiviset, joten niiden tulo $(X, Y) \mapsto E^A(X) \otimes E^B(Y)$ laajenee erääksi yksikäsitteiseksi spektraalimitaksi $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, jolle $E(X \times Y) = E^A(X) \otimes E^B(Y)$ [1, s.89]. Integroimalla tulofunktiota $f(x, y) = xy$ tämän spektraalimitan suhteen saadaan juuri itseadjungoitu operaattori $A \otimes B : \mathscr{D}(A \otimes B) \to \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$, joka siis ylläolevan konstruktion ja lauseen 2.6 nojalla operoi hajoaviin vektoreihin luonnolliseen tapaan: $A \otimes B(\varphi \otimes \psi) = A\varphi \otimes B\psi$ kaikilla $\varphi \otimes \psi \in \mathscr{D}(A) \times \mathscr{D}(B)$.

Olkoon $\mathcal{S}_a$ ja $\mathcal{S}_b$ kaksi (erotettavissa olevaa) systeemiä. Kvanttimekaniikassa yhdistetyn systeemin $\mathcal{S}_{ab} = \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$ teoria perustuu vastaavien Hilbertin avaruuksien tensoritulolle $\mathcal{H}_{ab} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Tässä Hilbertin avaruudessa tilajoukko $\mathscr{S}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$ sisältää sekä hajoavia, että hajoamattomia tiloja. Eräs tärkeä hajoamattomiin tiloihin liittyvä ominaisuus on *kvanttikietoutuminen*.

Usein on erityisen tärkeää tietää millaisia ovat systeemin *alitilat*. Systeemin $\mathcal{S}_a$ identifioitavuus systeemin $\mathcal{S}_{ab}$ osana merkitsee sitä, että suureen $E(X) \otimes I_b$ mittaaminen systeemillä $\mathcal{S}_{ab}$ vastaa suureen $E(X)$ mittaamista systeemillä $\mathcal{S}_a$, toisin sanoen $\mathcal{S}_a$:n tilan $\rho_a$ on oltava sellainen, että ehto $p_\rho^{E\otimes I_b} = p_{\rho_a}^E$ toteutuu kaikilla suureilla $E$. Siis systeemin $\mathcal{S}_{ab}$ tilan $\rho$ ja alisysteemien $\mathcal{S}_a$ ja $\mathcal{S}_b$ alitilojen $\rho_a$ ja $\rho_b$ välillä on toteuduttava seuraavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\rho_a A] &= \operatorname{tr}[\rho A \otimes I_b] \quad \text{kaikilla } A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_a) && (2.2.1) \\ \operatorname{tr}[\rho_b B] &= \operatorname{tr}[\rho I_a \otimes B] \quad \text{kaikilla } B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_b) && (2.2.2) \end{aligned}$$

**Lause 2.7.** Jos $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b)$, niin on olemassa yksikäsitteisesti määrätyt $\rho_a \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_a)$ ja $\rho_b \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_b)$, joille yhtälöt 2.2.1 ja 2.2.2 toteutuvat. [1, s.211] □

Kuvauksia $\mathscr{S}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b) \ni \rho \mapsto \rho_a \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_a)$ ja $\mathscr{S}(\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b) \ni \rho \mapsto \rho_b \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_b)$ kutsutaan osittaisiksi jäljiksi yli avaruuden $\mathcal{H}_b$ ja $\mathcal{H}_a$ vastaavasti, ja merkitään $\rho_a = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_b}[\rho]$ ja $\rho_b = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_a}[\rho]$ vastaavasti.

Hajoaviin vektoreihin voidaan määritellä *osittainen sisätulo* $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{H}_b} : \mathcal{H}_{ab} \to \mathcal{H}_a$, $\langle\varphi \otimes \psi|\eta\rangle_{\mathcal{H}_b} = \langle\psi|\eta\rangle\varphi$. Koska jokainen avaruuden $\mathcal{H}_{ab}$ vektori voidaan esittää hajoavien vektoreiden lineaarikombinaationa, tämä määritelmä laajenee koskemaan myös hajoamattomia vektoreita. Käytännössä nyt alitilojen laskeminen onnistuu usein helpoiten näiden osittaisten sisätulojen avulla avulla:

$$\begin{aligned} \rho_a &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle\varphi_i|\rho\,\varphi_j\rangle_{\mathcal{H}_b} \\ &:= \sum_{i,j,k=1}^{\infty} t_k\, {}_{\mathcal{H}_b}\langle\varphi_i|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\varphi_j\rangle_{\mathcal{H}_b} && (2.2.3) \end{aligned}$$

missä $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ on jokin Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}_b$ ortonormaalikanta ja $\sum_k t_k P[\psi_k]$ on tilan $\rho$ spektraalihajotelma. Tämä seuraa välittömästi kaavasta (2.2.1).

### 2.2.1 Täyspositiivisista kuvauksista

Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$ voidaan määritellä tilanmuunnos kuvauksena $\Phi : \mathscr{S}(\mathcal{H}) \to \mathscr{S}(\mathcal{H})$, mistä esimerkkejä ovat niin sanotut *kvanttikanavat*. Luonnollisesti tällaiselta kuvaukselta $\Phi$ on vaadittava *jäljen säilyttävyys*, $\operatorname{tr}[\Phi(\rho)] = 1$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, konveksilineaarisuus, $\Phi(\alpha T_1 + (1-\alpha)T_2) = \alpha\Phi(T_1) + (1-\alpha)\Phi(T_2)$ kaikilla $\alpha \in [0,1]$, sekä *positiivisuus*: yleisesti kuvaus $\Psi : \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on positiivinen, jos $\Psi(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})^+$.

Tensorituloavaruus $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ sisältää vektoreita, jotka eivät ole hajoavaa muotoa. Samaisesta syystä lokaalien tilanmuunnosten (tilanmuunnosten avaruudessa $\mathcal{H}_a$ tai $\mathcal{H}_b$) pelkkä lokaali positiivisuus ja jäljen säilyttävyys ei riitä siihen, että lokaali tilanmuunnos olisi tilanmuunnos avaruudessa $\mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$. Seuraava esimerkki valottaa tilannetta.

**Esimerkki 2.8.** Olkoon vektoritila $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathscr{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$, ja sitä vastaava tilaoperaattori $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$. Määritellään transponointioperaattori $\tau : \mathscr{S}(\mathbb{C}^2) \to \mathscr{S}(\mathbb{C}^2)$ seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} \tau : |0\rangle\langle 0| \mapsto |0\rangle\langle 0| & \tau : |0\rangle\langle 1| \mapsto |1\rangle\langle 0| \\ \tau : |1\rangle\langle 0| \mapsto |0\rangle\langle 1| & \tau : |1\rangle\langle 1| \mapsto |1\rangle\langle 1| \end{array} . \tag{2.2.4}$$

Näin määritelty $\tau$ on positiivinen, sillä transponointi säilyttää matriisin ominaisarvot, ja jäljen säilyttävä, joten se on hyvin määritelty tilamuunnos $\mathscr{S}(\mathbb{C}^2) \to \mathscr{S}(\mathbb{C}^2)$. Koska nyt $|ij\rangle\langle kl| = |i\rangle\langle k| \otimes |j\rangle\langle l|$ kaikilla $i, j, k, l \in \{0, 1\}$, niin $(\tau \otimes I)(\rho) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|)$ ei ole positiivinen, sillä kyseisellä matriisilla on ominaisarvo $-\frac{1}{2}$. Näin ollen $\tau \otimes I : \mathscr{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2) \nrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ ei kelpaa tilanmuunnokseksi yhdistetylle systeemille.

Edellisen esimerkin nojalla tilamuunnokselta on vaadittava jokin positiivisuutta vahvempi ominaisuus. Tarvittava ominaisuus on niin sanottu *täyspositiivisuus,* jonka määritelmä annetaan seuraavaksi.

**Määritelmä 2.9.** Lineaarikuvaus $\Psi : \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}')$ on *d-positiivinen*, jos kuvaus $\Psi \otimes I_{\text{anc}} : \mathscr{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\text{anc}}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}_{\text{anc}})$ on positiivinen, kun $\dim(\mathcal{H}_{\text{anc}}) = d$. Jos $\Psi$ on $d$-positiivinen kaikilla $d \in \mathbb{N}$, niin $\Psi$ on täyspositiivinen.

Vastaavasti määritellään lineaarikuvauksen $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}')$ täyspositiivisuus: $\Phi$ on täyspositiivinen, jos se on $d$-positiivinen kaikilla $d \in \mathbb{N}$ avaruudessa $\mathscr{T}(\mathcal{H})$.

Rajoitetun lineaarikuvauksen $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}')$ täyspositiivisuudesta seuraa duaalikuvauksen $\Phi^* : \mathscr{L}(\mathcal{H}') \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ täyspositiivisuus, nimittäin pätee

$$(\Phi \otimes I_{\text{anc}})^* = \Phi^* \otimes I_{\text{anc}}. \tag{2.2.5}$$

Myös käänteinen väite on voimassa, kun kuvaukselta $\Phi^*$ vaaditaan *normaalisuus*[4]: Positiivinen lineaarikuvaus $\Psi : \mathscr{L}(\mathcal{H}') \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on normaali, jos kaikilla (operaattorinormin suhteen) kasvavilla ylhäältä rajoitetuilla jonoilla $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}_s(\mathcal{H}')$, $A_i \to A \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H}')$, pätee $\Psi(A_i) \to \Psi(A)$. Nimittäin voidaan osoittaa, että jokaisen positiivisen lineaarikuvauksen $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}')$ duaalikuvaus on normaali ja että jokaista normaalia lineaarikuvausta $\Psi : \mathscr{L}(\mathcal{H}') \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ vastaa yksikäsitteinen positiivinen preduaalikuvaus $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}')$. Seuraava lemma kiteyttää ylläolevat tarkastelut.

**Lemma 2.10.** Positiiviselle lineaarikuvaukselle $\Phi : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}')$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(i) $\Phi$ on täyspositiivinen.

(ii) Duaalikuvaus $\Phi^* : \mathscr{L}(\mathcal{H}') \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on normaali ja täyspositiivinen.

(iii) Kaikilla $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ $\Phi(T) = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_i T A_i^*$ jollekin numeroituvalle operaattoriparvelle $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$, jolle summa $\sum_{i\in\mathbb{N}} A_i^* A_i$ suppenee $\mathscr{L}(\mathcal{H})$:ssa.

---

[4]Tämä on eräänlainen jatkuvuusvaatimus, joka takaa oikeanlaisen preduaalikuvauksen $\Phi$ olemassaolon. Normaalisuusehto on automaattisesti täytetty äärellisulotteisen Hilbertin avaruuden tapauksessa.

[7, s.18],[10, s.188] □

Lopuksi on annettu esimerkkejä myöhemmin tarvittavista täyspositiivisista lineaarikuvauksista.

**Esimerkki 2.11.** Kiinnitetään tila $\rho_B \in \mathscr{S}(\mathcal{H}_B)$. Silloin lineaarikuvaus $\Phi_{\rho_B} : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_B)$; $\Phi_{\rho_B}(T) = T \otimes \rho_B$ on täyspositiivinen.

*Todistus.* Lineaarikuvaus $\Phi_{\rho_B}$ on selvästi positiivinen ja $\Phi_{\rho_B} \otimes I_{\mathrm{anc}}$ kuvaa jälkiluokkaoperaattorin $\Omega \in \mathscr{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{anc}})$ operaattoriksi $(\Phi_{\rho_B} \otimes I_{\mathrm{anc}})(\Omega) = \Omega \otimes \rho_B$, joten myös kuvaus $\Phi_{\rho_B} \otimes I_{\mathrm{anc}}$ on positiivinen kaikilla $\mathcal{H}_{\mathrm{anc}}$. □

**Esimerkki 2.12.** Osittainen jälki $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B} : \mathscr{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_B) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$ on täyspositiivinen.

*Todistus.* Selvitetään aluksi kuvausta $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}$ vastaava duaalikuvaus:

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}\left[\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}[T]\ A\right] = \mathrm{tr}\left[T\, A \otimes I\right] \quad \text{kaikilla } A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}), T \in \mathscr{T}(\mathcal{H}) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{tr}^*_{\mathcal{H}_B}[A] = A \otimes I. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Lineaarikuvaus $\mathrm{tr}^*_{\mathcal{H}_B} \otimes I_{\mathrm{anc}} : \mathscr{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{anc}}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{anc}} \otimes \mathcal{H}_B)$ on selvästi positiivinen kaikilla $\mathcal{H}_{\mathrm{anc}}$, mistä seuraa sen täyspositiivisuus. Se on myös normaali tensoritulon jatkuvuuden nojalla, joten lemman 2.10 (ii)-kohdan nojalla myös $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}$ on täyspositiivinen. □

**Esimerkki 2.13.** Kiinnitetään $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Lineaarikuvaus $\sigma_B : \mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$; $\sigma_B(T) = B^*TB$, on täyspositiivinen.

*Todistus.* Seuraa suoraan lemman 2.10 (iii)-kohdasta, sillä kuvaus $\sigma_B$ on selvästi positiivinen. □

Selvästi täyspositiivisten kuvausten yhdiste on myös täyspositiivinen.

# 3 Kvanttimekaniikan mittausteoriaa

Fysiikka on perimmiltään empiirinen tiede, jossa jokaisen teorian totuusarvoa testataan tekemällä *mittauksia*. Olipa mittaus sitten arkipäiväinen ulkolämpötilan mittaaminen tai hienostunut kvanttimekaaninen fotonilukumäärämittaus se perustuu *aina* samalle yleiselle konseptille: havaittava systeemi tuodaan tavalla tai toisella kontaktiin mittaussysteemin, eli mittalaitteen, kanssa, jolloin mitattavan suureen arvo luetaan mittaussysteemin asteikolta (elohopean korkeus lämpömittarin asteikolla, fotonidetektorin naksahdusten lukumäärä tms.) [8].

Klassisessa fysiikassa millä tahansa suureella on minkä tahansa systeemin mielivaltaisessa tilassa hyvin määritelty, joskin ehkä tuntematon, arvo. Lisäksi jokaisen suureen arvo on ainakin periaatteessa mitattavissa mielivaltaisella tarkkuudella ilman, että mittaus vaikuttaisi itse systeemiin muuttaen sitä. Edellinen yleistyy myös mielivaltaiselle suurejoukolle ja mikä tahansa tällainen suurejoukko on mielivaltaisella tarkkuudella yht'aikaisesti mitattavissa: kappaleen paikka ja liikemäärä selviää yksinkertaisesti "katsomalla". Näin ollen klassisen tulkinnan mukaisesti mittaustulos on suureen arvo systeemin tilassa ennen ja myöskin jälkeen mittauksen. [8]

Kvanttimekaniikan epäkommutatiivinen probabilistinen luonne luo tähän arkipäiväiseen malliin monta uutta käännettä, vaikkakin mittauksen universaali konsepti on sama. Osoittautuu, että jokaista systeemin tilaa kohti on olemassa suure, jolla ei tässä tilassa voida varmuudella sanoa olevan jotakin tiettyä arvoa (ks. [8, II.2.4]). Näin ollen mittalaitteen osoittama lukema ei voi viitata suureen arvoon systeemin tilassa ennen mittausta [8]. Myöhempi tarkastelu alaluvussa 3.1.2 osoittaa, että kyseinen lukema ei myöskään välttämättä viittaa suureen arvoon systeemin tilassa mittauksen jälkeen. Aivan keskeinen epäkommutatiivisuudesta kumpuava piirre kvanttimekaniikassa on myös, että joitakin suurepareja ei voida samanaikaisesti mielivaltaisella tarkkuudella mitata – kanoninen esimerkki tällaisesta suureparista on juuri systeemin paikka ja liikemäärä.

Tämän luvun tarkoituksena on, tähän tutkielmaan tarvittavilta osin, esitellä *kvanttimekaniikan mittausteoriaa* ja siihen liittyviä keskeisiä käsitteitä: mittaus, instrumentti, standardimalli, heikko mittaus ja jonomittaus. Lähdemateriaalina on koko luvun ajan käytetty erityisesti kirjoja [8], [9] ja [10], joihin suurin osa tämän luvun tekstistä pohjautuu.

## 3.1 Mittaus

Olkoon $\mathcal{H}$ systeemiin $\mathcal{S}$ liittyvä Hilbertin avaruus ja $E$ jokin systeemin $\mathcal{S}$ suure. Luonnollisesti suureen $E$ mittauksen suorittamiseksi tarvitaan jonkinlainen mittalaite eli mittaussysteemi: olkoon se $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ siihen liittyvä Hilbertin avaruus.

Olkoon systeemi $\mathcal{S}$ aluksi tilassa $\rho$ ja mittalaite aluksi tilassa $\rho_\mathcal{A}$. Yhdistetyn systeemin $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ alkutilaksi oletetaan hajoava tila $\rho\otimes\rho_\mathcal{A}$, sillä on luonnollista olettaa, että ennen mittausta systeemi ja mittalaite preparoidaan toisistaan riippumattomasti, toisin sanoen ennen mittausta ne eivät vuorovaikuta eivätkä ole kietoutuneita keskenään. Olkoon $V : \mathscr{T}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_\mathcal{A}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_\mathcal{A})$ jäljen säilyttävä täyspositiivinen lineaarikuvaus, joka kuvaa systeemin $\mathcal{S}$ ja mittalaitteen $\mathcal{A}$ välistä mittauskytkentää. Selvästi kaikki unitaarioperaatiot $\rho\otimes\rho_\mathcal{A} \mapsto U\rho\otimes\rho_\mathcal{A}U^*$, $U \in \mathscr{U}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_\mathcal{A})$ ovat tällaisia kuvauksia, ja niillä on erityisen tärkeä rooli tässä tutkielmassa. Nyt yhdistetyn systeemin $\mathcal{S}+\mathcal{A}$ alkutila $\rho\otimes\rho_\mathcal{A}$ kehittyy mittauksen myötä tilaksi $V(\rho\otimes\rho_\mathcal{A})$, josta myös osasysteemien tilat yksikäsitteisesti määräytyvät. Erityisesti mittalaitteen tila $\mathrm{tr}_\mathcal{H}[V(\rho\otimes\rho_\mathcal{A})]$ on yksikäsitteisesti määrätty (ks. lause 2.7).

Merkitään $Z : \mathscr{A}_\mathcal{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H}_\mathcal{A})$ mittaussysteemin $\mathcal{A}$ asteikkosuuretta. Asteikkosuureen arvoalue $(\Omega_\mathcal{A}, \mathscr{A}_\mathcal{A})$ voi olla eri kuin suureen $E$ arvoalue $(\Omega, \mathscr{A})$, jolloin on luonnollista ottaa käyttöön mitallinen asteikkofunktio, $f : \Omega_\mathcal{A} \to \Omega$, joka kuvaa otosavaruudet samoiksi. Nyt olemme valmiit pukemaan mittauksen perusidean kvanttimekaniikan kielelle: mittalaitteen $\mathcal{A}$ asteikkosuureeseen $Z$ liittyvä todennäköisyysjakauma mittalaitteen tilassa $\mathrm{tr}_\mathcal{H}[V(\rho\otimes\rho_\mathcal{A})]$ kerätään mittauksen jälkeen, ja tästä päätellään mitattavan systeemin $\mathcal{S}$ vastaavan suureen $E$ liittyvä todennäköisyysjakauma tilassa $\rho$:

$$p^Z_{\mathrm{tr}_\mathcal{H}[V(\rho\otimes\rho_\mathcal{A})]}(f^{-1}(X)) = p^E_\rho(X)$$

Viisikkoa $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \rho_A, V, f\rangle$ kutsutaan systeemin $\mathcal{S}$ *mittaukseksi.* Puhtaan tilan tapauksessa, $\rho_A = P[\phi]$, $\phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{A},1}$ mittauksesta käytetään merkintää $\langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \phi, V, f\rangle$, ja asteikkofunktion ollessa identiteettifunktio merkitään lyhyesti $\langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \phi, V\rangle$. Mittauskytkennän $V$ ollessa unitaarinen, eli $V(\rho \otimes \rho_\mathcal{A}) = U\rho \otimes \rho_\mathcal{A} U^*$, $U \in \mathscr{U}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{A})$, merkitään lyhyesti $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \rho_\mathcal{A}, U, f\rangle$ ja mittausta kutsutaan unitaariseksi mittaukseksi.

**Lause 3.1.** Jokainen systeemin $\mathcal{S}$ mittaus $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \rho_\mathcal{A}, V, f\rangle$ määrittelee systeemin $\mathcal{S}$ erään yksikäsitteisen suureen $X \mapsto E(X)$ semispektraalimittana siten, että

$$p^E_\rho(X) = p^Z_{\mathrm{tr}_\mathcal{H}[V(\rho\otimes\rho_\mathcal{A})]}(f^{-1}(X)) \tag{3.1.1}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, $X \in \mathscr{A}$.

*Todistus.* Kiinnitetään mittaus $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \rho_\mathcal{A}, V, f\rangle$ ja $X \in \mathscr{A}$. Määritellään funktionaali $g_X : \mathscr{S}(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$g_X(\rho) = \mathrm{tr}\left[I \otimes Z(f^{-1}(X))\, V(\rho \otimes \rho_\mathcal{A})\right] \tag{3.1.2}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Osoitetaan aluksi, että $g_X$ laajenee yksikäsitteisesti jatkuvaksi lineaarifunktionaaliksi $\mathscr{T}_s(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$. Ensinnäkin huomataan, että $g_X$ on konveksilineaarinen $\mathscr{S}(\mathcal{H})$:ssa, eli kaikilla $\alpha \in [0,1]$ ja $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$

$$g_X(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2) = \alpha g_X(\rho_1) + (1-\alpha) g_X(\rho_2). \tag{3.1.3}$$

Määritellään funktionaali $\widetilde{g}_X : \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+ \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\widetilde{g}_X(T) \;=\; \begin{cases} \mathrm{tr}\,[T]\, g_X(\frac{T}{\mathrm{tr}[T]}), & T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+ \setminus \{0\}, \\ 0, & T = 0 \end{cases} , \tag{3.1.4}$$

jolloin kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+ \setminus \{0\}$

$$\widetilde{g}_X(\alpha T) = \mathrm{tr}\,[\alpha T]\, g_X(\frac{\alpha T}{\mathrm{tr}\,[\alpha T]}) = \alpha \widetilde{g}_X(T). \tag{3.1.5}$$

Tapaus $\alpha = 0$ on triviaali. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}_X(T_1 + T_2) &= \mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]\, g_X(\frac{T_1 + T_2}{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]}) \\
&= \mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]\, g_X(\frac{\mathrm{tr}\,[T_1]}{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]} \frac{T_1}{\mathrm{tr}\,[T_1]} + \frac{\mathrm{tr}\,[T_2]}{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]} \frac{T_2}{\mathrm{tr}\,[T_2]}) \\
&\overset{\text{konv.lin.}}{=} \mathrm{tr}\,[T_1]\, \frac{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]}{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]} g_X(\frac{T_1}{\mathrm{tr}\,[T_1]}) + \mathrm{tr}\,[T_2]\, \frac{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]}{\mathrm{tr}\,[T_1 + T_2]} g_X(\frac{T_2}{\mathrm{tr}\,[T_2]}) \\
&= \mathrm{tr}\,[T_1]\, g_X(\frac{T_1}{\mathrm{tr}\,[T_1]}) + \mathrm{tr}\,[T_2]\, g_X(\frac{T_2}{\mathrm{tr}\,[T_2]}),
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

kaikilla $T_1, T_2 \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+ \setminus \{0\}$, joten kuvaus $\widetilde{g}_X$ on $\mathbb{R}^+$-lineaarinen.

Jokainen $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})$ voidaan ilmaista kahden positiivisen jälkiluokkaoperaattorin erotuksena; $T = T_1 - T_2,\ T_1, T_2 \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+$. Määritellään edelleen kuvaus $\widehat{g}_X : \mathscr{T}_s(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$ kaavalla $\widehat{g}_X(T) = \widetilde{g}_X(T_1) - \widetilde{g}_X(T_2)$, kaikilla $T = T_1 - T_2 \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})$, $T_1, T_2 \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+$. Koska hajotelma $T = T_1 - T_2,\ T_1, T_2 \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+$ ei ole yksikäsitteinen, pitää tarkistaa onko $\widehat{g}_X$ hyvin määritelty. Olkoon $T = T_1 - T_2 = T_1' - T_2'$, $T_1, T_2, T_1', T_2' \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+$. Silloin

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2' &= T_1' + T_2 \geq 0 \\
\Rightarrow \quad \widetilde{g}_X(T_1) + \widetilde{g}_X(T_2') \overset{(3.1.6)}{=} \widetilde{g}_X(T_1 + T_2') &= \widetilde{g}_X(T_1' + T_2) \overset{(3.1.6)}{=} \widetilde{g}_X(T_1') + \widetilde{g}_X(T_2) \\
\Rightarrow \quad \widetilde{g}_X(T_1) - \widetilde{g}_X(T_2) &= \widetilde{g}_X(T_1') - \widetilde{g}_X(T_2'),
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

mikä osoittaa, että $\widehat{g}_X$ on jälkiluokkaoperaattorin $T$ hajotelmasta riippumaton. Kuvaus $\widehat{g}_X$ on myös selvästi $\mathbb{R}$-lineaarinen $\mathscr{T}_s(\mathcal{H})$:ssa. Lisäksi huomataan, että

$$\begin{aligned}
|g_X(\frac{T}{\|T\|_1})| &\overset{(1.1.4)}{\leq} \|I \otimes Z(f^{-1}(X))\|\, \|V(\frac{T}{\|T\|_1} \otimes \rho_A)\|_1 \\
&= \|I \otimes Z(f^{-1}(X))\|\, \|\frac{T}{\|T\|_1} \otimes \rho_A\|_1 \\
&= \|I \otimes Z(f^{-1}(X))\|
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

kaikilla $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})^+$, joten

$$\begin{aligned} |\widehat{g}_X(T)| &\leq |\mathrm{tr}\,[T_1]||g_X(\frac{T_1}{\|T_1\|_1})| + |\mathrm{tr}\,[T_2]||g_X(\frac{T_2}{\|T_2\|_1})| \\ &\leq \|I \otimes Z(f^{-1}(X))\| \left(\|T_1\|_1 + \|T_2\|_1\right) \\ &\leq 2\|I \otimes Z(f^{-1}(X))\|\|T\|_1 < \infty \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

kaikilla $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})$. Näin ollen $\widehat{g}_X$ on rajoitettu (eli yhtäpitävästi jatkuva) lineaarifunktionaali $\mathscr{T}_s(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$.

Nyt ratkaiseva tulos on (ks. [1, s.120]), että on olemassa yksikäsitteinen $E(X) \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})$, siten että

$$\widehat{g}_X(T) = \mathrm{tr}\,[E(X)T] \tag{3.1.10}$$

kaikilla $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})$, $X \in \mathscr{A}$. Samalla huomataan, että $g_X$:n lineaarinen laajennus $\widehat{g}_X$ on yksikäsitteinen, nimittäin jos olisi toinen lineaarinen laajennus $h_X : \mathscr{T}_s(\mathcal{H}) \to \mathbb{R}$, niin vastaavasti $h_X(T) = \mathrm{tr}\,[F(X)T]$, kaikilla $T \in \mathscr{T}_s(\mathcal{H})$, jollekin yksikäsitteiselle $F(X) \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})$. Ehdosta $\widehat{g}_X(\rho) = h_X(\rho)$, kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ seuraa erityisesti, että $\langle\varphi|E(X)\varphi\rangle = \langle\varphi|F(X)\varphi\rangle$, kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$, mistä lopulta saadaan $E(X) = F(X)$. Siis on olemassa yksikäsitteinen $E(X) \in \mathscr{L}_s(\mathcal{H})$ siten, että

$$g_X(\rho) = \mathrm{tr}\,[E(X)\,\rho] \tag{3.1.11}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. $E(X) \geq 0$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, sillä $g_X(\rho) \geq 0$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ [1, s.120]. Toisaalta $g_X(\rho) \leq 1$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, joten $E(X) \leq I$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, ja välittömästi todetaan, että $E(\Omega) = I$.

Tarkastetaan vielä $E$:n $\sigma$-additiivisuus. Olkoon jono $(X_i) \subset \Omega$ erillisiä joukkoja.

Silloin

$$\begin{aligned} g_{\dot\cup X_i}(P[\varphi]) &= \langle\varphi|E(\dot\cup X_i)\varphi\rangle = \mathrm{tr}\left[Z(f^{-1}(\dot\cup X_i))\,\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left[V(P[\varphi]\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right]\right] \\ &= \sum_i \mathrm{tr}\left[Z(f^{-1}(X_i))\,\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left[V(P[\varphi]\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right]\right] \\ &= \sum_i \langle\varphi|E(X_i)\varphi\rangle, \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

joten $E_\varphi$ on mitta kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ ja lause on todistettu. □

Edellinen lause osoittaa sen ilmeisen tosiasian, että jokaisessa mittauksessa $\mathcal{M}$ tulee tosiasiassa mitattua jokin systeemin $\mathcal{S}$ suure, eli mittaus $\mathcal{M}$ on tässä mielessä hyvin määritelty. Seuraava määritelmä luokittelee mittaukset systeemin $\mathcal{S}$ suureiden avulla.

**Määritelmä 3.2.** Mittausta $\mathcal{M} := \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, V, f\rangle$ kutsutaan suureen $E$ mittaukseksi (tai lyhyesti $E$-mittaukseksi), jos se toteuttaa niin sanotun *todennäköisyyden reprodusointiehdon*

$$p_\rho^E(X) = p^Z_{\mathrm{tr}_{\mathcal{S}}[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})]}(f^{-1}(X)) \tag{3.1.13}$$

kaikilla joukoilla $X \in \mathscr{A}$, ja kaikilla alkutiloilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$.

Lausetta 2.2 ja kyseeseen tulevien operaatioiden lineaarisuutta käyttämällä huomataan helposti, että edeltävä reprodusointiehto pätee kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, jos ja vain jos se pätee kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

### 3.1.1 Instrumentti

Jos systeemi ei tuhoudu mittauksessa, voidaan yrittää tehdä uusi mittaus ja näin saada lisää tietoa alkuperäisestä systeemistä. Oletetaan, että ensin tehdään suureen $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mittaus $\mathcal{M} = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, V, f\rangle$, jonka jälkeen tehdään toisen suureen $F : \mathscr{A}' \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mittaus. Suureen $F$-mittaukselle ei anneta eksplisiittistä muotoa.

Edeltävässä *jonomittauksessa* päädytään yhdistettyyn todennäköisyyteen $p_\rho(E(X)\,\&\,F(Y))$: todennäköisyys, että ensimmäisenä tehty $E$-mittaus tuottaa tuloksen joukosta $X \in \mathscr{A}$ ja seuraava $F$-mittaus tuottaa tuloksen joukosta $Y \in \mathscr{A}$, kun systeemi on aluksi tilassa $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Edellisen alaluvun merkinnöin

$$\begin{aligned} p_\rho(E(X)\,\&\,F(Y)) &= \operatorname{tr}\left[F(Y)\otimes Z(f^{-1}(X))\,V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[F(Y)\operatorname{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[I\otimes Z(f^{-1}(X))\,V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Olkoon $X \in \mathscr{A}$ kiinnitetty ja määritellään kuvaus $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X) : \mathscr{S}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$ seuraavasti

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho) := \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[I\otimes Z(f^{-1}(X))\,V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right], \tag{3.1.15}$$

jolloin $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)$ tulee siis määrätyksi relaatiosta:

$$p_\rho(E(X)\,\&\,F(Y)) = \operatorname{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)\right], \tag{3.1.16}$$

kaikilla suureilla $F : \mathscr{A}' \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

Kuvauksella $\mathscr{S}(\mathcal{H}) \ni \rho \mapsto \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho) \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ on yksikäsitteinen lineaarinen laajennus jälkiluokasta jälkiluokkaan, joten käsitämme $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)$ :n lineaarikuvauksena $\mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$. Välittömästi huomataan, että sillä on seuraavat ominaisuudet:

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho) \geq 0 \qquad \text{kaikilla } X \in \mathscr{A},\ \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}) \tag{3.1.17a}$$

$$\operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\Omega)(\rho)\right] = \operatorname{tr}[\rho] \qquad \text{kaikilla } \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}) \tag{3.1.17b}$$

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\dot\cup X_i)(\rho) = \sum \mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X_i)(\rho) \qquad \text{kaikilla } \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}) \text{ ja erillisille jonoilla } (X_i) \subset \mathscr{A}, \tag{3.1.17c}$$

missä sarja suppenee jälkinormin suhteen.

Edelleen kiinteällä $X \in \mathscr{A}$ relaatio

$$p_\rho(E(X)\,\&\,F(Y)) = \operatorname{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)\right], \tag{3.1.18}$$

oikeuttaa $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)$:n tulkinnan systeemin $\mathcal{S}$ mittauksen $\mathcal{M}$ jälkeisenä normittamattomana tilana, kun mittaus tuotti tuloksen joukosta $X$ systeemin $\mathcal{S}$ tilassa $\rho$.

Tilan muuntumista mittauksessa $\mathcal{M}$ kuvaava operaatioarvoinen joukkofunktio $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ on eräs esimerkki *instrumenteista*, jotka määrittelemme seuraavassa:

**Määritelmä 3.3.** Kuvaus $\mathcal{I} : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathscr{T}(\mathcal{H}))$ on *instrumentti*, jos se toteuttaa ehdot (3.1.17a) - (3.1.17c).

Jokainen instrumentti indusoi yksikäsitteisen suureen $X \mapsto E^{\mathcal{I}}(X)$ kaavalla

$$\operatorname{tr}\left[\rho\, E^{\mathcal{I}}(X)\right] \quad = \quad \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}(X)(\rho)\right] \tag{3.1.19}$$

kaikilla $X \in \mathscr{A}$, $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Näin määräytyvää suuretta $E^{\mathcal{I}}$ kutsutaan $\mathcal{I}$:n *assosioiduksi (indusoimaksi) suureeksi*. Indusoidulle suureelle saadaan duaalirakenteen $\mathscr{L}(\mathcal{H}) \simeq \mathscr{T}(\mathcal{H})^*$ avulla ekvivalentti ja usein käyttökelpoinen muotoilu

$$\mathcal{I}(X)^*(I) = E^{\mathcal{I}}(X), \tag{3.1.20}$$

kaikilla $X \in \mathscr{A}$. Toisaalta mitä tahansa instrumenttia $\mathcal{I}$, jolle $E = E^{\mathcal{I}}$, kutsutaan *$E$-yhteensopivaksi instrumentiksi.*

Painotettakoon, että vaikka kukin instrumentti indusoi yksikäsitteisen suureen $E^{\mathcal{I}}$ positiivioperaattorimittana, niin käänteinen väite ei päde. Sen sijaan jokaiseen suureeseen $E$ liittyy (äärettömän) monta $E$-yhteensopivaa instrumenttia, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 3.4.** Olkoon $E$ mielivaltainen suure. Määritellään $\mathcal{I}(X)(\rho) = \operatorname{tr}[\rho E(X)]\,\rho'$, missä $\rho' \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ on mielivaltainen kiinnitetty tila. $\mathcal{I}$ toteuttaa selvästi ehdot (3.1.17a) - (3.1.17c) ja lisäksi (3.1.19):n, sillä:

$$\operatorname{tr}[\mathcal{I}(X)(\rho)] = \operatorname{tr}[\operatorname{tr}[\rho E(X)]\,\rho'] = \operatorname{tr}[\rho E(X)]\operatorname{tr}[\rho'] = \operatorname{tr}[\rho E(X)]\,. \tag{3.1.21}$$

Kuten aiemmin huomattiin, jokainen $E$-mittaus $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, V, f\rangle$ indusoi instrumentin $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ relaation

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho) \;:=\; \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, I\otimes Z(f^{-1}(X))\right], \quad X\in\mathscr{A},\ \rho\in\mathscr{S}(\mathcal{H}) \tag{3.1.22}$$

kautta. Instumentin $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ indusoima suure on juuri mitattava suure $E$. Tämä nähdään laskulla

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)\right] &= \mathrm{tr}\left[\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, I\otimes Z(f^{-1}(X))\right]\right]\\
&= \mathrm{tr}\left[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, I\otimes Z(f^{-1}(X))\right]\\
&= \mathrm{tr}\left[\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}\left[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\right]\, Z(f^{-1}(X))\right]\\
&\overset{(3.1.13)}{=} \mathrm{tr}\left[E(X)\rho\right]
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Instrumentti $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ sisältää kaikki mittauksen $\mathcal{M}$ ominaisuudet, jotka liittyvät systeemiin $\mathcal{S}$.

**Määritelmä 3.5.** Instrumentti $\mathcal{I}$ on täyspositiivinen, jos operaatiot $\mathcal{I}(X)$ ovat täyspositiivisia kaikilla $X\in\mathscr{A}$.

**Lemma 3.6.** Mittauksen $\mathcal{M}$ indusoima instrumentti on $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ täyspositiivinen.

*Todistus.* Kaavan 3.1.16 mukaisesti $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ tulee täysin määrätyksi relaatiosta

$$\begin{aligned}
& p_\rho(E(X)\,\&\,F(Y))\\
=\;& \mathrm{tr}\left[F(Y)\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, I\otimes Z(f^{-1}(X))\right]\right]\\
=\;& \mathrm{tr}\left[(F(Y)\otimes I)\, V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, \left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)\right]\\
=\;& \mathrm{tr}\left[(F(Y)\otimes I)\, \left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{\frac{1}{2}}\, V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, \left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
=\;& \mathrm{tr}\left[F(Y)\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[\left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{\frac{1}{2}}\, V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\, \left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right],
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

joten $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ voitaisiin määritellä ekvivalentisti muodossa

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho) &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\left[\left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{1/2} V(\rho\otimes\rho_{\mathcal{A}})\left(I\otimes Z(f^{-1}(X))\right)^{1/2}\right] \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{A}}}\circ\sigma_{(I\otimes Z(f^{-1}(X)))^{1/2}}\circ V\circ\Phi_{\rho_{\mathcal{A}}}(\rho), \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

missä kuvaukset ovat määritelty esimerkeissä 2.11-2.13. Nyt väite seuraa kyseisistä esimerkeistä sekä mittauskytkennän $V$ täyspositiivisuudesta. □

Seuraava kvanttimekaniikan mittausteorian peruslause osoittaa, että jokaista suuretta $E$ kohti on olemassa mittaus– jopa unitaarinen sellainen!

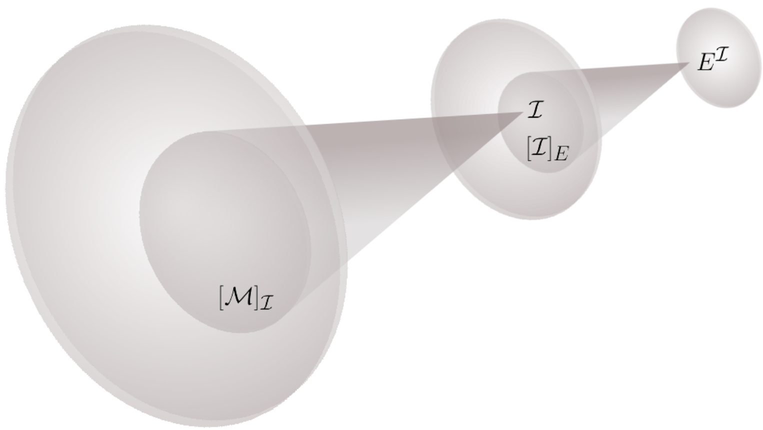
**Lause 3.7** (Ozawan lause)**.** (i) Jokaista täyspositiivista instrumenttia $\mathcal{I}$ kohti on olemassa mittaus $\mathcal{M} = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, V\rangle$ siten, että $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}$, ja vieläpä niin että $\rho_{\mathcal{A}}$ on puhdas tila, $V$ on unitaarioperaatio ja $Z$ on tarkka suure.

(ii) Jokaista suuretta $E$ kohti on olemassa täyspositiivinen instrumentti. Siis jokaista suuretta $E$ kohti on olemassa mittaus, jopa niin, että $\rho_{\mathcal{A}}$ on puhdas tila, $V$ on unitaarioperaatio ja $Z$ on tarkka suure.

[11] □

Ylläolevien havaintojen perusteella voidaan määritellä kokoelmat $[\mathcal{I}]_E$ ja $[\mathcal{M}]_{\mathcal{I}}$. Jokaista suuretta $E$ kohti on kokoelma $[\mathcal{I}]_E$ $E$-yhteensopivia instrumentteja ($[\mathcal{I}]_E \neq \emptyset\ \forall E$). Vastaavasti jokaista instrumenttia $\mathcal{I}$ kohti on kokoelma $[\mathcal{M}]_{\mathcal{I}}$ $\mathcal{I}$:n indusoivia mittauksia ($[\mathcal{M}]_{\mathcal{I}}$ voi olla myös tyhjä, jos $\mathcal{I}$ ei ole täyspositiivinen). Kokoelma $[\mathcal{I}]_E$ on ekvivalenssiluokka kaikkien instrumenttien joukossa: ekvivalenssirelaationa $\mathcal{I}\sim\mathcal{I}' \ \Leftrightarrow E^{\mathcal{I}} = E^{\mathcal{I}'}$. Vastaavasti kokoelma $[\mathcal{M}]_{\mathcal{I}}$ on ekvivalenssiluokka kaikkien mittausten joukossa: ekvivalenssin välittää $\mathcal{M}\sim\mathcal{M}' \Leftrightarrow \mathcal{I}^{\mathcal{M}} = \mathcal{I}^{\mathcal{M}'}$. Kuva 1 selventää tilannetta.

**Esimerkki 3.8.** Asteikkofunktiolla ”korjattu” suure $Z$ voitaisiin korvata suureella $Z^f$, kun määritellään $Z^f(X) = Z(f^{-1}(X))$ (ks. lemma 1.6). Näin saataisiin mittaus $\mathcal{M}' = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z^f, \rho_{\mathcal{A}}, V\rangle$, joka on ekvivalentti mittauksen $\mathcal{M} = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, V, f\rangle$ kanssa, sillä kaavan (3.1.19) mukaan ne indusoivat saman instrumentin.




Kuva 1: Kuvassa vasemmalla kaikkien mittausten joukko ja sen osana kaikkien $\mathcal{I}:n$ indusoivien mittausten ekvivalenssiluokka $[\mathcal{M}]_{\mathcal{I}}$, keskellä kaikkien instrumenttien joukko ja sen osana $E$-yhteensopivien instrumenttien ekvivalenssiluokka $[\mathcal{I}]_E$ ja oikealla kaikkien suureiden osajoukko. Jokaista suuretta $E$ kohti on ainakin yksi täyspositiivinen $E$-yhteensopiva instrumentti $\mathcal{I}$, joka puolestaan saadaan indusoitua jostakin mittauksesta $\mathcal{M}$ (ks. lause 3.7).

### 3.1.2 Mittaus muuttaa tilaa

Kvanttimekaniikan mittausteorian perustulos on, että mittaus tavallisesti muuttaa mitattavan systeemin tilaa; tässä alaluvussa osoitetaan, että näin todella käy. Aloitetaan aputuloksella.

**Lemma 3.9.** Olkoon $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^+$ ja $P[\psi] \in \mathscr{P}(\mathcal{H})$ ja $A \leq P[\psi]$. Silloin

$$A = \lambda P[\psi], \quad \lambda \in [0,1] \tag{3.1.26}$$

[10, s.37] □

Suuretta $E$ kutsutaan *triviaaliksi suureeksi*, jos $E(X) = \lambda(X)I$ kaikilla $X \in \mathscr{A}$, missä $\lambda : \mathscr{A} \to [0,1]$ on mielivaltainen skalaaritodennäköisyysmitta. Vastaavasti mittaus on *triviaali mittaus*, jos sen indusoima suure on triviaali. Nimitys on perusteltu, sillä triviaali mittaus ei anna mitään informaatiota systeemistä $\mathcal{S}$.

**Lause 3.10.** Olkoon $\mathcal{I}$ sellainen instrumentti, joka ei muuta mitään tilaa siinä mielessä, että $\mathcal{I}(\Omega)(\rho) = \rho$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Silloin instrumentin $\mathcal{I}$ indusoima suure on triviaali.

*Todistus.* Instrumentin lineaarisuuden ja tilojen spektraalirakenteen 2.2 vuoksi voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $\rho = P[\varphi]$ jollekin $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Olkoon $X \in \mathscr{A}$ mielivaltainen. Instrumentin $\sigma$-additiivisuudesta (3.1.17c) ja "positiivisuudesta" (3.1.17a) seuraa, että

$$\begin{aligned} P[\varphi] &= \mathcal{I}(\Omega)(P[\varphi]) = \mathcal{I}(X)(P[\varphi]) + \mathcal{I}(X^c)(P[\varphi]) \geq 0 \\ &\Rightarrow P[\varphi] - \mathcal{I}(X)(P[\varphi]) \geq 0 \\ &\Rightarrow P[\varphi] \geq \mathcal{I}(X)(P[\varphi]). \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Siispä lemman 3.9 nojalla

$$\mathcal{I}(X)(P[\varphi]) = \lambda_{P[\varphi]}(X)\, P[\varphi], \tag{3.1.28}$$

missä $\lambda_{P[\varphi]}(X)$ on positiivinen luku, joka lähtökohtaisesti riippuu joukosta $X$:stä ja valitusta tilasta $\varphi$.

Kiinnitetään nyt $X \in \mathscr{A}$ ja ortonormaalit vektorit $\varphi, \varphi^\perp \in \mathcal{H}_1$. Näistä saadaan toinen pari keskenään ortonormaaleja vektoreita määrittelemällä $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \varphi^\perp)$ ja $\phi^\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \varphi^\perp)$. Nyt erityisesti pätee

$$\begin{aligned} P[\phi] + P[\phi^\perp] &= \frac{1}{2}(|\varphi\rangle\langle\varphi| + |\varphi\rangle\langle\varphi^\perp| + |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi| + |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi^\perp|) \\ &\quad + \frac{1}{2}(|\varphi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\varphi^\perp| - |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi| + |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi^\perp|) \\ &= P[\varphi] + P[\varphi^\perp], \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

joten $\mathcal{I}(X)$:n lineaarisuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}(X)(P[\varphi]+P[\varphi^\perp]) \overset{(3.1.28)}{=} \overbrace{\lambda_{P[\varphi]}(X)}^{=a} P[\varphi] + \overbrace{\lambda_{P[\varphi^\perp]}(X)}^{=b} P[\varphi^\perp] \\ \overset{(3.1.29)}{=}\ &\underbrace{\lambda_{P[\phi]}(X)}_{=c} P[\phi] + \underbrace{\lambda_{P[\phi^\perp]}(X)}_{=d} P[\phi^\perp] = \mathcal{I}(X)(P[\phi]+P[\phi^\perp]). \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Vertailemalla yhtälöitä (3.1.29) ja (3.1.30) saadaan jokin vakioista $a, b, c, d$ ratkaistua muiden funktiona, esimerkiksi saadaan

$$(a-d)P[\varphi] + (b-d)P[\varphi^\perp] + (d-c)P[\phi] = 0. \tag{3.1.31}$$

Tästä huomataan, että $a=b=c=d$, sillä tilat $P[\varphi],\ P[\varphi^\perp]$ ja $P[\phi]$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Tämä osoittaa että $\lambda_{P[\varphi]}(X) = \lambda_{P[\varphi^\perp]}(X)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

Olkoon nyt $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_1$ kaksi vektoria, jotka eivät ole ortogonaalisia eivätkä yhdensuuntaisia. Silloin voidaan aina löytää vektorit $\varphi^\perp \in \mathcal{H}_1$ ja $\psi^\perp \in \mathcal{H}_1$, jotka saadaan vektoreiden $\varphi$ ja $\psi$ lineaarikombinaationa. Vektorit $\{\psi, \psi^\perp\}$ ja $\{\varphi, \varphi^\perp\}$ siis virittävät saman kaksiulotteisen $\mathcal{H}$:n aliavaruuden, joten

$$|\psi\rangle\langle\psi| + |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp| = |\varphi\rangle\langle\varphi| + |\varphi^\perp\rangle\langle\varphi^\perp|, \tag{3.1.32}$$

jolloin "ei-ortogonaalinen" tilanne siis palautuu yllä käsiteltyyn ortogonaaliseen tapaukseen.

On siis osoitettu, että luku $\lambda_{P[\varphi]}(X)$ ei riipu puhtaan tilan $P[\varphi]$ valinnasta, vaan $\mathcal{I}(X)(P[\varphi]) = \lambda(X)P[\varphi]$ kaikille puhtaille tiloille $P[\varphi]$ ja sitä myöten

$$\mathcal{I}(X)(\rho) = \lambda(X)\rho \tag{3.1.33}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Indusoitu suure on kaavan (3.1.20) mukaan $E(X) = \mathcal{I}(X)^*(I) = \lambda(X)I$ ja reprodusointiehto antaa $p_\rho^E(X) = \mathrm{tr}\,[\lambda(X)\rho] = \lambda(X)$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja $X \in \mathscr{A}$. □

Edellisen lauseen tärkeä seuraus on, että mittaus, joka ei muuta mitään systeemin tilaa, on triviaali. Tulos ei päde kääntäen vaan mittaus voi muuttaa tilaa radikaalistikin, vaikka saatava suure olisi triviaali, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 3.11.** Olkoon $\gamma \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ jokin kiinteä tila ja määritellään $\mathcal{I}(X)(\rho) = \mu(X)\gamma$, missä $\mu$ on todennäköisyysmitta. Tällöin $\mathcal{I}$ on selvästi instrumentti, sillä se triviaalisti toteuttaa ehdot (3.1.17a)-(3.1.17c). Indusoitu suure on $E^{\mathcal{I}}(X) = \mu(X)I$, sillä

$$\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}(X)(\rho)\right] = \mathrm{tr}\left[\mu(X)\gamma\right] = \mu(X) = \mathrm{tr}\left[\mu(X)\rho\right] \quad \text{kaikilla } \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}). \quad (3.1.34)$$

Osoitetaan seuraavaksi, että instrumentti $\mathcal{I}$ on mittauksen indusoima. Kaava $\mathcal{I}(X)(T) = \mu(X)\mathrm{tr}\left[T\right]\gamma$, $T \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$ määrittelee $\mathcal{I}(X)$:n yksikäsitteisen lineaarisen laajennuksen $\mathscr{T}(\mathcal{H}) \to \mathscr{T}(\mathcal{H})$. Kuvaukset $\mathcal{I}(X)$, $X \in \mathscr{A}$, ovat selvästi positiivisia, joten niiden täyspositiivisuus seuraa duaalikuvausten normaalisuudesta ja täyspositiivisuudesta: $\mathcal{I}(X)^*(A) = \mu(X)A$ kaikilla $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, joten $\mathcal{I}(X)^*$ on selvästi normaali ja täyspositiivinen kaikilla $X \in \mathscr{A}$. Nyt Ozawan lauseen 3.7 mukaan $\mathcal{I}$ syntyy jostain mittauksesta.

Tämän mittauksen aiheuttama muutos systeemin tilassa on erittäin radikaali, koska se muuttaa mielivaltaisen alkutilan $\rho$ normittamattomaksi tilan $\propto \gamma$. Erityisesti operaatioita $\mathcal{I}(\Omega)$ nimitetään *tilajoukon täyskontraktioksi* (*engl.* complete state-space contraction), sillä se kutistaa koko tilajoukon yhdeksi pisteeksi $\gamma$.

## 3.2 Mittauksen standardimalli

*Mittauksen standardimallin* kehittäjänä pidetään John von Neumannia, jonka vuonna 1932 julkaiseman teoksen *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* viimeisellä kahdella sivulla esitellään mittausmalli hiukkasen paikkasuureen mittaamiseksi kytkemällä se mittaussysteemin liikemääräsuureeseen [12, 13]. Tulemme myöhemmin havaitsemaan esimerkissä 3.16, että tällaisessa *paikan standardimittauksessa* mitatuksi ei tule tarkka paikkasuure, vaan eräänlainen paikkasuureen sumennos.

Mielenkiintoisena sivuhuomiona mainittakoon, että von Neumann olisi todennäköisesti huomannut että kvanttimekaniikassa suureet on esitettävä semispektraalimittoina, jos hän olisi laskenut esittämässään standardimittauksessa mitatuksi tulevan suureen – tiettävästi tätä hän ei koskaan tehnyt. Sen sijaan suureen matemaattisessa esityksessä pitäydyttiin itseadjungoitujen operaattoreiden ja niitä vastaavien spektraalimittojen esityksessä. Tämä suuntaus alkoi muuttumaan vasta 1960-luvulta alkaen.

Tämän alaluvun tarkoituksena on esitellä tarpeellisilta osilta tarkan suureen mittauksen standardimallia ja alaluvun huipentumana esitellään tällaisessa standardimittauksessa mitatuksi tuleva suure. Huomautettakoon, että standardimalli voitaisiin laajentaa myös yleisille suureille (ja näin onkin tehty esimerkiksi artikkelissa [14]), mutta kyseinen yleistys ei ole tämän tutkielman kannalta tarpeen.

**Määritelmä 3.12.** Oletetetaan, että systeemin $\mathcal{S}$ tarkka suure $A$ pyritään mittaamaan kytkemällä se johonkin mittalaitteen tarkkaan suureeseen $B$ unitaarisen mittauskytkennän $U_{st}^{\lambda} = e^{\imath\lambda A\otimes B}$ kautta[5], missä $\lambda$ on kytkentävakio. Mittausta, jossa mittauskytkentänä on $U_{st}^{\lambda}$, kutsutaan *standardimittaukseksi* ja merkitään $\mathcal{M}_{st} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, \rho_{\mathcal{A}}, U_{st}^{\lambda}, f\rangle$.

**Lemma 3.13.** Unitaarisessa mittauksessa $\mathcal{M}_U = \langle H_{\mathcal{A}}, Z, \phi, U, f\rangle$ mitatuksi tuleva suure on

$$E(X) = V_{\phi}^{*}U^{*}I\otimes Z(f^{-1}(X))UV_{\phi}, \tag{3.2.1}$$

missä $V_{\phi} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_{\mathcal{A}},\ V_{\phi}\varphi = \varphi\otimes\phi$.

*Todistus.* Lauseen 3.1 mukaisesti on olemassa systeemin $\mathcal{S}$ yksikäsitteinen suure $E$

[5]Mittauskytkennästä $U_{st}^{1} = e^{\imath A\otimes B}$ käytetään lyhennettyä merkintää $U_{st}$.

siten, että kaikilla systeemin $\mathcal{S}$ puhtailla alkutiloilla $P[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$, pätee

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}[E(X)P[\varphi]] = \langle\varphi|E(X)\varphi\rangle &= \operatorname{tr}\left[I \otimes Z(f^{-1}(X))\, P[U(\varphi\otimes\phi)]\right] \\
&= \langle U(\varphi\otimes\phi)|I\otimes Z(f^{-1}(X))U(\varphi\otimes\phi)\rangle \\
&= \langle\varphi|V_\phi^* U^* I \otimes Z(f^{-1}(X))UV_\phi\varphi\rangle \\
&= \operatorname{tr}\left[V_\phi^* U^* I\otimes Z(f^{-1}(X))UV_\phi P[\varphi]\right]. \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

Lineaarisuuden ja tilojen spektraalirakenteen nojalla väite pätee myös kaikilla yleisillä systeemin alkutiloilla. □

**Lemma 3.14.** Olkoon $A = \int_\mathbb{R} a\, dE^A(a)$ ja $B = \int_\mathbb{R} b\, dE^B(b)$ itseadjungoitujen operaattoreiden spektraalihajotelmat. Unitaarioperaattori $U_{st}^\lambda$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$
U_{st}^\lambda = \int_\mathbb{R} dE^A(a)\otimes e^{\imath\lambda a B} \qquad (3.2.3)
$$

*Todistus.* Edellä alaluvussa 2.2 todettiin, että $A\otimes B = \int_\mathbb{R} u\, dE^f(u)$, missä $f(a,b) = ab$. Nyt väite seuraa suoraan lemmasta 1.6, sillä kuvaus $g(u) = e^{\imath\lambda u}$ on rajoitettu ja mitallinen, siis

$$
\begin{aligned}
U_{st}^\lambda = \int_\mathbb{R} g(u)\, dE^f(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} (g\circ f)(a,b)\, dE(a,b) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\imath\lambda ab}\, dE^A(a)\otimes dE^B(b) \\
&= \int_\mathbb{R} dE^A(a)\otimes e^{\imath\lambda a B} \qquad (3.2.4)
\end{aligned}
$$

□

**Lause 3.15.** Standardimittauksessa $\mathcal{M}_{st} = \langle H_\mathcal{A}, Z, \phi, U_{st}^\lambda, f\rangle$ mitatuksi tuleva suure on

$$
E(X) = \int_\mathbb{R} p^Z_{\phi_{\lambda a}}(f^{-1}(X))\, dE^A(a), \quad \text{missä } \phi_{\lambda a} = e^{\imath\lambda a B}\phi \qquad (3.2.5)
$$

*Todistus.* Kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ pätee

$$
\begin{aligned}
&\langle \varphi | E(X)\varphi \rangle \\
&\overset{3.13}{=} \quad \langle \varphi | V_\phi^* (U_{st}^\lambda)^* I \otimes Z(f^{-1}(X)) U_{st}^\lambda V_\phi \varphi \rangle \\
&\overset{3.14}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \langle \varphi \otimes \phi | dE^A(a) \otimes e^{-\imath \lambda a B}\, I \otimes Z(f^{-1}(X))\, dE^A(a') \otimes e^{\imath \lambda a' B} \varphi \otimes \phi \rangle \\
&\overset{1.4}{=} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \langle \varphi | \underbrace{dE^A(a)\, dE^A(a')}_{=dE^A(\{a\}\cap\{a'\})} \varphi \rangle \langle \phi | e^{-\imath \lambda a B}\, Z(f^{-1}(X))\, e^{\imath \lambda a' B} \phi \rangle \\
&= \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi | dE^A(a) \varphi \rangle\, \underbrace{\langle \phi | e^{-\imath \lambda a B}\, Z(f^{-1}(X))\, e^{\imath \lambda a B} \phi \rangle}_{p^Z_{\phi_{\lambda a}}(f^{-1}(X))} \\
&= \quad \langle \varphi | \int_{\mathbb{R}} p^Z_{\phi_{\lambda a}}(f^{-1}(X))\, dE^A(a) \varphi \rangle, \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

mikä osoittaa, että mitattu suure $E(X)$ on väitettyä muotoa. □

Kytkentävakion ollessa nollasta poikkeava, $\lambda \neq 0$, on luonnollista antaa asteikkofunktiolle $f$ spesifinen muoto $f_\lambda(x) = \lambda^{-1}x$ kaikilla $x \in \Omega$, jolloin

$$
E(X) = \int_{\mathbb{R}} p^Z_{\phi_{\lambda a}}(\lambda X)\, dE^A(a) \qquad (3.2.7)
$$

Standardimittaus siis tuottaa tulokseksi tarkan suureen $A$ eräänlaisen sumennoksen[6] ja voidaan osoittaa, että standardimittaus voidaan valita tarkaksi vain, jos mitattava tarkka suure $A$ on diskreetti [13, s.11].

Jos se on mahdollista, niin asteikkosuure $Z$ on luonnollista valita suureen $B$ suhteen *kovariantisti* muuntuvaksi

$$
e^{-\imath a \lambda B} Z(\lambda X) e^{\imath a \lambda B} = Z(\lambda(X - a)), \qquad (3.2.8)
$$

sillä silloin mittalaitteen suure $B$ generoi mitta-asteikon arvojen muutoksia, joita voidaan mitata. Kanoninen esimerkki kovarianssiehdon täyttävistä suureista saadaan valitsemalla $Z = P$ ja $B = Q$, missä $Q$ ja $P$ ovat tavanomainen *paikka-* ja

[6] Tätä sumennosta kutsutaan *sumeaksi suureeksi.* Eräs sumeita suureita kattavasti käsittelevä lähde on T. Heinosen väitöskirja *Imprecise Measurements in Quantum Mechanics* (Turun yliopisto, 2005).

*liikemääräoperaattori*. Kovarianssiehto johtaa konvoluutiorakenteeseen, sillä

$$p^Z_{\phi_{\lambda a}}(\lambda X) = \langle \phi | Z(\lambda(X-a))\phi\rangle = \mu^\lambda(X-a), \tag{3.2.9}$$

missä $\mu^\lambda$ on todennäköisyysmitta. Edelleen

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} p^Z_{\phi_{\lambda a}}(\lambda X)\, dE^A(a) = \int_{\mathbb{R}} \mu^\lambda(X-a)\, dE^A(a) = (\mu^\lambda * E^A)(X). \tag{3.2.10}$$

**Esimerkki 3.16.** Olkoon mittaussysteeminä kvanttiobjekti, joka liikkuu suoraviivaisesti avaruudessa, siis $\mathcal{H}_\mathcal{A} = L^2(\mathbb{R})$. Systeemin $\mathcal{S}$ paikkasuureen $Q$ mittaus voidaan edellä esitellyn mukaisesti toteuttaa kytkemällä se esimerkiksi mittaussysteemin liikemäärään $P_\mathcal{A}$; mittauskytkentänä on siis $U_{st}^{-\lambda} = e^{-\imath\lambda Q\otimes P_\mathcal{A}}$.[7] Asteikkosuureeksi on luonnollista valita $Q_\mathcal{A}$, sillä sillä voidaan monitoroida liikemäärän $P_\mathcal{A}$ generoimia paikkatranslaatioita. Tällaisessa *paikan standardimittauksessa* ei tule mitatuksi tarkka paikkasuure $Q$ vaan sen sumennos $Q_g$.

Olkoon systeemi $\mathcal{S}$ aluksi puhtaassa tilassa $P[\varphi]$. Tehdään mittaus $\mathcal{M}_{st} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Q_\mathcal{A}, \phi, U_{st}^{-\lambda}, f_\lambda\rangle$. Tällöin mitattu suure on muotoa

$$\begin{aligned} &Q_g(X) = \int_{\mathbb{R}} \chi_X(q)\lambda|\phi(\lambda(q-Q))|^2\, dq =: (\chi_X * g)(Q), \text{ missä} \\ &g(q) = \lambda|\phi(-\lambda q)|^2. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Lemman (3.15) nojalla $Q_g(X) = \int_{\mathbb{R}} p^{Q_\mathcal{A}}_{\phi_{\lambda x}}(\lambda X)\, dE^Q(x)$, missä $\phi_{\lambda x}(q) = e^{-\imath\lambda x P_\mathcal{A}}\phi(q) = \phi(q-\lambda x)$. Siis

$$\begin{aligned} p^{Q_\mathcal{A}}_{\phi_{\lambda x}}(\lambda X) &= \langle \phi_{\lambda x} | E^{Q_\mathcal{A}}(\lambda X)\phi_{\lambda x}\rangle = \int_{\lambda X} |\phi(q-\lambda x)|^2\, dq \\ &= \int_X \lambda|\phi\left(-\lambda(x-q)\right)|^2\, dq \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_X(q) g(x-q)\, dq = (\chi_X * g)(q), \end{aligned}$$

joka osoittaa, että mitattu suure $Q_g(X)$ on väitettyä muotoa.

[7] Huomaa, että eksponentissa on poikkeuksellisesti miinusmerkki. Etumerkin valinta on lähinnä makuasia, ja tässä se valitaan miinukseksi siistimmän lopputuloksen saamiseksi.

Alaluvun lopuksi esitellään vielä muutama myöhemmin tarvittava tulos ja sen loppuajaksi valitaan mittauskytkennäksi $U_{st}^{\lambda} = e^{\imath\lambda A\otimes P_{\mathcal{A}}}$.

**Lemma 3.17.** (i) Mittauksen $\mathcal{M}_{st} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Q_{\mathcal{A}}, \phi, U_{st}^{\lambda}, f_{\lambda}\rangle$ indusoima instrumentti on

$$\mathcal{I}(X)(\rho) = \int_X I_{\lambda q}\rho I_{\lambda q}^* \, dq, \tag{3.2.12}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, missä $I_{\lambda q} = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\lambda} e^{\imath\lambda a P}\phi(\lambda q)\, dE^A(a) = \sqrt{\lambda}\phi(\lambda(A+q))$.

(ii) Mittauksen $\mathcal{N}_{st} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}}, \phi, U_{st}^{\lambda}, f_{\lambda}\rangle$ indusoima instrumentti on

$$\mathcal{J}(X)(\rho) = \int_X J_{\lambda p}\rho J_{\lambda p}^* \, dq, \tag{3.2.13}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, missä $J_{\lambda p} = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\lambda} e^{\imath\lambda^2 ap}\widehat{\phi}(\lambda p)\, dE^A(a) = \sqrt{\lambda} e^{\imath\lambda^2 pA}\widehat{\phi}(\lambda p)$.

*Todistus.* (i) Lineaarisuuden ja tilojen spektraalirakenteen vuoksi riittää osoittaa väite puhtailla tiloilla; olkoon systeemi siis aluksi tilassa $P[\varphi], \varphi \in \mathcal{H}_1$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,[\mathcal{I}(X)(P[\varphi])L] &= \mathrm{tr}\left[U_{st}^{\lambda} P[\varphi\otimes\phi](U_{st}^{\lambda})^* L\otimes E^{Q_{\mathcal{A}}}(f_{\lambda}^{-1}(X))\right] \\
&= \langle e^{\imath\lambda A\otimes P_{\mathcal{A}}}\varphi\otimes\phi | L\otimes E^{Q_{\mathcal{A}}}(\lambda X) e^{\imath\lambda A\otimes P_{\mathcal{A}}}\varphi\otimes\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \langle dE^A(a)\varphi | L\, dE^A(a')\varphi\rangle \langle e^{\imath\lambda a P_{\mathcal{A}}}\phi | E^{Q_{\mathcal{A}}}(\lambda X) e^{\imath\lambda a' P_{\mathcal{A}}}\phi\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\times X} \lambda\langle e^{\imath\lambda a P_{\mathcal{A}}}\phi(\lambda q) dE^a(a)\varphi | L\, e^{\imath\lambda a' P_{\mathcal{A}}}\phi(\lambda q) dE^A(a')\varphi\rangle\, dq \\
&= \int_X \langle\left(\sqrt{\lambda}\phi\,(\lambda(A+q))\right)\varphi | L\,\left(\sqrt{\lambda}\phi\,(\lambda(A+q))\right)\varphi\rangle\, dq \\
&= \mathrm{tr}\left[\int_X I_{\lambda q} P[\varphi] I_{\lambda q}^*\, dq\, L\right],
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

kaikilla $L \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

(ii) Todistetaan samaan tapaan kuin edellinen kohta. □

Jatkon kannalta edellisen lemman (ii)-kohdan instrumentti on kätevää kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{J}(X)(\rho) = \int_{\lambda X} K_{\lambda p} \rho K_{\lambda p}^* \, dq, \tag{3.2.15}$$

missä $K_{\lambda p} = e^{\imath\lambda p A}\widehat{\phi}(p)$. Tämä muoto saadaan yksinkertaisesti muuttujan vaihdoksella $p \mapsto \lambda p$ aikaisemmasta.

**Esimerkki 3.18.** Mittaus $\widetilde{\mathcal{M}}_{st} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Q_\mathcal{A}, \phi^\lambda, U_{st}\rangle$, missä $\phi^\lambda(q) := \sqrt{\lambda}\phi(\lambda q)$ kaikilla $q \in \mathbb{R}$,[8] määrää saman instrumentin kuin minkä edellisen lemman $\mathcal{M}_{st}$, eli mittaukset $\mathcal{M}_{st}$ ja $\widetilde{\mathcal{M}}_{st}$ ovat ekvivalentit. Tämä saadaan suoraan edellisen lemman todistuksesta, nimittäin nyt $\int_\mathbb{R} e^{\imath aP}\phi^\lambda(q)\, dE^A(a) = \sqrt{\lambda}\phi(\lambda(A+q)) = I_{\lambda q}$.

Edellisessä esimerkissä löydettiin siis lemman 3.17 (i)-kohdan mittauksen $\mathcal{M}_{st}$ kanssa ekvivalentti mittaus $\widetilde{\mathcal{M}}_{st}$, jossa kytkentäparametri $\lambda$ on "siirretty" mittalaitteen alkutilan $\phi^\lambda$ ominaisuudeksi. Myös samaisen lemman (ii)-kohdan mittaukselle $\mathcal{N}_{st}$ löytyy ekvivalentti mittaus muodossa $\langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, P_\mathcal{A}, \phi^\lambda, U_{st}, f_{\lambda^2}\rangle$, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

**Esimerkki 3.19.** Tutkitaan mikä on mittauksen $\widetilde{\mathcal{N}}_{st} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, P_\mathcal{A}, \phi^\lambda, U_{st}, f_{\lambda^2}\rangle$ määräämä instrumentti $\widetilde{\mathcal{J}}$:

$$\begin{aligned}
\langle e^{\imath a P_\mathcal{A}}\phi^\lambda | E^{P_\mathcal{A}}(\lambda^2 X) e^{\imath a' P_\mathcal{A}}\phi^\lambda\rangle &= \int_{\lambda^2 X} \overline{\left(e^{\imath a Q_\mathcal{A}}\widehat{\phi^\lambda}(p)\right)}\, e^{\imath a' Q_\mathcal{A}}\widehat{\phi^\lambda}(p)\, dp \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda^2 X} \overline{e^{\imath a p}\widehat{\phi}\left(\frac{p}{\lambda}\right)}\, e^{\imath a' p}\widehat{\phi}\left(\frac{p}{\lambda}\right)\, dp \\
&= \int_{\lambda X} \overline{e^{\imath a\lambda p}\widehat{\phi}(p)} e^{\imath a'\lambda p}\widehat{\phi}(p)\, dp,
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

joten $\widetilde{\mathcal{J}}(X)(\rho) = \int_{\lambda X} K_{\lambda p}\rho K_{\lambda p}^*\, dq$, kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, missä $K_{\lambda p} = e^{\imath\lambda p A}\widehat{\phi}(p)$. Näin ollen mittaukset $\widetilde{\mathcal{N}}_{st}$ ja $\mathcal{N}_{st}$ määräävät saman instrumentin (ks. kaava (3.2.15)).

[8] Huomaa, että $\phi^\lambda \in \mathcal{H}_{\mathcal{A},1}$, aina kun $\phi \in \mathcal{H}_{\mathcal{A},1}$.

## 3.3 Heikko mittaus

Kvanttimekaniikan erityispiirre on, että mittaus tavallisesti muuttaa mitattavaa tilaa, kuten aiemmin alaluvussa 3.1.2 huomattiin. Intuitiivista kuitenkin olisi, että tehtäessä sopivanlainen erittäin epätarkka mittaus myös tilan muutos voisi olla hyvin vähäistä. Tässä alaluvussa osoitetaan, että tällaisia *heikkoja mittauksia* todella on olemassa.

Heikko mittaus määritellään luonnollisesti tilan muuntumisen heikkoutena, toisin sanoen systeemin tilan $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ tulisi muuntua mittauksessa vain vähän. Täsmällisen määritelmän antaminen onnistuu helpoiten mittauksen indusoiman instrumentin avulla.

**Määritelmä 3.20.** Heikko mittaus on perhe mittauksia $\{\mathcal{M}^\lambda\}_{\lambda \geq 0}$, jos kaikilla tiloilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$

$$\lim_{\lambda \to 0} \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(\Omega)(\rho)L\right] = \operatorname{tr}\left[\rho L\right], \tag{3.3.1}$$

kaikilla $L \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$.

Jatkossa myös yksittäistä mittausta $\mathcal{M}^\lambda$ kutsutaan heikoksi mittaukseksi, jos siihen liittyvä perhe mittauksia $\{\mathcal{M}^\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ on heikko mittaus.

Instrumentin määritelmää käyttäen on helppo huomata, että mittaus $\mathcal{M}^\lambda = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \rho_\mathcal{A}^\lambda, V^\lambda, f\rangle$ on heikko mittaus tarkalleen silloin, kun

$$\lim_{\lambda \to 0} \operatorname{tr}\left[V^\lambda(\rho \otimes \rho_\mathcal{A}^\lambda)L \otimes I\right] = \operatorname{tr}\left[\rho L\right] \tag{3.3.2}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H}), L \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Seuraavissa esimerkeissä tutkitaan millaiset mittaukset kelpaavat heikoiksi mittauksiksi.

**Esimerkki 3.21.** Standardimittausten $\mathcal{M}_{st}^\lambda = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \phi, U_{st}^\lambda, f\rangle$, missä $U_{st}^\lambda = e^{\imath\lambda A \otimes B}$, joukko on heikko mittaus.

*Todistus.* Tarkastetaan väite aluksi puhtailla tiloilla eli olkoon $\rho = P[\varphi]$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

Silloin

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(\Omega)(P[\varphi])L\right] &= \mathrm{tr}\left[U^\lambda_{st}P[\varphi\otimes\phi](U^\lambda_{st})^* L\otimes Z(f^{-1}(\Omega))\right] \\ &= \langle U^\lambda_{st}\varphi\otimes\phi|L\otimes I U^\lambda_{st}\varphi\otimes\phi\rangle, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

joten

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0}\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(\Omega)(P[\varphi])L\right] &= \lim_{\lambda\to 0}\langle U^\lambda_{st}\varphi\otimes\phi|L\otimes I U^\lambda_{st}\varphi\otimes\phi\rangle \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\langle e^{\imath\lambda A\otimes B}\varphi\otimes\phi|L\otimes I e^{\imath\lambda A\otimes B}\varphi\otimes\phi\rangle \\ &= \langle\varphi\otimes\phi|L\otimes I\varphi\otimes\phi\rangle \\ &= \langle\varphi|L\varphi\rangle, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

sillä kuvaus $\lambda\mapsto e^{\imath\lambda A\otimes B}$ on vahvasti jatkuva yksiparametrinen unitaariryhmä ja $L\otimes I$ on rajoitettu operaattori.

Olkoon nyt $\rho=\sum_{i\in\mathbb{N}}p_iP[\varphi_i]\in\mathscr{S}(\mathcal{H})$ (ks. Lause 2.2) mielivaltainen tila. Yleinen tapaus seuraa edellisestä käyttäen hyväksi instrumentin ja jäljen lineaarisuutta sekä jatkuvuutta:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(\Omega)(\rho)L\right] &= \sum_{i\in\mathbb{N}}p_i\,\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(\Omega)(P[\varphi_i])L\right] \\ &\longrightarrow \sum_{i\in\mathbb{N}}p_i\,\mathrm{tr}\left[P[\varphi_i]L\right]=\mathrm{tr}\left[\rho L\right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

kaikilla $L\in\mathscr{L}(\mathcal{H})$. □

Alaluvun loppuajaksi valitaan mittauskytkennäksi $U^\lambda_{st}=e^{\imath\lambda A\otimes P_{\mathcal{A}}}$. Kaavasta (3.3.2) voidaan päätellä, että heikko mittaus pystytään saavuttamaan myös valitsemalla perhe mittalaitteen alkutiloja sopivasti. Seuraava esimerkki osoittaa, että juuri näin on asianlaita.

**Esimerkki 3.22.** Mittausten $\widetilde{\mathcal{M}}^\lambda_{st}=\langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}},Q_{\mathcal{A}},\phi^\lambda,U_{st}\rangle$, missä $\phi^\lambda(x)=\sqrt{\lambda}\phi(\lambda x)$, joukko on heikko mittaus. Nimittäin esimerkin 3.18 mukaisesti $\widetilde{\mathcal{M}}^\lambda_{st}$ indusoi saman instrumentin kuin mittaus $\mathcal{M}^\lambda_{st}=\langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}},Q_{\mathcal{A}},\phi,U^\lambda_{st},f_\lambda\rangle$, joten väite palautuu edelliseen esimerkkiin 3.21. Vastaavasti mittausten $\widetilde{\mathcal{N}}_{st}^{\lambda} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}}, \phi^{\lambda}, U_{st}, f_{\lambda^2} \rangle$ joukko on esimerkin 3.19 nojalla heikko mittaus.

Jokainen mittaus ei suinkaan ole heikko mittaus; vastaesimerkiksi kelpaa mikä tahansa $\lambda$:sta riippumaton ei-triviaali mittaus(perhe). Seuraavaksi on esitelty hieman hienostuneempi vastaesimerkki.

**Esimerkki 3.23.** Kiinnitetään tila $\xi \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja jokin todennäköisyysmitta $\mu$. Instrumentin $\mathcal{I}^{\lambda}(X)(\rho) = \mu(\lambda X)\xi$ indusoivat mittaukset (ks. esimerkki 3.11) eivät ole heikkoja mittauksia, sillä $\lim_{\lambda \to 0} |\operatorname{tr}\left[\left(\mathcal{I}^{\lambda}(\Omega)(\rho) - \rho\right) L\right]| = |\operatorname{tr}\left[(\xi - \rho) L\right]| \neq 0$ jollakin $L \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, aina kun $\rho \neq \xi$. Vastaavat mittaukset eivät intuitiivisestikaan kelpaisi heikoiksi mittauksiksi, sillä tilanmuutos näissä mittauksissa on erittäin radikaali.

## 3.4 Jonomittaus

Aiemmin jo todettiin, että $E$-mittauksen $\mathcal{M}$ indusoima instrumentti $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ kertoo, kuinka systeemin $\mathcal{S}$ alkutila $\rho$ muuttuu mittauksessa: $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)$ tulkitaan systeemin $\mathcal{S}$ mittauksen jälkeisenä (normittamattomana) tilana, ehdolla että mittaus $\mathcal{M}$ tuotti tuloksen joukosta $X$, kun systeemi on aluksi tilassa $\rho$. Seuraavaksi jalostetaan tätä ajatusta pidemmälle. Koko alaluvun ajaksi valitaan pohja-avaruudeksi $\mathbb{R}$ ja siihen liittyväksi $\sigma$-algebraksi $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Olkoon kaksi suuretta $E$ ja $F$, ja systeemi $\mathcal{S}$ aluksi tilassa $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Tehdään peräkkäin kaksi mittausta: aluksi $E$-mittaus $\mathcal{M}_1$ tilassa $\rho$ ja heti sen jälkeen $F$-mittaus $\mathcal{M}_2$ (normittamattomassa) tilassa $\mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)(\rho)$. Tällaista peräkkäistä mittausta $\mathcal{M}_{12}$ kutsutaan $EF$- *jonomittaukseksi.* $EF$-jonomittauksen $\mathcal{M}_{12}$ indusoima instrumentti määräytyy ehdosta

$$\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}}(X, Y)(\rho) = (\mathcal{I}^{\mathcal{M}_2}(Y) \circ \mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X))(\rho), \tag{3.4.1}$$

kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. $\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}}$ määritelee *jonotodennäköisyyden*

$$\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}}(X,Y)(\rho)\right] \;=\; \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_2}(Y)(\mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)(\rho))\right] \tag{3.4.2}$$

eli todennäköisyyden, että systeemin $\mathcal{S}$ $EF$-jonomittaus tilassa $\rho$ tuottaa tuloksen joukosta $(X,Y)$ [15]. Koska edelleen pätee

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}}(X,Y)(\rho)\right] &= \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)(\rho)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}_2}(Y)^*(I)\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)(\rho)\,F(Y)\right], \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

voidaan luku tr $\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}}(X,Y)(\rho)\right]$ tulkita todennäköisyydeksi, että $F$-mittaus tuottaa (normittamattomassa) tilassa $\mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)(\rho)$ tuloksen joukosta $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Huomion arvoista on, että yleisesti $\mathcal{I}^{\mathcal{M}_{12}} \neq \mathcal{I}^{\mathcal{M}_{21}}$, jopa silloin, kun $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ ovat molemmat $E$-mittauksia.

$EF$-jonomittauksen indusoima kaksoissuure $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on dualiteetin avulla annettavissa

$$M(X,Y) = \mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)^*(F(Y)), \tag{3.4.4}$$

kaikilla $X, Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ja sen marginaalisuureet ovat

$$M(X,\Omega_2) = \mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(X)^*(I) = E(X) \tag{3.4.5}$$

$$M(\Omega_1,Y) = \mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(\Omega_1)^*(F(Y)). \tag{3.4.6}$$

Ylläolevat kaavat ovat hyvin ymmärrettävissä intuitiivisesti: ensimmäisenä mitattu suure ei riipu jälkimmäisestä mittauksesta, mutta ensimmäinen mittaus aiheuttaa muutoksen alkuperäisessä tilassa, joka vaikuttaa jälkimmäisenä mitattavaan suureeseen.

# 4 Suureen arvot

Heikot mittaukset ja heikot arvot esiteltiin ensimmäistä kertaa Aharonovin *et al.* artikkelissa [16] jo vuonna 1988. Vaikka ensijulkaisusta on kulunut jo jonkin aikaa, ovat heikot mittaukset ja heikot arvot edelleen kuuma tutkimusaihe. Niiden avulla on pyritty muun muassa selittämään monia epäintuitivisia ja paradoksaalisia kvanttimekaniikan ilmiöitä, kuten esimerkiksi *Hardyn paradoksia*, jossa kaksi hiukkasta, jotka aina kohdatessaan annihiloituvat, voidaan joskus havaita vielä niiden kohtaamisen jälkeen [17, 18, 19]. Paljon keskustelua herättäneitä tuoreita tutkimuksia ovat muun muassa fotonin keskimääräisten lentoratojen selvittämistä [20], tilanmääritystä [21, 22] ja Ozawan mittausepätarkkuusrelaatiota [23, 24] heikkojen arvojen avulla käsittelevät artikkelit – onpa niitä ehdotettu jopa selitykseksi ylivalonnopeudella liikkuville neutriinoille [25]. Lisäksi *Physics World*-lehden vuoden 2011 kymmenen suurimman läpimurron listalla heikot mittaukset ja heikot arvot päätyivät sijoille 1 ja 2 [26].

Mainittakoon kuitenkin, että heikot mittaukset ja heikot arvot ovat saaneet osakseen myös kritiikkiä (katso esimerkiksi [27] ja siihen viittaavat artikkelit) ja niiden merkitystä kvanttimekaniikan kannalta on kyseenalaistettu. Eräs syy kritiikkiin lienee se, että heikkoihin mittauksiin ja heikkoihin arvoihin liittyvät julkaisut sisältävät usein matemaattisia epätäsmällisyyksiä – tämä tullaan konkreettisesti huomaamaan seuraavassa luvussa.

Tässä luvussa tutustutaan heikkojen arvojen perusteoriaan. Luvun päätuloksena johdetaan tarkan suureen heikko arvo operationaalisesti lähtien liikkeelle heikon ja "vahvan" standardimittauksen jonomittauksesta. Peruslähteenä tässä luvussa käytetään artikkelia [14].

## 4.1 Tavanomaiset arvot

Ennen heikkoihin arvoihin siirtymistä on syytä esitellä lyhyesti suureiden erilaisia arvoja. Jotta erottelu suureen erilaisten arvojen välillä tulisi selväksi, on jokaisesta arvosta annettu erikseen esimerkki spin-$\frac{1}{2}$ -suureen, $S_{\vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \in \mathscr{L}_s(\mathbb{C}^2)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$,

$\|\vec{a}\| = 1$, ja $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ tapauksessa. Tässä

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

ovat Paulin spinmatriisit.

### 4.1.1 Arvo

Suureen $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mahdollisiksi arvoiksi kutsutaan sen mahdollisia mittaustuloksia. Edellä luvussa 2 suureen $E$ mahdolliset mittaustulokset karakterisoitiin todennäköisyysmittoihin $p_\rho^E$ liittyvinä otosavaruuden mahdollisina tapahtumina eli joukkoina $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, joille $p_\rho^E(X) > 0$ jossakin systeemin tilassa $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$. Näin ollen suureen $E$ mahdollinen arvo voitaisiin alustavasti määritellä niiksi otosavaruuden pisteiksi $x \in \mathbb{R}$, joille $p_\rho^E(\{x\}) > 0$ jossakin systeemin tilassa $\rho$. Määritelmän antaminen tässä muodossa on kuitenkin turhan rajoittava, sillä esimerkiksi paikkaoperaattorille $Q$ saadaan $p_\varphi^Q(\{x\}) = \int_{\{x\}} |\varphi(q)|^2\, dq = 0$, kaikilla $\varphi \in L^2(\mathbb{R})_1$ – siis esimerkiksi paikkaoperaattorilla ei olisi lainkaan arvoja!

Alustavan määritelmän välitön yleistys on kutsua pistettä $x \in \mathbb{R}$ suureen $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mahdolliseksi arvoksi, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa tila $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ siten, että $p_\rho^E((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0$. Tällaisten välien generoiman joukon $\cap_{\varepsilon>0} \cup_{x\in\mathbb{R}} \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \,|\, p_\rho^E((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0\}$ sulkeumana saadaan todennäköisyysmitan $p_\rho^E$ tuki $\mathrm{supp}(p_\rho^E)$ eli suppein suljettu joukko $X \subset \mathbb{R}$, jonka komplementille $X^c$ on voimassa $p_\rho^E(X^c) = 0$. Edelleen $\mathrm{supp}(E) = \overline{\cup_{\rho\in\mathscr{S}(\mathcal{H})} \mathrm{supp}(p_\rho^E)}$, joten loppujen lopuksi suureen $E$ arvoiksi on luonnollista kutsua juuri joukon $\mathrm{supp}(E)$ alkioita.

**Määritelmä 4.1.** Suureen $E : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mahdollisia arvoja ovat sen tuen $\mathrm{supp}(E)$ alkiot.

Edeltävät tarkastelut osoittavat, että otosavaruuden $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tapauksessa arvoille saadaan seuraava yhtäpitävä määritelmä.

**Lemma 4.2.** Olkoon $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ semispektraalimitta. Silloin $x \in \mathrm{supp}(E)$, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa tila $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ siten, että $p^E_\rho\left((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right) > 0$.

Tarkan suureen $A$ arvot ovat sen spektrin alkioita, nimittäin $\mathrm{supp}(E^A) = \sigma(A)$ (ks. lemma 1.11). Edelleen $x \in \sigma(A)$, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa tila $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ siten, että $p^A_\rho\left((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\right) = 1$.

**Esimerkki 4.3.** Olkoon $S_{\vec{a}}$ spin-$\frac{1}{2}$ -suure. Ylläolevan mukaisesti $\mathrm{supp}(E^{S_{\vec{a}}}) = \sigma(S_{\vec{a}})$, joten spin-$\frac{1}{2}$ -suureen mahdolliset arvot ovat sen ominaisarvot. Suoralla laskulla nähdään, että nämä ovat $\{-1, 1\}$. Merkitään jatkossa suureen $S_{\vec{a}}$ ominaisarvoihin $-1$ ja $1$ liittyviä ominaisvektoreita symboleilla $|-_{\vec{a}}\rangle$ ja $|+_{\vec{a}}\rangle$ vastaavasti. Ominaisvektoreista muodostetuiksi spektraaliprojektioiksi saadaan $|\pm_{\vec{a}}\rangle\langle\pm_{\vec{a}}| = \frac{1}{2}\left(1 \pm \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\right)$, joista saadaan edelleen spin-$\frac{1}{2}$ -suureen $S_{\vec{a}}$ spektraalihajotelma:

$$S_{\vec{a}} = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \vec{a} \cdot \vec{\sigma}\right). \tag{4.1.2}$$

### 4.1.2 Likimääräinen arvo

Käytännössä suureen $E$ mittaaminen voi usein olla hankalaa, mutta helpompaa on mitata *likimääräinen suure*[9] $\widetilde{E}$: esimerkiksi paikkaa mitattaessa tosiasiassa yleensä mitataan diskretoitua paikkasuuretta. Tällaisen likimääräisen suureen $\widetilde{E}$ arvoja – joukon $\mathrm{supp}(\widetilde{E})$ alkioita – kutsutaan suureen $E$ *likimääräisiksi arvoiksi.*

Eräs tärkeä luokka tarkan suureen $A$ likimääräisiä suureita on sumeiden suureiden $\mu * E^A$ joukko, missä $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ on todennäköisyysmitta, ja sumean suureen $\mu * E^A$ arvoja kutsutaan $A$:n *$\mu$-likimääräisiksi arvoiksi.* Tarkan suureen $A$ $\mu$-likimääräiset arvot realisoituvat luonnollisella tapaa $A$:n standardimittauksissa $\mathcal{M}_{st} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, \phi, U_{st}, f_\lambda \rangle$, $U_{st} = e^{\imath\lambda A \otimes B}$. Nimittäin asteikkosuureen $Z$ kovariantti muuntuminen kytketyn suureen $B$ suhteen (ks. 3.2.8) johtaa siihen, että tosiasiassa

[9] Likimääräisistä suureista kiinnostunut lukija voi tutustua esimerkiksi P. Buschin ja D.B. Pearsonin artikkeliin *Universal joint-measurement uncertainty relation for error bars*, J. Math. Phys. **48**(8), s.1-10, (2007).

mitattua tulee suure

$$E(X) = (\mu^\lambda * E^A)(X), \tag{4.1.3}$$

missä $\mu^\lambda(X) = \langle\phi|Z(\lambda X)\phi\rangle$. Tarkan suureen $A$ $\mu$-likimääräisten arvojen joukon $\mathrm{supp}(\mu * E^A)$ rakenne riippuu vahvasti todennäköisyysmitan $\mu$ valinnasta, joskin selvästi aina $\mathrm{supp}(\mu * E^A) \subset \mathbb{R}$.

**Esimerkki 4.4.** Spin-$\frac{1}{2}$ -suureen $S_{\vec{a}}$ $\mu$-likimääräisten arvojen joukko $\mathrm{supp}(\mu * E^{S_{\vec{a}}})$ vaihtelee kahden pisteen joukosta koko reaalisuoraan, riippuen mitan $\mu$ valinnasta. Erityisesti $\mathrm{supp}(\mu * E^{S_{\vec{a}}})$ koko $\mathbb{R}$, kun kaikilla $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ määritellään $\mu(X) = \langle\phi_0|E^Q(X)\phi_0\rangle$, missä $\phi_0 \in L^2(\mathbb{R})_1$ on harmonisen oskillaattorin perustila: pisteittäin määriteltynä $\phi_0(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-t^2/2}$.

*Todistus.* Olkoon $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} p_\rho^{\mu * E^{S_{\vec{a}}}}((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) &= \mathrm{tr}\left[\mu * E^{S_{\vec{a}}}((x-\varepsilon, x+\varepsilon))\,\rho\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\int_{\mathbb{R}} \mu((x-a-\varepsilon, x-a+\varepsilon))\, dE^{S_{\vec{a}}}(a)\,\rho\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\mu((x-1-\varepsilon, x-1+\varepsilon))\, P[+_{\vec{a}}]\,\rho\right. \\ &\quad \left. -\mu((x+1-\varepsilon, x+1+\varepsilon))\, P[-_{\vec{a}}]\,\rho\right]. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Valitsemalla $\rho = P[+_{\vec{a}}]$ saadaan

$$\begin{aligned} p_\rho^{\mu * E^{S_{\vec{a}}}}((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) &= \langle\phi_0|E^Q((x-1-\varepsilon, x-1+\varepsilon))\,\phi_0\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{x-1-\varepsilon}^{x-1+\varepsilon} e^{-t^2}\, dt > 0, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ja $\varepsilon > 0$. Tapauksessa $x = 1$ voidaan valita $\rho = P[-_{\vec{a}}]$, jolloin

$$p_\rho^{\mu * E^{S_{\vec{a}}}}((x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} e^{-t^2}\, dt > 0, \tag{4.1.6}$$

kaikilla $\varepsilon > 0$. Lemman 4.2 nojalla tästä seuraa väite. $\square$

### 4.1.3 Keskiarvo

Jokainen suureen ja tilan pari $(E, \rho)$ määrää todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathscr{A}, p_\rho^E)$, missä suureen $E$ probabilistisia ominaisuuksia tilassa $\rho$ voidaan analysoida: erityisesti todennäköisyysavaruuden ollessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\rho^E)$ on mahdollista tutkia todennäköisyysmitan $p_\rho^E$ momentteja.

Muistetaan, että jokaiselle suureelle $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ momenttioperaattorit $E[k] := \int_\mathbb{R} x^k \, dE(x)$ ovat hyvin määriteltyjä symmetrisiä operaattoreita kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Niiden avulla voidaan ilmaista mittaustulostilaston $p_\varphi^E$ *k.s momentti* vektoritilassa $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\langle \varphi | E[k] \varphi \rangle$, aina kun $\varphi$ kuuluu $E[k]$:n määrittelyalueeseen $\mathscr{D}(x^k, E)$. Erityisesti mittaustulostilaston 1. momentti – tuttavallisemmin keskiarvo – voidaan antaa muodossa

$$\operatorname{Exp}(E, \varphi) = \langle \varphi | E[1] \varphi \rangle, \tag{4.1.7}$$

aina kun $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$. Tarkalle suureelle $E^A[1] = A$, joten erityisesti $\langle \varphi | A \varphi \rangle$ on tarkan suureen $A$ keskiarvo vektoritilassa $\varphi \in \mathcal{H}_1$, aina kun $\varphi \in \mathscr{D}(A)$.

Keskiarvo voidaan yleistää mielivaltaiselle tilalle $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ spektraalihajotelman $\rho = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i P[\varphi_i]$ avulla:

$$\operatorname{Exp}(E, \rho) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i \langle \varphi_i | E[1] \varphi_i \rangle = \operatorname{tr}\left[ E[1] \rho \right], \tag{4.1.8}$$

aina kun $\varphi_i \in \mathscr{D}(x, E)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja kyseinen summa suppenee: tällöin merkitään lyhyesti $\rho \in \mathscr{D}(x, E)$.

Yleisesti keskiarvojen joukko $\operatorname{Exp}(E) = \{\operatorname{Exp}(E, \rho) | \, \rho \in \mathscr{D}(x, E)\}$ ei määräydy $E$:n arvojoukosta $\operatorname{supp}(E)$, joskin rajoitetulle itseadjungoidulle operaattorille $A$ pätee $\operatorname{supp}(E^A) \subset \operatorname{Exp}(A)$ [28, s.7]. Seuraava esimerkki valottaa tilannetta.

**Esimerkki 4.5.** Spin-$\frac{1}{2}$ -suureen $S_{\vec{a}}$ keskiarvojen joukko $\operatorname{Exp}(S_{\vec{a}}) = [-1, 1]$.

*Todistus.* Jokainen tila $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{C}^2)$ on muotoa $\rho = \rho_{\vec{n}} = \frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$, $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$,

$\|\vec{n}\| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{Exp}(S_{\vec{a}}, \rho_{\vec{n}}) &= \mathrm{tr}\,[S_{\vec{a}}\,\rho_{\vec{n}}] = \vec{a}\cdot\vec{n} \\ &= \|\vec{a}\|\|\vec{n}\|\cos(\theta_{\vec{a},\vec{n}}) \leq \cos(\theta_{\vec{a},\vec{n}})\,, \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

missä $\theta_{\vec{a},\vec{n}}$ on vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{n}$ välinen kulma, ja tästä väite seuraa. □

Erityisesti huomataan, että $\mathrm{supp}(E^{S_{\vec{a}}}) \subset \mathrm{Exp}(S_{\vec{a}})$, niinkuin pitääkin.

### 4.1.4 Ehdollinen keskiarvo

Olkoon $\mu : \mathscr{A} \to [0,1]$ todennäköisyysmitta. Kiinnitetään jokin joukko $B \in \mathscr{A}$, jolle $\mu(B) \neq 0$. Pari $(\mu, B)$ määrittelee uuden todennäköisyysmitan $\mathscr{A} \to [0,1]$, niin sanotun *ehdollisen todennäköisyysmitan* kaavan

$$\mu(A\,|\,B) := \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)} \tag{4.1.10}$$

kaikilla $A \in \mathscr{A}$, kautta. Tälle todennäköisyysmitalle $\mu(\cdot\,|\,B)$ voidaan laskea momentit tuttuun tapaan. Erityisesti ensimmäistä momenttia nimitetään *ehdolliseksi keskiarvoksi* ehdolla $B$.

Edellisessä luvussa esitellyn mukaisesti voimme määritellä jonotodennäköisyyden, että ensimmäisenä tehty suureen $E$-mittaus $\mathcal{M}$ tuottaa tuloksen joukosta $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja sitä seuraava $F$-mittaus tuottaa tuloksen joukosta $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kun systeemi on aluksi tilassa $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, kätevästi käyttäen $E$-mittaukseen $\mathcal{M}$ liittyvää instrumenttia:

$$\begin{aligned} p_\rho(E(X)\ \&\ F(Y)) &:= \mathrm{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)^*(F(Y))\,\rho\right] \\ &= \mathrm{tr}\,[M(X,Y)\,\rho]\,, \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

missä $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ on $EF$-jonomittauksen indusoima kaksoissuure. Tämä on todennäköisyysmitta, sillä kaksoismitta $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni (X,Y) \mapsto$

$\mathrm{tr}\,[M(X,Y)\,\rho]$ laajenee yksikäsitteisesti avaruuden $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ todennäköisyysmitaksi. Siitä saadaan eräs uusi todennäköisyysmitta määrittelemällä

$$\begin{aligned} p_\rho(E(X)\,|\,F(Y)) &:= \frac{\mathrm{tr}\,[M(X,Y)\,\rho]}{\mathrm{tr}\,[M(\mathbb{R},Y)\,\rho]} \\ &= \frac{\mathrm{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(X)(\rho)\right]}{\mathrm{tr}\,[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R})(\rho)]}, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

aina kun $\mathrm{tr}\,[M(\mathbb{R},Y)\,\rho] = \mathrm{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R})(\rho)\right] \neq 0$. Tämä todennäköisyysmitta on selvästi kaavan (4.1.10) muotoa, kun kirjoitetaan

$$p_\rho(E(X)\,|\,F(Y)) := \frac{\mathrm{tr}\,[M\left((X,\mathbb{R})\cap(\mathbb{R},Y)\right)\,\rho]}{\mathrm{tr}\,[M(\mathbb{R},Y)\,\rho]}, \tag{4.1.13}$$

joten se määrittelee ehdollisen todennäköisyyden[10], jonka tulkinta on selvä: $p_\rho(E(X)\,|\,F(Y))$ on ehdollinen todennäköisyys, että ensimmäisenä tehty suureen $E$-mittaus $\mathcal{M}$ tuottaa tuloksen joukosta $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja sitä seuraava $F$-mittaus tuottaa tuloksen joukosta $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kun systeemi on aluksi tilassa $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$.

Edellämainitun mukaisesti voidaan määritellä ehdollinen keskiarvo

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}(E,F(Y),\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{\langle\varphi|M(dx,Y)\varphi\rangle}{\langle\varphi|M(\mathbb{R},Y)\varphi\rangle} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{\langle\varphi|\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(dx)^*(F(Y))\,\varphi\rangle}{\langle\varphi|\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^*(F(Y))\,\varphi\rangle} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{\mathrm{tr}\left[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(dx)(P[\varphi])\right]}{\mathrm{tr}\,[F(Y)\,\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R})(P[\varphi])]}, \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

aina kun $\varphi \in \mathscr{D}\,(x, M(\cdot,Y))$ ja $\langle\varphi|M(\mathbb{R},Y)\varphi\rangle \neq 0$. Korostaaksemme mittauksen $\mathcal{M}$ roolia tätä ehdollista keskiarvoa kutsutaan suureen $E$ *$\mathcal{M}$-ehdolliseksi keskiarvoksi* ehdolla, että jälkimmäinen $F$-mittaus tuottaa tuloksen joukosta $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, kun systeemi oli aluksi vektoritilassa $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Edelleen tämä yleistyy ainakin muodollisesti myös sekatiloille $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, aina kun $\rho \in \mathscr{D}(x, M(\cdot,Y))$ ja $\mathrm{tr}\,[M(\mathbb{R},Y)\,\rho] \neq 0$.

[10]Tarkalleen ottaen kaavan (4.1.13) vasen puoli on hieman harhaanjohtava, nimittäin kyseessä on juuri todennäköisyysmitan $\mathrm{tr}\,[M(\cdot)\rho]$ kaavan (4.1.10) mielessä määräämä ehdollinen todennäköisyys, kun joukoiksi valitaan $A = (X,\mathbb{R})$ ja $B = (\mathbb{R},Y)$. Kaavan (4.1.13) mittausteoreettinen tulkita on kuitenkin selvä ja käytetty kirjoitusasu sen vuoksi perusteltu.

Suureen $E$ $\mathcal{M}$-ehdollisten keskiarvojen joukko $\mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}(E) := \{\mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}(E, F(Y), \rho) \mid F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}),\ Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})\}$ riippuu tietenkin mittauksen $\mathcal{M}$ valinnasta, mutta selvästi aina $\mathrm{Exp}(E) \subset \mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}(E)$.

**Esimerkki 4.6.** Spin-$\frac{1}{2}$ -suureen $S_{\vec{a}}$ $\mathcal{M}$-ehdollisten keskiarvojen joukko on koko $\mathbb{R}$, kun mittaus $\mathcal{M}$ valitaan sopivasti.

*Todistus.* Olkoon $\Omega = \{-1, +1\}$. Määritellään operaatioarvoinen joukkofunktio $\mathcal{I} : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathscr{L}(\mathscr{T}(\mathbb{C}^2))$ avaruuden $\mathscr{T}(\mathbb{C}^2)$ kannassa $\{|j\rangle\langle k| \mid j, k = \pm_{\vec{a}}\}$ seuraavasti:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{I}(\pm 1)(P[\pm_{\vec{a}}]) = P[\pm_{\vec{a}}] & \mathcal{I}(\pm 1)(|\pm_{\vec{a}}\rangle\langle\mp_{\vec{a}}|) = 0 \\ \mathcal{I}(\pm 1)(P[\mp_{\vec{a}}]) = 0 & \mathcal{I}(\pm 1)(|\mp_{\vec{a}}\rangle\langle\pm_{\vec{a}}|) = 0 \end{array}. \tag{4.1.15}$$

Lineaarisuuden nojalla $\mathcal{I}$ toteuttaa ehdot (3.1.17a) - (3.1.17c), joten $\mathcal{I}$ on eräs instrumentti. Suoralla laskulla huomataan, että

$$\mathrm{tr}\,[\mathcal{I}(i)(|j\rangle\langle k|)] \quad = \quad \mathrm{tr}\left[E^{S_{\vec{a}}}(i)\,|j\rangle\langle k|\right], \tag{4.1.16}$$

kaikilla $i \in \Omega$, $j, k = \pm_{\vec{a}}$, joten tämä instrumentti indusoi suureen $E^{S_{\vec{a}}}$.

$\mathcal{I}(\pm 1)$:n matriisi $\mathscr{T}(\mathbb{C}^2)$ kannassa $\{|j\rangle\langle k| \mid j, k = \pm_{\vec{a}}\}$ on

$$\mathcal{I}(\pm 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.1.17}$$

joka on selvästi täyspositiivinen. Täten instrumentti $\mathcal{I}$ on täyspositiivinen, jolloin lauseen 3.7 nojalla on olemassa mittaus $\mathcal{M}$, jolle $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\mathcal{M}}$. Edellä olevan nojalla tämä mittaus $\mathcal{M}$ on $S_{\vec{a}}$-mittaus.

Olkoon $\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{C}^2)$ sellainen, että $\rho = c_0 P[+_{\vec{a}}] + c_1 P[-_{\vec{a}}]$, missä $c_0, c_1$ ovat positiivisia lukuja, joille $c_0 + c_1 = 1$. Silloin kaavan (4.1.14) mukaisesti

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}\,(S_{\vec{a}}, F(Y), \rho) &= \sum_{j\in\Omega} j\, \frac{\mathrm{tr}\,[F(Y)\,\mathcal{I}(j)(\rho)]}{\mathrm{tr}\,[F(Y)\,\mathcal{I}(\Omega)(\rho)]} \\ &= \frac{c_0\,\mathrm{tr}\,[F(Y)\,P[+\vec{a}]] - c_1\,\mathrm{tr}\,[F(Y)\,P[-\vec{a}]]}{c_0\,\mathrm{tr}\,[F(Y)\,P[+\vec{a}]] + c_1\,\mathrm{tr}\,[F(Y)\,P[-\vec{a}]]}. \qquad (4.1.18) \end{aligned}$$

Valitsemalla suure $F : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ sopivasti saadaan luku $\mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}\,(S_{\vec{a}}, F(Y), \rho)$ vastaamaan mielivaltaista reaalilukua. Luvut $\mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}\,(S_{\vec{a}}, F(Y), \rho)$ eivät kuitenkaan ole kompleksisia, sillä kuvaus $\mathcal{B}(\Omega^2) \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}\,[F(Y)\,\mathcal{I}(X)(\rho)] \in [0, 1]$ on todennäköisyysmitta. □

## 4.2 Heikko arvo

Heikot arvot ja heikot mittaukset näkivät tiettävästi ensimmäistä kertaa päivänvalon Aharonovin *et al.* artikkelissa *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-$\frac{1}{2}$ Particle Can Turn Out to be 100* vuonna 1988. Kyseisessä artikkelissa määritellään tarkan suureen $A$ heikko arvo vektoritilassa $\varphi$ ehdollistettuna vektoritilalla $\eta$ muodossa:

$$A^w(\varphi, \eta) = \frac{\langle \eta | A\varphi \rangle}{\langle \eta | \varphi \rangle}. \qquad (4.2.1)$$

Luonnollisesti tämä nyt jo liki 30-vuotias määritelmä voidaan antaa yleisemminkin:

**Määritelmä 4.7.** Olkoot $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ suure, vektoritila $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$ ja *efekti* $B \in \mathscr{E}(\mathcal{H}) := \{B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \,|\, 0 \leq B \leq I\}$, siten että $B\varphi \neq 0$. Suureen $E$ heikko arvo vektoritilassa $\varphi$, ehdollistettuna efektillä $B$, on:

$$E^w(\varphi, B) = \frac{\langle \varphi | B\, E[1]\varphi \rangle}{\langle \varphi | B\,\varphi \rangle}. \qquad (4.2.2)$$

Erityisesti valitsemalla $E = E^A$ ja $B = |\eta\rangle\langle\eta|$ jollekin vektorille $\eta \in \mathcal{H}_1$ saadaan kaava (4.2.1), ja erityisesti valitsemalla ehdollistavaksi efektiksi $B = I$ saadaan suureen $E$ keskiarvo $E^w(\varphi, I) = \mathrm{Exp}(E, \varphi)$. Määritelmä yleistyy (ainakin muodollisesti) myös sekatiloille $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ :

$$E^w(\rho, B) = \frac{\mathrm{tr}\,[B\,E[1]\,\rho]}{\mathrm{tr}\,[B\,\rho]}, \tag{4.2.3}$$

aina kun $\mathrm{tr}\,[B\,\rho] \neq 0$ ja $B\,E[1]\,\rho \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$.

Edelleen määritellään suureen $E$ heikkojen arvojen joukko $E^w = \{E^w(\rho, B) \mid B \in \mathscr{E}(\mathcal{H}), \rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})\}$. Selvästi keskiarvojen ja ehdollisten keskiarvojen joukot sisältyvät heikkojen arvojen joukkoon järjestyksessä $\mathrm{Exp}(E) \subset \mathrm{Exp}_{\mathcal{M}}(E) \subset E^w$. Seuraavassa esimerkissä tutkitaan tätä aihetta spin-$\frac{1}{2}$ -suureen kannalta.

**Esimerkki 4.8.** Spin-$\frac{1}{2}$ -suureen $S_{\vec{a}}$ heikkojen arvojen joukko ${S_{\vec{a}}}^w$ on koko $\mathbb{C}$.

*Todistus.* Merkitään $\varphi = (x, y) \neq 0$ ja $\eta = (v, w) \neq 0$, missä $x, y, z, w \in \mathbb{C}$. Silloin

$$\begin{aligned} S_{\vec{a}}^w(\varphi, \eta) &= \frac{\langle \eta | S_{\vec{a}} \varphi \rangle}{\langle \eta | \varphi \rangle} \\ &= \frac{a_1(\overline{v}y + \overline{w}x) - \imath a_2(\overline{v}y - \overline{w}x) + a_3(\overline{v}x - \overline{w}y)}{\overline{v}x + \overline{w}y} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

(huomaa, että $\varphi$:n ja $\eta$ ei tämän laskun kannalta tarvitse olla yksikkövektoreita, sillä korvaus $\widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\|\eta\|}$ ja vastaavasti $\widetilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$, antaa saman heikon arvon). Ainakin yhden luvuista $a_1, a_2, a_3$ on oltava nollasta eroava, joten rajoituksetta voidaan olettaa, että ainakin $a_1 \neq 0$. Kiinnittämällä jokin muuttujista $x, y, v, w$, esimerkiksi $v$, saadaan ratkaistua yhtälö $\overline{v}x + \overline{w}y = 1$. Kiinnittämällä tämän jälkeen jokin muuttujista $x, y, w$, esimerkiksi $w$ saadaan ratkaistua yhtälö $\overline{v}y - \overline{w}x = 0$. Nyt $x$ ja $y$ ovat vielä riippumattomia ja ylläoleva yhtälö on yksinkertaistunut muotoon:

$$S_{\vec{a}}^w(\varphi, \eta) = (a_1\overline{w} + a_3\overline{v})x + (a_1\overline{v} - a_3\overline{w})y \tag{4.2.5}$$

Vaaditaan, että edellinen on muotoa $\alpha + \imath\beta$, jollekin mielivaltaisille luvuille $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tämä onnistuu kiinnittämällä jompi kumpi muuttujista $x$ tai $y$. Viimeisen muuttujan riippumattomuus pitää huolen siitä, että ehdot $(v, w) \neq 0$ ja $(x, y) \neq 0$ ovat voimassa. $\square$

### 4.2.1 Heikon arvon operationaalinen merkitys

Olkoon $A$ tarkka suure. $A$:n heikko arvo liittyy tavallisesti jonomittaukseen, jossa ensimmäisessä standardimallin mukaisessa $\mathcal{M}^{\lambda}_{st} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, C, \rho, U^{\lambda}_{st}, f_{\lambda}\rangle$, $U^{\lambda}_{st} = e^{\imath\lambda A\otimes B}$ mittauksessa systeemin ja mittalaitteen välinen vuorovaikutus on niin heikko, siis mittauskytkentä $\lambda \approx 0$, että ensimmäisen mittauksen aiheuttama muutos systeemin tilassa voidaan jättää huomiotta[11] – toisin sanoen mittausten $\mathcal{M}^{\lambda}_{st}$ parvi muodostaa heikon mittauksen. Silloin hintana on luvun 3.1.2 mukaisesti, että mittaus on vuorovaikutuksen heiketessä lähempänä ja lähempänä triviaalia mittausta: siis mitattava suure tulee yhä sumeammaksi. Jonomittauksen jälkimmäiselle mittaukselle ei tarvitse antaa eksplisiittistä muotoa. Tässä jonomittauksessa mitatuksi tuleva kaksoissuure on silloin tuttuun tapaan

$$M(X,Y) = \mathcal{I}^{\lambda}(X)^*(F(Y)) \tag{4.2.6}$$

missä $\mathcal{I}^{\lambda}$ on mittauksen $\mathcal{M}^{\lambda}_{st}$ indusoima instrumentti ja $F$ on jälkimmäisessä mittauksessa mitattu suure.

Seuraavat kaksi lausetta osoittavat, että edellä esitetyn jonomittauksen rajankäynnin $\lambda \to 0$ tuloksena saadaan heikon arvon $A^w(\varphi, F(Y))$ reaali- ja imaginääriosa, kun asteikkosuure valitaan sopivasti. Näistä ensimmäisessä lauseessa tarkalta asteikkosuureelta $C$ vaaditaan kovariantti muuntuminen kytketyn tarkan suureen $B$ suhteen (ks. kaava (3.2.8)).

**Lause 4.9.** Olkoon $\mathcal{I}^{\lambda}$ mittauksen $\mathcal{M}^{\lambda}_{st} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, C, \phi, U^{\lambda}_{st}, f_{\lambda}\rangle$ indusoima instrumentti, missä $\phi \in \mathscr{D}(BC) \cap \mathscr{D}(CB)$ toteuttaa $\langle\phi|C\phi\rangle = 0$ ja $\langle\phi|CB\phi\rangle = \frac{\imath}{2}$. Silloin mittauksessa $\mathcal{M}^{\lambda}_{st}$ mitatuksi tulevalle suureelle $\mu^{\lambda} * E^A$ (ks. kaava (3.2.10)) pätee

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\mathrm{Exp}_{\mathcal{M}^{\lambda}_{st}}(\mu^{\lambda} * E^A, F(Y), \varphi) &= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} x\frac{\langle\varphi|\mathcal{I}^{\lambda}(dx)^*(F(Y))\varphi\rangle}{\langle\varphi|\mathcal{I}^{\lambda}(\mathbb{R})^*(F(Y))\varphi\rangle} \\ &= \mathfrak{Re}\left[\frac{\langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle}{\langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle}\right]\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

[11] Tämä ei kuitenkaan ole ainut tapa heikon arvon saavuttamiseksi, kuten esimerkki 4.11 osoittaa.

kaikille $\varphi \in \mathscr{D}(A)$, $\|\varphi\| = 1$, $F(Y)\varphi \neq 0$.

*Todistus.* Määritellään $\Lambda^\lambda(X) = \langle \varphi | \mathcal{I}^\lambda(X)^*(F(Y))\, \varphi \rangle$. Silloin

$$\begin{aligned}
\Lambda^\lambda(X) &= \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(X)^*(F(Y))\, P[\varphi]\right] = \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(X)(P[\varphi])\, F(Y)\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[P[U_{st}^\lambda(\varphi \otimes \phi)]\, F(Y) \otimes E^C(\lambda X)\right] \\
&= \langle U_{st}^\lambda\, \varphi \otimes \phi | F(Y) \otimes E^C(\lambda X)\, U_{st}^\lambda\, \varphi \otimes \phi \rangle, \qquad (4.2.8)
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to 0} \Lambda^\lambda(\mathbb{R}) &= \lim_{\lambda \to 0} \langle U_{st}^\lambda\, \varphi \otimes \phi | F(Y) \otimes E^C(\lambda \mathbb{R})\, U_{st}^\lambda\, \varphi \otimes \phi \rangle \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \langle e^{\imath \lambda A \otimes B} \varphi \otimes \phi | F(Y) \otimes I\, e^{\imath \lambda A \otimes B} \varphi \otimes \phi \rangle \\
&= \langle \varphi \otimes \phi | F(Y) \otimes I\, \varphi \otimes \phi \rangle = \langle \varphi | F(Y)\, \varphi \rangle, \qquad (4.2.9)
\end{aligned}$$

sillä kuvaus $\lambda \mapsto e^{\imath \lambda A \otimes B}$ on vahvasti jatkuva yksiparametrinen unitaariryhmä ja $F(Y) \otimes I$ on rajoitettu operaattori.

Nyt $U_{st}^\lambda \varphi \otimes \phi \in \mathscr{D}(x, I \otimes E_\lambda^C) = \mathscr{D}(x^2, I \otimes E_\lambda^C)$, missä $E_\lambda^C(X) := E^C(\lambda X)$ tarkalleen, kun

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_{\mathbb{R}} x^2 \langle U_{st}^\lambda \varphi \otimes \phi | I \otimes dE_\lambda^C(x)\, U_{st}^\lambda \varphi \otimes \phi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} x^2 \langle e^{\imath \lambda a B} \phi | dE_\lambda^C(x)\, e^{\imath \lambda a' B} \phi \rangle \langle \varphi | dE^A(\{a\} \cap \{a'\}) \varphi \rangle \\
&\overset{(3.2.8)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} x^2 \langle \phi | dE_\lambda^C(x - a)\, \phi \rangle \langle \varphi | dE^A(a)\, \varphi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (x + a)^2\, d\left((E_\lambda^C)_{\phi,\phi} \times dE_{\varphi,\varphi}^A\right)(x, a). \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Lemman 1.20 nojalla tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että funktio $x \mapsto x^2$ on sekä $(E_\lambda^C)_{\phi,\phi}$,- että $E_{\varphi,\varphi}^A$- integroituva. Nyt $\int_{\mathbb{R}} x^2 dE_{\phi,\phi}^C(\lambda x) \overset{1.17}{=} \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} x^2 dE_{\phi,\phi}^C(x) < \infty$, sillä oletuksen mukaan $\phi \in \mathscr{D}(C) = \mathscr{D}(x^2, E^C)$. Vastaavasti $\varphi \in \mathscr{D}(A)$, joten edeltävät ehdot pätevät.

Nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\Lambda^\lambda[1] &= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} x\,\Lambda^\lambda(dx) \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} x\,\langle F(Y)\otimes I\,U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi|I\otimes dE^C(\lambda x)\,U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi\rangle \\
&\overset{1.17}{=} \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\langle U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi|F(Y)\otimes E^C[1]\,U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi\rangle \\
&\overset{\text{Oletus}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(\langle U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi|F(Y)\otimes C\,U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi\rangle - \langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle\langle\phi|C\phi\rangle\right) \\
&= \langle\varphi\otimes\phi|\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\imath\lambda A\otimes B}F(Y)\otimes C\,e^{\imath\lambda A\otimes B} - F(Y)\otimes C\right)\,\varphi\otimes\phi\rangle \\
&= \langle\varphi\otimes\phi|\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\imath\lambda A\otimes B}F(Y)\otimes C\,e^{\imath\lambda A\otimes B}\right)\Big|_{\lambda=0}\varphi\otimes\phi\rangle \\
&= \imath\langle\varphi\otimes\phi|\,[A\otimes B, F(Y)\otimes C]\,\varphi\otimes\phi\rangle \\
&= \imath\langle\varphi|A\,F(Y)\varphi\rangle\langle\phi|BC\phi\rangle - \imath\langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle\langle\phi|CB\phi\rangle \\
&\overset{\text{Oletus}}{=} \frac{1}{2}\left(\langle\varphi|A\,F(Y)\varphi\rangle + \langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle\right) = \mathfrak{Re}\left[\langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle\right] \qquad (4.2.11)
\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

**Lause 4.10.** Olkoon $\mathcal{J}^\lambda$ mittauksen $\mathcal{N}^\lambda_{st} = \langle\mathcal{H}_\mathcal{A}, B, \phi, U^\lambda_{st}, f_\lambda\rangle$ indusoima instrumentti, missä $\phi\in\mathscr{D}(B)$ toteuttaa $\langle\phi|B\phi\rangle = 0$ ja $\langle\phi|B^2\phi\rangle = \frac{1}{2}$. Silloin mittauksessa $\mathcal{N}^\lambda_{st}$ mitatuksi tulevalle (triviaalille) suureelle $X\mapsto\langle\phi|E^B(\lambda X)\phi\rangle I$ pätee

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\mathrm{Exp}_{\mathcal{N}^\lambda_{st}}(\langle\phi|E^B(\lambda(\cdot))\phi\rangle I, F(Y), \varphi) &= \lim_{\lambda\to 0}\int x\frac{\langle\varphi|\mathcal{J}^\lambda(dx)^*(F(Y))\varphi\rangle}{\langle\varphi|\mathcal{J}^\lambda(\mathbb{R})^*(F(Y))\,\varphi\rangle} \\
&= \mathfrak{Im}\left[\frac{\langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle}{\langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle}\right] \qquad (4.2.12)
\end{aligned}$$

kaikille $\varphi\in\mathscr{D}(A)$, $\|\varphi\| = 1$, $F(Y)\varphi\neq 0$.

*Todistus.* Todistus on analoginen edellisen lauseen todistuksen kanssa: määritellään $\Gamma^\lambda(X) = \langle\varphi|\mathcal{J}^\lambda(X)^*(F(Y))\,\varphi\rangle$. Silloin

$$\Gamma^\lambda(X) = \langle U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi|F(Y)\otimes E^B(\lambda X)\,U^\lambda_{st}\,\varphi\otimes\phi\rangle, \qquad (4.2.13)$$

joten

$$\lim_{\lambda\to 0} \Gamma^\lambda(\mathbb{R}) = \langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle. \tag{4.2.14}$$

$U_{st}^\lambda\, \varphi \otimes \phi \in \mathscr{D}(x, I \otimes E_\lambda^B)$, sillä

$$\begin{aligned}\infty &> \int_{\mathbb{R}^3} x^2 \langle e^{\imath\lambda aB}\phi| dE_\lambda^B(x)\, e^{\imath\lambda aB}\phi\rangle\langle\varphi|dE^A(a)\,\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} x^2\langle\phi|dE_\lambda^B(x)\,\phi\rangle\langle\varphi|dE^A(a)\,\varphi\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} x^2\langle\phi|dE^B(x)\,\phi\rangle, \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

joten

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda[1] &= \int_{\mathbb{R}} x\,\langle U_{st}^\lambda\varphi\otimes\phi|F(Y)\otimes dE^B(\lambda x)\, U_{st}^\lambda\,\varphi\otimes\phi\rangle \\ &= \langle\varphi\otimes\phi|\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\imath\lambda A\otimes B}\,F(Y)\otimes B\,e^{\imath\lambda A\otimes B} - F(Y)\otimes B\right)\,\varphi\otimes\phi\rangle \\ &\xrightarrow{\lambda\to 0} \imath\langle\varphi|A\,F(Y)\varphi\rangle\langle\phi|B^2\phi\rangle - \imath\langle\varphi|F(Y)A\,\varphi\rangle\langle\phi|B^2\phi\rangle \\ &= \mathfrak{Im}\,[\langle\varphi|F(Y)A\varphi\rangle]\,. \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

□

Edeltävät lauseet 4.9 ja 4.10 osoittavat, että tarkan suureen $A$ heikon arvon reaali- ja imaginääriosa voidaan saada eräiden jonomittausten määräämien ehdollisten keskiarvojen rajankäynnin $\lambda \to 0$ tuloksena, joten heikko arvo on operationaalisesti mielekäs.

Konkreettisen esimerkin mittauksista saa valitsemalla $B = P$ ja $C = Q$, missä $P$ ja $Q$ ovat siis tavanomaiset liikemäärä- ja paikkaoperaattori. Silloin esimerkiksi harmonisen oskillaattorin perustila, pisteittäin määriteltynä $\phi_0(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-x^2/2}$, toteuttaa selvästi vaaditut ehdot: $\phi_0 \in \mathscr{D}(PQ) \cap \mathscr{D}(QP)$, $\langle\phi_0|Q\phi_0\rangle = 0 = \langle\phi_0|P\phi_0\rangle$, $\langle\phi_0|QP\phi_0\rangle = \frac{\imath}{2}$ ja $\langle\phi_0|P^2\phi_0\rangle = \frac{1}{2}$.

**Esimerkki 4.11.** Olkoon $U_{st}^\lambda = e^{\imath\lambda A\otimes P}$. Heikko arvo voidaan esimerkkien 3.18 ja 3.19 nojalla saavuttaa myös mittauksia $\widetilde{\mathcal{M}}_{st}^\lambda = \langle\mathcal{H}_\mathcal{A}, Q_\mathcal{A}, \phi^\lambda, U_{st}\rangle$ ja $\widetilde{\mathcal{N}}_{st}^\lambda =$

$\langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}}, \phi^{\lambda}, U_{st}, f_{\lambda^2} \rangle$ käyttäen, sillä ne indusoivat samat instrumentit kuin mitä mittaukset $\mathcal{M}_{st}^{\lambda}$ ja $\mathcal{N}_{st}^{\lambda}$.

Tarkalle suureelle $A$ saadut tulokset voidaan muodollisesti yleistää myös yleiselle suureelle $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ muodossa

$$E[1]^w(\varphi, F(Y)) := \frac{\langle \varphi | F(Y) E[1] \varphi \rangle}{\langle \varphi | F(Y) \varphi \rangle} = \int_{\mathbb{R}} x \frac{\langle \varphi | F(Y) dE(x) \varphi \rangle}{\langle \varphi | F(Y) \varphi \rangle}, \tag{4.2.17}$$

aina kun $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$ ja $Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ toteuttaa $F(Y)\varphi \neq 0$, nimittäin luvut

$$\frac{\langle \varphi | F(Y) E(X) \varphi \rangle}{\langle \varphi | F(Y) \varphi \rangle} \tag{4.2.18}$$

saadaan lauseiden 4.9 ja 4.10 mukaisesti rekonstruoitua. Tässä riittää vaatia $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$, sillä kullekin $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathscr{D}(E(X)) := \mathscr{D}(x^2, E^{E(X)}) \stackrel{1.13}{=} \mathscr{D}(x, E^{E(X)})$ [12].

Heikolla arvolla on yhteys suureen keskiarvoon. Olkoon $(Y_i)_i^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erillinen jono joukkoja, siten että $\sum_i F(Y_i) = I$. Silloin

$$\sum_i p_{\varphi}^F(Y_i)\, E[1]^w(\varphi, F(Y_i)) = \sum_i \langle \varphi | F(Y_i) E[1] \varphi \rangle = \mathrm{Exp}(E, \varphi), \tag{4.2.19}$$

aina kun $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$. Tällä on se merkitys, että vaikkakin yksittäinen heikko arvo ei sisällä paljon informaatiota systeemistä, niin tietoa voidaan kuitenkin saada summaamalla yli suuren joukon erillisiä ehtoja.

[12] Artikkelissa [14] vastaavaan tulokseen päästiin käyttäen yleistettyä standardimallia, joskin silloin täytyy vaatia ehto $\varphi \in \mathscr{D}(x^2, E)$. Artikkelissa [14] jätettiinkin avoimeksi kysymykseksi yleistyykö suureen $E$ heikko arvo myös tilavektoreille $\varphi \in \mathscr{D}(x, E)$.

# 5 Heikkoihin arvoihin liittyviä tuloksia

Tässä luvussa käsitellään heikkoihin mittauksiin ja heikkoihin arvoihin liittyviä tuloksia, muun muassa tilanmääritystä sekä Ozawan mittausepätarkkuuden määrittämistä heikkojen arvojen avulla. Luku aloitetaan historiallisesti tärkeän heikkoja mittauksia ja heikkoja arvoja käsittelevän artikkelin esittelyllä.

## 5.1 Stern-Gerlach –esimerkki

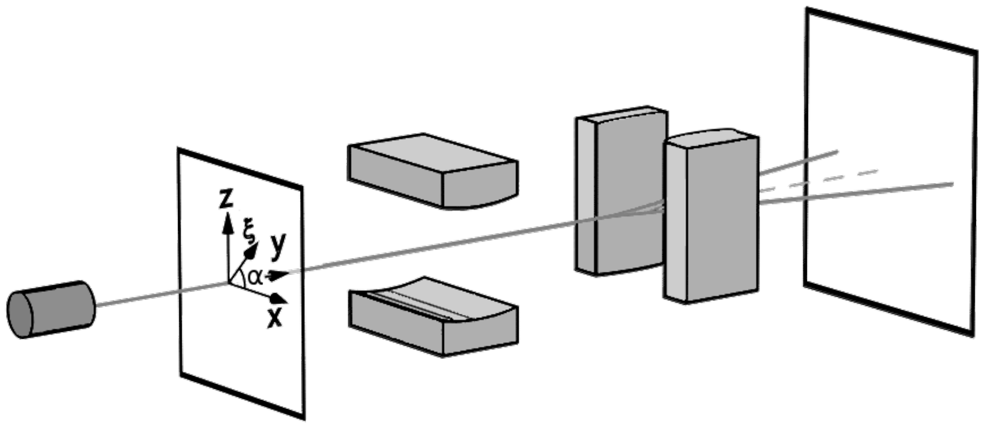
Yksi vanhimpia heikkoja mittauksia ja heikkoja arvoja käsitteleviä artikkeleita on Yakir Aharonovin, David Albertin ja Lev Vaidmanin vuonna 1988 julkaisema artikkeli [16]. Heikkojen arvojen esittelyn lisäksi artikkelissa käsitellään myös koejärjestelyä, jonka avulla spin-$\frac{1}{2}$ -suureen heikkoja arvoja voidaan realisoida. Kuten mainittua, heikot arvot ja heikot mittaukset ovat koko historiansa ajan aiheuttaneet runsaasti keskustelua, eikä alkuperäisartikkeli [16] ole poikkeus [29].

Alkuperäinen idea artikkelin koejärjestelyssä on seuraavanlainen. Oletetaan, että hiukkassuihku spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkasia (esim. elektroneja) on Gaussin tilassa, ja liikkuu avaruudessa $y$-suuntaan keskimääräisellä nopeudella $p_0$ (katso Kuva 2). Hiukkaset ovat aluksi lokalisoituneet $xz$-tason pieneen ympäristöön, ja niiden spinit osoittavat suuntaan $\widehat{\xi}$. Olkoon $\alpha$ $x$-akselin ja vektorin $\widehat{\xi}$ välinen kulma. Näin preparoitu suihku saapuu ensimmäiseen $z$-suuntaiseen Stern-Gerlach -laitteeseen, jossa sen $z$-suuntainen spin mitataan heikosti. Tässä mittauksen "heikkous" saavutetaan valitsemalla magneettikenttä heikoksi[13] ($\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx 0$). Välittömästi[14] tämän jälkeen hiukkassuihku saapuu seuraavaan $x$-suuntaiseen Stern-Gerlach -laitteeseen, missä hiukkassuihku jakaantuu kahteen haaraan, vastaten erisuuntaisia spinejä. Näistä kahdesta valitaan spin-ylös -suuntaa vastaava haara, mikä vastaa operationaalisesti projektiota $|+_x\rangle\langle+_x|$. Tämän jonomittauksen mittaustulosten keskiarvona saadaan spin-

[13]Magneettikentän heikkoudella tässä tarkoitetaan, että se (tai ainakin sen relevantti komponentti) on lähellä homogeenista.

[14]Stern-Gerlach -laitteiden tulee olla lähekkäin, jotta hiukkassuihkun kokema *vapaan evoluution* osuus jäisi vähäiseksi.

suureen $\sigma_z$ heikko arvo $(\sigma_z)^w(\xi, |+_x\rangle) = \tan 1/2\alpha$. Tämän alaluvun tarkoituksena on osoittaa täsmällisesti, että näin todella käy.




Kuva 2: Koejärjestely heikon arvon $\sigma_z^w(|\widehat{\xi}\rangle, |+_x\rangle)$ määrittämiseksi.

Aluksi on saatava selville minkälaisesta mittauksesta on varsinaisesti kyse. Systeemi (spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkanen) on aluksi suunnan $\widehat{\xi}$ määräämässä tilassa $\rho_{\widehat{\xi}} = \frac{1}{2}(I + \widehat{\xi} \cdot \vec{\sigma})$, missä $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ja $\widehat{\xi} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$. Siispä

$$\rho_{\widehat{\xi}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 - \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{5.1.1}$$

Tätä vastaava vektoritila on (modulo vaihetekijä)

$$|\widehat{\xi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)|+_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)|-_z\rangle, \tag{5.1.2}$$

missä esimerkiksi $|+_z\rangle$ on operaattorin $\sigma_z$ ominaisarvoon $+1$ liittyvä ominaisvektori, $|+_z\rangle = (1, 0)^T$ . Spinsuureen $\sigma_x$:n ominaiskannassa $\{|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T, |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T\}$ lausuttuna

$$|\widehat{\xi}\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)|+_x\rangle + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)|-_x\rangle. \tag{5.1.3}$$

Spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkaseen (varaus $e$ ja massa $m$) magneettikentässä $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

liittyvä efektiivinen Hamiltonin operaattori on

$$H = -\frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}. \tag{5.1.4}$$

Ensimmäisessä $z$-suuntaisessa Stern-Gerlach -laitteessa valitaan magneettikentäksi $\vec{B} = (0, 0, \frac{\partial B_z}{\partial z} Q_z)$, jolloin $H = -\lambda_z \sigma_z \otimes Q_z$, missä $\lambda_z = \frac{e\hbar}{2mc}\frac{\partial B_z}{\partial z}$. Siispä tällä Stern-Gerlach -laitteella suoritetaan spinsuureen $\sigma_z$ standardimittaus kytkemällä se mittalaitteen paikkaoperaattorin $z$-komponenttiin $Q_z$ unitaarisesti, siis $U_{st}^{-\lambda_z} = e^{-\imath\lambda_z\sigma_z\otimes Q_z}$. Asteikkosuureeksi valitaan liikemääräoperaattorin $z$-komponentti $P_z$, sillä mittalaiteen magneettikenttä aiheuttaa hiukkassuihkussa paikanmuutoksia, joita voidaan monitoroida liikemäärän avulla. Kytkentäparametri $\lambda_z$ on suoraan verrannollinen magneettikentän voimakkuuden muutokseen $\frac{\partial B_z}{\partial z}$, joten heikko mittauskytkentä saavutetaan heikon magneettikentän $\frac{\partial B_z}{\partial z} \approx 0$ tapauksessa. Hiukkassuihku saapuu mittalaitteeseen vektoritilassa $|\widehat{\xi}\rangle \otimes \phi$, missä $\phi$ on Gaussinen vektoritila, pisteittäin määriteltynä $\phi(\vec{x}) = \Delta^{-3/2}(2\pi)^{-3/4}\exp(-\|\vec{x}\|^2/4\Delta^2 + \imath p_0 y)$. Koska mittalaitteen magneettikenttä kytkeytyy hiukkasten spiniin aiheuttamalla hiukkassuihkuun paikanmuutoksia, voidaan vektoria $\phi$ pitää mittalaitteen alkutilana.

Tämän jälkeen suoritetaan jonomittauksena jälkimmäinen standardimittaus Stern-Gerlach -laitteella, valitsemalla magneettikentäksi $\vec{B} = (\frac{\partial B_x}{\partial x} Q_x, 0, 0)$. Tällä kertaa mittaus siis suoritetaan spinsuureelle $\sigma_x$, kytkemällä se mittalaitteen paikkaoperaattorin $x$-komponenttiin $Q_x$ unitaarikytkennällä $U_{st}^{-\lambda_x} = e^{-\imath\lambda_x\sigma_x\otimes Q_x}$, missä $\lambda_x = \frac{e\hbar}{2mc}\frac{\partial B_x}{\partial x}$. Jälleen asteikkosuureeksi valitaan vastaava liikemääräoperaattorin komponentti $P_x$. Ensimmäisen mittauksen muutos ratatilassa $\phi$ oli vähäistä, joten tätä voidaan pitää myös toisen mittalaitteen alkutilana. Nyt ideana on, että riittävän voimakkaan magneettikentän $\lambda_x \propto \frac{\partial B_x}{\partial x} \gg 0$ avulla hiukkassuihku saadaan haarautumaan niin voimakkaasti, että valitsemalla spin-ylös –suuntaa vastaavan haaran hiukkaset, voidaan approksimoida projektiota $P[+_x]$. Seuraavaksi todetaan, että juuri näin todella käy.

Kaiken kaikkiaan näin määrätyt Stern-Gerlach -mittaukset vastaavat standardimittauksia $\langle L(\mathbb{R}^3), P_i, \phi, U_{st}^{-\lambda_i}\rangle$, $i = x, z$. Ensimmäisessä mittauksessa tulee lauseen

3.15 mukaisesti mitatuksi sumennettu spinsuure $\mu^{\lambda_z} * E^{\sigma_z}$. Samoin jälkimmäisessä mittauksessa mitattu suure on lauseen 3.15 mukaisesti muotoa

$$\begin{aligned} E_x(X) &= \int_{\mathbb{R}} p^{P_x}_{\phi_{\lambda_x a}}(X)\, dE^{\sigma_x}(a) \\ &\overset{4.1.2}{=} p^{P_x}_{\phi_{\lambda_x +}}(X)P[+_x] + p^{P_x}_{\phi_{\lambda_x -}}(X)P[-_x]. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Nyt Fourier-muunnos antaa

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\phi_{\lambda_x \pm})(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\imath \vec{p}\cdot\vec{q}} \phi_{\lambda_x \pm}(\vec{q})\, d\vec{q} \\ &= \frac{2\Delta^{-\frac{3}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{4}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-q_x^2/4\Delta^2 - \imath q_x(p_x \mp \lambda_x)}\, dq_x \times \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{-q_y^2/4\Delta^2 - \imath q_y(p_y - p_0)}\, dq_y \int_{\mathbb{R}} e^{-q_z^2/4\Delta^2 - \imath q_z p_z}\, dq_z \\ &= \Delta^{\frac{3}{2}} (\frac{2}{\pi})^{\frac{3}{4}} e^{-\Delta^2\left((p_x \mp \lambda_x)^2 + (p_y - p_0)^2 + p_z^2\right)}, \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

joten

$$\begin{aligned} E_x(X) &= \left(\int_{X\times\mathbb{R}^2} |(\mathcal{F}\phi_{\lambda_x +})(\vec{p})|^2\, d\vec{p}\right) P[+_x] + \left(\int_{X\times\mathbb{R}^2} |(\mathcal{F}\phi_{\lambda_x -})(\vec{p})|^2\, d\vec{p}\right) P[-_x] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Delta \left(\left(\int_X e^{-2\Delta(p_x - \lambda_x)^2}\, dp_x\right) P[+_x] + \left(\int_X e^{-2\Delta(p_x + \lambda_x)^2}\, dp_x\right) P[-_x]\right). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Määritellään operaattori

$$F^{\lambda_x}[+] = E_x((0,\infty)), \tag{5.1.8}$$

jolloin huomataan, että ehdosta $\lambda_x \gg 0$ seuraa, että $F^{\lambda_x}[+] \approx P[+_x]$, sillä $\lambda_x$ kasvaessa Gaussisen funktion $e^{-2\Delta(p_x+\lambda_x)^2}$ huippu siirtyy positiivisella $x$-akselilla yhä kauemmas origosta. Tällöin taas negatiiviselle $x$-akselille jäävä funktion "häntä" pienenee. Näin ollen riittävän suurella $\lambda_x$:n arvoilla (ts. kasvattamalla magneettikentän voimakkuutta) päästään mielivaltaisen lähelle projektio-operaattoria $P[+_x]$.

Lopuksi huomataan, että $\langle\phi|Q_z\phi\rangle = 0$ ja $\langle\phi|Q_zP_z\phi\rangle = \frac{\imath}{2}$, joten saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_z\to 0}\mathrm{Exp}(\mu^{\lambda_z} * E^{\sigma_z}, |+_x\rangle, |\widehat{\xi}\rangle) &\stackrel{4.9}{=} \mathfrak{Re}\left[\frac{\langle +_x|\sigma_z|\widehat{\xi}\rangle}{\langle +_x|\widehat{\xi}\rangle}\right]\\ &= \frac{\langle +_x|\sigma_z|\widehat{\xi}\rangle}{\langle +_x|\widehat{\xi}\rangle}\\ &= \tan\frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

ja siis $\sigma_z^w(|\xi\rangle, P[+_x]) = \tan\frac{\alpha}{2}$, kuten artikkelissa [16] väitettiin.

Lasku osoittaa, että ehtoa $|\widehat{\xi}\rangle$ säätämällä voidaan saatavien heikkojen arvojen avulla päätyä roimasti spin-$\frac{1}{2}$ -suureen tavanomaisen arvoalueen ulkopuolelle. Mainittakoon, että tämä ei ole pelkästään heikkoihin arvoihin rajoittuva ominaisuus, vaan esimerkin 4.4 nojalla vastaavaan tulokseen päästäisiin myös likimääräisten arvojen avulla.

## 5.2 Tilanmääritys heikkojen arvojen avulla

### 5.2.1 Puhtaan tilan määrittäminen

Artikkelissa [21] ja myöhemmin artikkelissa [22] J. Lundeen *et al.* esittelevät menetelmän määrittää mielivaltainen vektoritila heikkoja arvoja käyttäen. Menetelmä esitellään äärellisulotteisessa tapauksessa, joskin J. Lundeen *et al.* väittävät menetelmän yleistyvän myös ääretönulotteiseen tapaukseen [22, s.2]. Tässä alaluvussa osoittautuu, että ääretönulotteisessa tapauksessa tilanmäärittämismenetelmä ei ole lainkaan aukoton käsite. Aloitetaan kuitenkin tarkastelemalla äärellisulotteista tapausta.

Menetelmän äärellisulotteisessa ($\dim\mathcal{H} = d < \infty$) tapauksessa selvitetään mielivaltaisen ortonormaalikannan $\{\psi_j |\, j = 0, .., d-1\}$ vektoreita vastaavien projektioiden $P[\psi_j]$ heikot arvot tuntemattomassa vektoritilassa $\Psi \in \mathcal{H}_1$, ehdollistamalla projektiolla $P[\varphi_0]$, missä $\varphi_0$ toteuttaa ehdon $\langle\varphi_0|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}$ kaikilla $j = 0, ..., d-1$. Näin saatava heikko arvo on[15]

$$P[\psi_j]^w\,(\Psi, P[\varphi_0]) = \frac{\langle\varphi_0|P[\psi_j]\Psi\rangle}{\langle\varphi_0|\Psi\rangle} = \frac{\langle\psi_j|\Psi\rangle}{\sqrt{d}\langle\varphi_0|\Psi\rangle}. \tag{5.2.1}$$

Tässä kohtaa Lundeenin *et al.* menetelmä kaipaa hieman tarkennusta, sillä edellä mainittu heikko arvo on määritelty vain niillä vektoreilla $\Psi \in \mathcal{H}_1$, joille

$$\langle\varphi_0|\Psi\rangle \neq 0, \tag{5.2.2}$$

ja tilanmääritys epäonnistuu niillä vektoreilla, joilla tämä ehto ei päde.

Tämä ongelma voidaan kuitenkin ratkaista. Olkoon $\{\varphi_k|\, k = 0, ..., d{-}1\}$ kannan $\{\psi_j|\, k = 0, ..., d{-}1\}$ *Fourier-kanta*, missä kantavektorit määräytyvät ehdosta

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{j=0}^{d-1} e^{\imath 2\pi jk/d}\psi_j \tag{5.2.3}$$

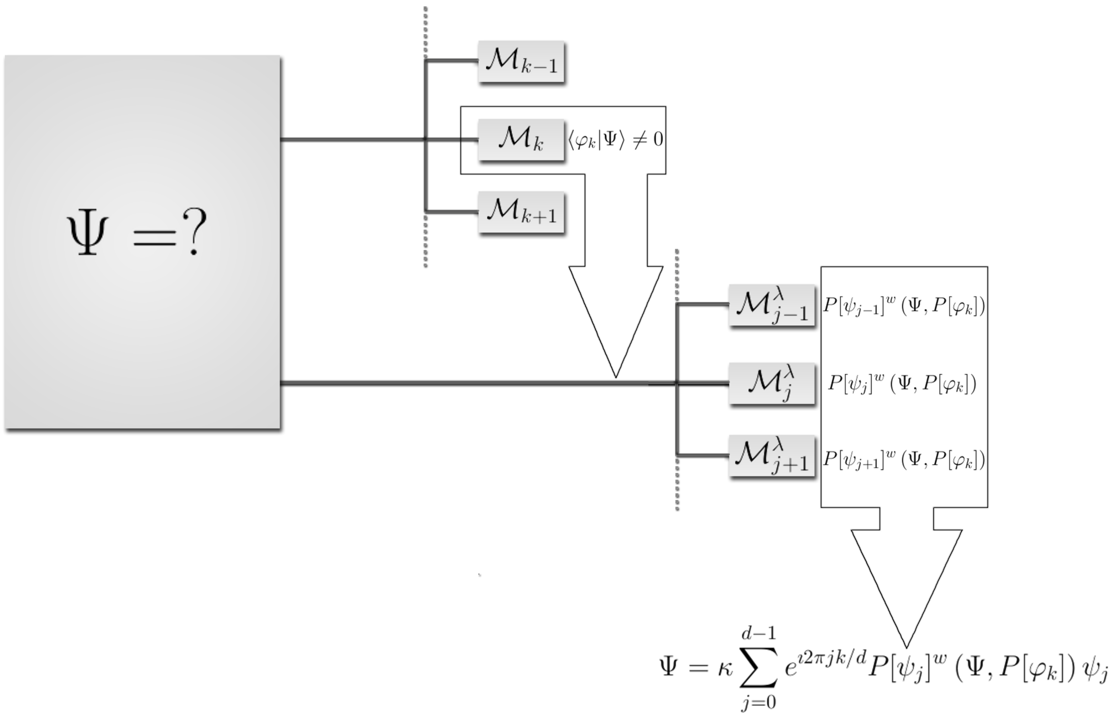
kaikilla $k = 0, ..., d{-}1$. Selvästi nyt $\langle\varphi_k|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}e^{-\imath 2\pi jk/d}$ kaikilla $j, k \in \{0, ..., d{-}1\}$. Koska $\{\varphi_k\}$ on kanta, niin $\langle\varphi_k|\Psi\rangle \neq 0$, jollakin $k = 0, ..., d{-}1$. Kiinnitetään eräs tällainen vektori $\varphi_k$. Tällöin saadaan *Parsevalin identiteettiä* käyttäen

$$\Psi = \sum_{j=0}^{d-1}\langle\psi_j|\Psi\rangle\psi_j = \kappa\sum_{j=0}^{d-1} e^{\imath 2\pi jk/d} P[\psi_j]^w\,(\Psi, P[\varphi_k])\,\psi_j, \tag{5.2.4}$$

missä $\kappa = \sqrt{d}\langle\varphi_k|\Psi\rangle$. Vakion $\kappa$:n muoto ei sinällään ole tärkeä, sillä se voidaan eliminoida normituksessa, koska se on (kaikilla $\psi_j$) vakio $\neq \pm 0, \infty$. Tässä tapauksessa tilanmääritys siis onnistuu, kunhan heikot arvot $P[\psi_j]^w\,(\Psi, P[\varphi_k])$ tunnetaan kaikilla $j = 0, ..., d{-}1$ (vertaa [21, kaava (7)]). Kuva 3 havainnollistaa tilanmäärittämismenetelmän eri vaiheita.

Mainittakoon, että vaikkakin tilanmääritys edellä esitellyllä menetelmällä onnistuu äärellisulotteisessa tapauksessa, niin pahimmillaan joudutaan tekemään $d{-}1$

[15] Tämä on artikkelin [21] kaava (6).




Kuva 3: Koejärjestely mielivaltaisen vektoritilan määrittämiseksi ($\dim \mathcal{H} = d < \infty$). Kiinnitetään jokin kanta $\{\psi_j\}_{j=0}^{d-1} \subset \mathcal{H}$. Ensimmäisessä vaiheessa etsitään (jokin) $\{\psi_j\}$:n Fourier-kannan vektori $\varphi_k$, jolle $\langle \varphi_k | \Psi \rangle \neq 0$. Tämän jälkeen tehdään kullekin $P[\psi_j]$ heikko mittaus alkutilassa $\Psi$, jonka jälkeen tehdään jonomittauksena projektion $P[\varphi_k]$ tarkka mittaus. Näin saatavien heikkojen arvojen avulla voidaan määrätä $\Psi$ kannassa $\{\psi_j\}$: $\Psi = \kappa \sum_{j=0}^{d-1} e^{\imath 2\pi jk/d} P[\psi_j]^w (\Psi, P[\varphi_k]) \psi_j$.

(”vahvaa”) mittausta sopivan Fourier-kannan vektorin $\varphi_k$, jolle $\langle \varphi_i | \Psi \rangle \neq 0$, selvittämiseksi.

Ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden tapauksessa menetelmä on monimutkaisempi, sillä kahta eri ortonormaalikantaa $\{\varphi_k\}_k$ ja $\{\psi_j\}_j$, joille $\langle \varphi_k | \psi_j \rangle =$ ”vaihetermiä vaille sama vakio” kaikilla $j, k \in \mathbb{N}$ ei voida löytää. Artikkelissa [21] J. Lundeen *et al.* kuitenkin väittävät mitanneensa fotonin vektoritilan, vanhaa kvanttiterminologiaa käyttäen *aaltofunktion*, pisteittäisiä arvoja, ja siten kartoittaneensa koko vektoritilan [21, s.188]. Samaisessa artikkelissa J. Lundeen *et al.* myös kertovat vastaavan tilanmääritysmenetelmän yleistyvän mielivaltaisille kvanttisysteemeille [21, s.188,190]. Menetelmässä käytetään heikkoja mittauksia kytkemällä fotonin paikka heikosti sen polarisaatioon. Fotoni on kuitenkin relativistinen hiukkanen, ja ottaen huomioon, että Poincaré-objektin lokalisointisuure ei ole täysin aukoton käsite, on parempi tutkia tilannetta käyttäen (epärelativistisia) spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkasia, kuten elektroneja. Tällainen koejärjestely on tarkasti käsitelty artikkelissa [14], joten esittelen seuraavaksi vain koejärjestelyn pääkohdat.

Liikkukoon systeemi, spin-$\frac{1}{2}$ -hiukkanen, pitkin $z$-akselia, jolloin $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Tilafunktion pisteittäisten arvojen mittaamiseksi $x$-suuntainen paikka-avaruus jaetaan erillisiin yhtä pitkiin intervalleihin $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$, ja merkitään kunkin intervallin keskipistettä $x_i$. Jokaiselle tällaiselle intervallille tehdään kaksiarvoisen suureen, $1 \mapsto E^Q(I_i) \overset{\text{merk.}}{=} Q_i$, $0 \mapsto E^Q(\mathbb{R}\setminus I_i) \overset{\text{merk.}}{=} I - Q_i$, standardimittaus kytkemällä kyseinen kaksiarvoinen suure hiukkasen spiniin $y$-suunnassa. Silloin vastaava unitaarikytkentä on muotoa $U_{st}^{-\alpha_i} = e^{-\imath\alpha Q_i\otimes\sigma_y}$. [16] Mittalaitteen alkutilaksi valitaan $|+_z\rangle = |+\rangle$. Tällöin jokaisella vektoritilalla $\varphi \in \mathcal{H}_1$ yhdistetty tila $\varphi\otimes|+\rangle$ kehittyy kytkennän myötä tilaksi

$$\begin{aligned}\Psi^{\alpha_i} &= e^{-\imath\alpha Q_i\otimes\sigma_y}\varphi\otimes|+\rangle\\ &= \sum_{n=2,4,6\ldots}\frac{(-\imath\alpha)^n}{n!}Q_i\varphi\otimes|+\rangle + \sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{(-\imath\alpha)^n}{n!}Q_i\varphi\otimes\sigma_y|+\rangle + \varphi\otimes|+\rangle\\ &= Q_i\varphi\otimes(\cos(\alpha)|+\rangle + \sin(\alpha)|-\rangle) + (I-Q_i)\varphi\otimes|+\rangle \qquad (5.2.5)\end{aligned}$$

Asteikkosuureeksi valitaan $E^{\sigma_x}$ tai $E^{\sigma_y}$ ja asteikkofunktioksi $f = f_{2\alpha}$. Näin ollen saadaan standardimittaukset $\langle\mathbb{C}^2, E^{\sigma_j}, |+\rangle, U_{st}^{-\alpha_i}, f_{2\alpha}\rangle$, $j = x, y$.

Ensimmäisen mittauksen jälkeen suoritetaan jonomittauksena hiukkasen liikemäärän tarkka mittaus ja valitaan ne arvot, jotka sijaitsevat pienen intervallin $J_\epsilon = \left(-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right)$ sisäpuolella. Ehdolliset todennäköisyydet saavat silloin muodon

$$\{\pm1\} \mapsto \frac{\langle\Psi^{\alpha_i}|E^P(J_\varepsilon)\otimes E^{\sigma_j}_{f_{2\alpha}}(\{\pm1\})\Psi^{\alpha_i}\rangle}{\langle\varphi|E^P(J_\varepsilon)\varphi\rangle}, \qquad (5.2.6)$$

[16]Tällaisen kytkennän toteuttaminen on esitelty edellisessä Stern-Gerlach–laitteita käsittelevässä alaluvussa.

mistä saadaan ehdolliset keskiarvot

$$\mathrm{Exp}(\mu^{\alpha_i} * E^{\sigma_j}, E^P(J_\varepsilon), \varphi) \quad = \quad \frac{1}{2\alpha}\frac{\langle \Psi^{\alpha_i}|E^P(J_\varepsilon)\otimes\sigma_j\Psi^{\alpha_i}\rangle}{\langle\varphi|E^P(J_\varepsilon)\varphi\rangle}, \tag{5.2.7}$$

$j = x, y$. Nyt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\alpha}\langle \Psi^{\alpha_i}|E^P(J_\varepsilon)\otimes\sigma_j\Psi^{\alpha_i}\rangle \\
= \quad & \frac{1}{2\alpha}\langle Q_i\varphi|E^P(J_\varepsilon)Q_i\varphi\rangle \times \\
& \times \big(\cos^2(\alpha)\langle +|\sigma_j+\rangle + \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\langle -|\sigma_j+\rangle + \langle +|\sigma_j-\rangle) + \sin^2(\alpha)\langle -|\sigma_j-\rangle\big) \\
& +\frac{1}{2\alpha}\langle (I-Q_i)\varphi|E^P(J_\varepsilon)\varphi\rangle\,(\cos(\alpha)\langle +|\sigma_j+\rangle + \sin(\alpha)\langle +|\sigma_j-\rangle) \\
& +\frac{1}{2\alpha}\langle Q_i\varphi|E^P(J_\varepsilon)(I-Q_i)\varphi\rangle\,(\cos(\alpha)\langle +|\sigma_j+\rangle + \sin(\alpha)\langle -|\sigma_j+\rangle) \\
\overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \quad & \frac{1}{2}\langle Q_i\phi|E^P(J_\varepsilon)Q_i\varphi\rangle\,(\langle +|\sigma_j-\rangle + \langle -|\sigma_j+\rangle) \\
& +\frac{1}{2}\langle (I-Q_i)\phi|E^P(J_\varepsilon)Q_i\varphi\rangle\langle +|\sigma_j-\rangle + \frac{1}{2}\langle Q_i\phi|E^P(J_\varepsilon)(I-Q_i)\varphi\rangle\langle -|\sigma_j+\rangle,
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$j = x, y$. Saadaan[17]

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{Exp}(\mu^{\alpha_i} * E^{\sigma_x}, E^P(J_\varepsilon), \varphi) \quad &= \quad \mathfrak{Re}\left[\frac{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)Q_i\varphi\rangle}{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)\varphi\rangle}\right] && (5.2.9) \\
\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{Exp}(\mu^{\alpha_i} * E^{\sigma_y}, E^P(J_\varepsilon), \varphi) \quad &= \quad \mathfrak{Im}\left[\frac{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)Q_i\varphi\rangle}{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)\varphi\rangle}\right]. && (5.2.10)
\end{aligned}$$

Artikkelin [21] väite[18] on, että

$$\varphi(x_i) \propto \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)Q_i\varphi\rangle}{\langle\varphi|E^P(J_\epsilon)\varphi\rangle} \tag{5.2.11}$$

välin $I_i$ pituuden lähestyessä nollaa. Jotta tätä raja-arvoa voidaan täsmällisesti analysoida, tarvitaan seuraavia differentioituvuustuloksia.

[17] Huomaa, että artikkelin [14, s.15] vastaavissa kaavoissa (15)-(16) on nimittäjä jätetty virheellisesti pois.

[18] Artikkelin [21] kaava (4) yleistettynä.

**Lause 5.1.** Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Silloin kaikilla $x \in (a, b)$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} f(t)\, dt. \tag{5.2.12}$$

*Todistus.* Suora seuraus analyysin peruslauseesta. □

Sanotaan, että funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *lokaalisti integroituva*, jos $f$ on (Lebesgue-) integroituva kaikkien kompaktien joukkojen yli, ja kaikkien lokaalisti integroituvien funktioiden joukosta käytetään merkintää $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Edellisen lauseen lisäksi pätee vahvempi tulos:

**Lause 5.2** (Lebesguen differentiontilause)**.** Olkoon $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Silloin, melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(x)\, dx, \tag{5.2.13}$$

missä $m(B(x, r))$ $x$:n sisältävän $r$-säteisen avoimen pallon (Lebesguen) mitta.

[30, s.285] □

Seuraava lasku osoittaa, että kaava (5.2.11) toteutuu välien $I_i$ pituuksien lähestyessä nollaa, kunhan tilavektori $\varphi \in L^2(\mathbb{R})_1$ toteuttaa riittävät säännöllisyysehdot: olkoon $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})_1$ vektori, jonka Fourier-muunnoksen itseisarvon neliö $|\widehat{\varphi}(p)|^2$ sekä funktio $\overline{\mathcal{F}(\varphi)(p)}\mathcal{F}(Q_i\varphi)(p)$ ovat jatkuvia jossakin origon kompaktissa ympäristössä ja jolle $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$. Silloin

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\langle \varphi | E^P(J_\epsilon) Q_i \varphi \rangle}{\langle \varphi | E^P(J_\epsilon) \varphi \rangle} &= \frac{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \overline{\mathcal{F}(\varphi)(p)}\mathcal{F}(Q_i\varphi)(p)\, dp}{\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} |\widehat{\varphi}(p)|^2\, dp} \\
&\overset{5.1}{=} \frac{\overline{\widehat{\varphi}(0)}\, \mathcal{F}(Q_i\varphi)(0)}{|\widehat{\varphi}(0)|^2} = \frac{\int_{I_i} e^{ip\cdot 0} \varphi(q)\, dq}{\widehat{\varphi}(0)}.
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Toisaalta

$$\varphi(x_i) \overset{5.2}{=} \lim_{|I_i|\to 0} \frac{1}{|I_i|} \int_{I_i} \varphi(q)\, dq \tag{5.2.15}$$

m.k. $x_i \in \mathbb{R}$. Koska itseasiassa $L^2(\mathbb{R})$ määritellään vektoreiden ekvivalenssiluokkina, niin vektoritilan määrittämiseen riittää tuntea arvot melkein kaikkialla, joten väite on todistettu. Riittävät säännöllisyysehdot toteuttavia funktioita $\varphi$ ovat esimerkiksi kaikki *kompaktitukiset* $\mathbb{C}^\infty$*-funktiot*, joille lisäksi $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ ja $\|\varphi\| = 1$.

Yleisen vektoritilan määritys tällä menetelmällä kuitenkin epäonnistuu, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 5.3.** Olkoon

$$\widehat{\varphi}(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin p, & \text{jos } p \in [0, \pi] \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases} \tag{5.2.16}$$

jolloin selvästi $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\widehat{\varphi}\| = 1$. Kiinnitetään väli $I_i \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Laskujen yksinkertaistamiseksi voidaan olettaa, että $\epsilon$ on niin pieni, että $\epsilon \in (0, 2\pi]$ . $\widehat{\varphi}$:n määritelmästä seuraa, että $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1+e^{\imath\pi x}}{1-x^2}$ m.k. $x \in \mathbb{R}$, ja myös $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\varphi\| = 1$.

Määritellään

$$\begin{aligned} A(\epsilon) \quad &:= \quad \frac{\langle \varphi | E^P(J_\epsilon) Q_i \varphi \rangle}{\langle \varphi | E^P(J_\epsilon) \varphi \rangle} = \frac{\langle E^P(J_\epsilon)\varphi | Q_i \varphi \rangle}{\langle \varphi | E^P(J_\epsilon) \varphi \rangle} \\ &= \quad \frac{\frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{I_i} \left( \int_0^{\epsilon/2} e^{-\imath p x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(p)\, dp \right) \varphi(x)\, dx}{\displaystyle\int_0^{\epsilon/2} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(p) \right)^2 dp}. \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Merkitään $A(\epsilon)$:n osoittajaa $\Psi(\epsilon) := \frac{1}{2\pi} \int_{I_i} \left( \int_0^{\epsilon/2} e^{-\imath p x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(p)\, dp \right) \varphi(x)\, dx$, jonka ulomman integraalin integrandi on $\epsilon$:n funktiona jatkuva ja derivoituva, joten *Leibnizin säännön* mukaan

$$\frac{d}{d\epsilon}\Psi(\epsilon) \quad = \quad \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{I_i} e^{-\frac{\imath \epsilon x}{2}} \sin(\frac{\epsilon}{2}) \varphi(x)\, dx. \tag{5.2.18}$$

Merkitään $A(\epsilon)$:n nimittäjää $\Phi(\epsilon) := \int_0^{\epsilon/2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(p)\right)^2 dp$, jolloin suoraan

$$\frac{d}{d\epsilon}\Phi(\epsilon) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\frac{\epsilon}{2})\right)^2. \tag{5.2.19}$$

Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in I_i$ määritellään $\Delta_n(x) = e^{-\frac{\imath x}{2n}}\varphi(x)$. Silloin $\Delta_n : I_i \to \mathbb{C}$ on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n \to \chi_{I_i}\varphi$, kun $n \to \infty$, ja lisäksi

$$\int_{I_i} |\Delta_n(x)|\, dx \leq \int_{I_i} |\varphi(x)|\, dx \leq \int_0^{1/2} \frac{1+x}{1-x^2} = \ln(2) < \infty. \tag{5.2.20}$$

*(Kompleksisen) dominoidun konvergenssin lauseen* ehdot ovat siis täytetty (avaruudessa $I_i$), joten

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_i} \Delta_n(x)\, dx = \int_{I_i} \varphi(x)\, dx. \tag{5.2.21}$$

Selvästi $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Psi(\epsilon)}{\Phi(\epsilon)}$ on epämääräistä $\frac{0}{0}$-muotoa, ja jo edellä todetun mukaisesti sekä osoittaja, että nimittäjä, ovat jatkuvia ja niillä on derivaatta pisteessä $\epsilon = 0$ olemassa, joten *L'Hôpitalin säännön* mukaisesti saadaan lopulta

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) \quad &= \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Psi(\epsilon)}{\Phi(\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\frac{d}{d\epsilon}\Psi(\epsilon)}{\frac{d}{d\epsilon}\Phi(\epsilon)} \\
&= \quad \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{I_i} e^{-\frac{\imath x}{2n}}\varphi(x)\, dx}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\frac{1}{2n})} \\
&\stackrel{5.2.21}{=} \quad \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{I_i} \varphi(x)\, dx}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(\frac{1}{2n})} = \infty,
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

aina kun $\int_{I_i} \varphi(x)\, dx \neq 0$ (voi siis olla myös $= \infty$). Tapauksessa $\int_{I_i} \varphi(x)\, dx = 0$ voidaan käyttäen toistamiseen L'Hôpitalin ja Leibnizin sääntöä (kyseiseen tulevat

$\epsilon$:n funktiot ovat jatkuvia ja derivoituvia pisteessä $\epsilon = 0$) saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} A(\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{I_i} e^{\frac{-\imath\epsilon x}{2}}\varphi(x)\,dx\right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\epsilon}\sin(\frac{\epsilon}{2})}} \\ &= -\frac{\imath}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_{I_i} x\varphi(x)\,dx. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

Yllä olevat tarkastelut pätevät siis kaikille väleille $I_i \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Jos nyt väite (5.2.11) pätisi vektoritilalle $\varphi$, pitäisi olla joko $\varphi(x) = \infty$ melkein kaikilla $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, tai $\varphi(x) \propto x\varphi(x)$ kaikilla $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, lauseen 5.1 nojalla. Näistä ensimmäinen vaihtoehto ei ole mahdollinen, sillä silloin $\varphi \notin L^2(\mathbb{R})$. Jälkimmäinen ei ole mahdollista, sillä esimerkin alussa laskettiin, että $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1+e^{\imath\pi x}}{1-x^2}$ m.k. $x \in \mathbb{R}$. Tämä osoittaa, että väite (5.2.11) ei päde kaikilla vektoritiloilla $\varphi$.

### 5.2.2 Yleisen tilan määrittäminen

Artikkelissa [22] J. Lundeen ja C. Bamber esittelevät uuden jalostetumman menetelmän määrittää mielivaltainen tila käyttäen heikkoja mittauksia, ja tällä kertaa menetelmä ei rajoitu pelkästään puhtaisiin tiloihin. Toisaalta artikkelissa keskitytään esittelemään menetelmä vain äärellisulotteisessa tapauksessa ($\dim\mathcal{H} = d < \infty$).

Olkoon $\{\psi_i \,|\, i = 0, ..., d{-}1\}$ jokin Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ ortonormaalikanta. Menetelmässä tuntematon tila(matriisi) $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ selvitetään etsimällä sen matriisialkiot kannassa $\{\psi_i\}_{i=1}^{d-1}$. Toisin sanoen selvitetään luvut $\langle\psi_i|\rho\,\psi_j\rangle$ kaikilla $i, j \in \{0, ..., d{-}1\}$. Seuraavat kaksi lausetta osoittavat, että luvut $\langle\psi_i|\rho\,\psi_j\rangle$ ovat todellakin saavutettavissa sopivien heikkojen mittausten avulla kaikilla $i, j \in \{0, ..., d{-}1\}$.

**Lause 5.4.** Olkoon $\{\psi_j\}_{j=0}^{d-1}$ kanta ja $\varphi_0$ vektori, jolle $\langle\varphi_0|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}$ kaikilla $k = 0, ..., d{-}1$[19]. Suoritetaan jonomittauksena ensin $P[\psi_j]$:n ja sen jälkeen $P[\varphi_0]$:n standardimittaukset $\mathcal{M}_1 = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}_1}, \phi_1, U_{st}^{\lambda}, E^{C_1}, f_\lambda\rangle$ ja $\mathcal{M}_2 = \langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}_2}, \phi_2, U_{st}^{\mu}, E^{C_2}, f_\mu\rangle$ vastaavasti, missä $U_{st}^{\lambda} = e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1\otimes I}$, $U_{st}^{\mu} = e^{\imath\mu P[\varphi_0]\otimes I\otimes B_2}$, ja yksikkövektorit

[19] Nyt $\varphi_0$:ksi kelpaa esimerkiksi Fourier-kannan ensimmäinen vektori, katso kaava (5.2.3).

$\phi_n \in \mathscr{D}(C_nB_n) \cap \mathscr{D}(B_nC_n)$ toteuttavat $\langle \phi_n | C_n \phi_n \rangle = 0$ ja $\langle \phi_n | C_nB_n\phi_n \rangle = \frac{\imath}{\sqrt{2}}$, $n = 1, 2$. Merkitään näiden mittausten indusoimia instrumentteja $\mathcal{I}^\lambda$ ja $\mathcal{I}^\mu$ vastaavasti. Näiden jonomittausten jälkeen suoritetaan vielä projektion $P[\psi_k]$ tarkka mittaus. Silloin

$$\lim_{\lambda\to 0}\lim_{\mu\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} xy \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(dx)^*(\mathcal{I}^\mu(dy)^*(P[\psi_k]))\,\rho\right] = \frac{1}{d}\mathfrak{Re}\left[\langle \psi_k | \rho\, \psi_j \rangle\right], \tag{5.2.24}$$

kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$.

*Todistus.* Jälleen riittää todistaa väite puhtaan tilan $\rho = P[\eta]$, $\eta \in \mathcal{H}_1$ tapauksessa, jolloin yleisen tilan tapaus seuraa kyseeseen tulevien operaatioiden lineaarisuudesta ja tilojen spektraalirakenteesta. Määritellään

$$\begin{aligned} M_{\lambda,\mu}(X,Y) &:= \operatorname{tr}\left[\mathcal{I}^\lambda(X)^*(\mathcal{I}^\mu(Y)^*(P[\psi_k]))\,P[\eta]\right] \\ &= \langle U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2 | P[\psi_k]\otimes E^{C_1}_\lambda(X)\otimes E^{C_2}_\mu(Y)U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2\rangle. \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Nyt $U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2 \in \mathscr{D}(x, I\otimes E^{C_1}_\lambda\otimes E^{C_2}_\mu) = \mathscr{D}(x, I\otimes E^{C_1}_\lambda\otimes I)\cap\mathscr{D}(x, I\otimes I\otimes E^{C_2}_\mu)$, sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} x^2\langle U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2 | I\otimes E^{C_1}_\lambda\otimes IU^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2\rangle \\ =\ &\int_R x^2\langle e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1 | I\otimes E^{C_1}_\lambda e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1\rangle < \infty \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

(vrt. kaava 4.2.10).

Näin ollen

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} xy\, M_{\lambda,\mu}(dx,dy) \\ =\ &\frac{1}{\lambda\mu}\left[\langle U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2 | P[\psi_k]\otimes C_1\otimes C_2U^\mu_{st}U^\lambda_{st}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2\rangle \right.\\ &\left.-\langle e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1 | P[\psi_k]\otimes C_1 e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1\rangle\langle\psi_2|C_2\psi_2\rangle\right], \end{aligned} \tag{5.2.27}$$

sillä $\left[U^\lambda_{st}, I\otimes I\otimes C_2\right] = 0$ (huomaa, että $U^\lambda_{st} = e^{\imath\lambda P[\psi_k]\otimes B_2}\otimes I$). Täten

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\mu\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} xy\, M_{\lambda,\mu}(dx,dy) \\
= \quad & \frac{1}{\lambda}\langle U_{st}^{\lambda}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2|\imath\,[P[\varphi_0]\otimes I\otimes B_2, P[\psi_k]\otimes C_1\otimes C_2]\,U_{st}^{\lambda}\eta\otimes\phi_1\otimes\phi_2\rangle \\
= \quad & \frac{1}{\lambda\sqrt{2d}}\langle e^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1|\,(|\varphi_0\rangle\langle\psi_k|+|\psi_k\rangle\langle\varphi_0|)\otimes Ce^{\imath\lambda P[\psi_j]\otimes B_1}\eta\otimes\phi_1\rangle \\
\xrightarrow{\lambda\to 0} \quad & \frac{1}{\sqrt{2d}}\langle\eta\otimes\phi_1|\imath\,[P[\psi_j]\otimes B,(|\varphi_0\rangle\langle\psi_k|+|\psi_k\rangle\langle\varphi_0|)\otimes C]\,\eta\otimes\phi_1\rangle \\
= \quad & \frac{1}{2d}\,(\langle\eta|\psi_j\rangle\langle\psi_k|\eta\rangle+\langle\eta|\psi_k\rangle\langle\psi_j|\eta\rangle) \\
= \quad & \frac{1}{d}\mathfrak{R}\,[\langle\psi_k|P[\eta]\psi_j\rangle]\,,
\end{aligned}
\tag{5.2.28}
$$

kaikilla $P[\eta]$, $\eta\in\mathcal{H}_1$. □

Imaginääriosakin saadaan samaan tapaan vaihtamalla edeltävässä lauseessa jomman kumman standardimittauksen asteikkosuure kaavan (3.2.8) mielessä kovariantiksi suureekseen – seuraavassa lauseessa näin on tehty ensimmäiselle standardimittaukselle.

**Lause 5.5.** Olkoot $\phi_1\in\mathscr{D}(B_1)$ ja $\phi_2\in\mathscr{D}(C_2B_2)\cap\mathscr{D}(B_2C_2)$ sellaiset yksikkövektorit, että ne toteuttavat $\langle\phi_1|B_1\phi_1\rangle=0=\langle\phi_2|C_2\phi_2\rangle$, $\langle\phi_1|B_1^2\phi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\langle\phi_2|C_2B_2\phi_2\rangle=\frac{\imath}{\sqrt{2}}$. Tehdään jonomittauksena standardimallin mukaiset mittaukset $\mathcal{N}=\langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}_1},\phi_1,U_{st}^{\lambda},E^{B_1},f_\lambda\rangle$ ja $\mathcal{M}=\langle\mathcal{H}_{\mathcal{A}_2},\phi_2,U_{st}^{\mu},E^{C_2},f_\mu\rangle$ vastaavasti, ja merkitään näiden mittausten indusoimia instrumentteja $\mathcal{J}^{\lambda}$ ja $\mathcal{I}^{\mu}$ vastaavasti. Näiden jälkeen suoritetaan vielä projektion $P[\psi_k]$ tarkka mittaus. Silloin

$$
\lim_{\lambda\to 0}\lim_{\mu\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} xy\,\mathrm{tr}\left[\mathcal{J}^{\lambda}(dx)^*(\mathcal{I}^{\mu}(dy)^*(P[\psi_k]))\,\rho\right]=\frac{1}{d}\mathfrak{Im}\,[\langle\psi_k|\rho\,\psi_j\rangle]\,, \tag{5.2.29}
$$

kaikilla $\rho\in\mathscr{S}(\mathcal{H})$.

*Todistus.* Todistuksen alkuosa on analoginen edellisen lauseen todistuksen kanssa. Edelleen riittää tarkastaa väite pelkillä puhtailla tiloilla, joten valitaan $\rho=P[\eta]$,

$\eta \in \mathcal{H}_1$. Nyt $U^\mu_{st} U^\lambda_{st} \eta \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \in \mathscr{D}(x, I \otimes E^{B_1}_\lambda \otimes I)$, sillä

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} x^2 \langle U^\mu_{st} U^\lambda_{st} \eta \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 | I \otimes E^{B_1}_\lambda \otimes I U^\mu_{st} U^\lambda_{st} \eta \otimes \phi_1 \otimes \phi_2 \rangle \\ = & \int_{\mathbb{R}} x^2 \langle \phi_1 | E^{B_1}_\lambda \phi_1 \rangle < \infty. \end{aligned} \tag{5.2.30}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \to 0} \int_{\mathbb{R}^2} xy \operatorname{tr} \left[ \mathcal{J}^\lambda(dx)^* (\mathcal{I}^\mu(dy)^* (P[\psi_k])) \, T \right] \\ = & \frac{1}{\lambda \sqrt{2d}} \langle e^{\imath \lambda P[\psi_j] \otimes B_1} \eta \otimes \phi_1 | \left( |\varphi_0\rangle\langle\psi_k| + |\psi_k\rangle\langle\varphi_0| \right) \otimes B_1 e^{\imath \lambda P[\psi_j] \otimes B_1} \eta \otimes \phi_1 \rangle \\ \xrightarrow{\lambda \to 0} & \frac{1}{\sqrt{2d}} \langle \eta \otimes \phi_1 | \imath \left[ P[\psi_j] \otimes B, \left( |\varphi_0\rangle\langle\psi_k| + |\psi_k\rangle\langle\varphi_0| \right) \otimes B \right] \eta \otimes \phi_1 \rangle \\ = & \frac{\imath}{d} \left( \langle \eta | \psi_k \rangle \langle \psi_j | \eta \rangle - \langle \eta | \psi_j \rangle \langle \psi_k | \eta \rangle \right) \\ = & \frac{1}{d} \mathfrak{Im} \left[ \langle \psi_k | P[\eta] \, \psi_j \rangle \right], \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

kaikilla $P[\eta]$, $\eta \in \mathcal{H}_1$. □

Lauseet 5.4 ja 5.5 osoittavat, että äärellisulotteisessa ($\dim(\mathcal{H}) = d < \infty$) yleisen tilan $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ määrittäminen onnistuu heikkojen mittausten avulla.

Menetelmä ei kuitenkaan sellaisenaan yleisty ääretönulotteiseen tapaukseen ($\dim(\mathcal{H}) = \infty$), sillä vektoria $\varphi_0$, jolle $\langle \psi_j | \varphi_0 \rangle =$ "sama vakio" kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ei voida löytää. Ongelmaa voisi kuitenkin yrittää kiertää separoimalla Hilbertin avaruuden $\mathcal{H}$ äärellisulotteisten suljettujen aliavaruuksien $L_n$, $\dim L_n < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, suoraksi summaksi, $\mathcal{H} = \oplus_{n \in \mathbb{N}} L_n$, joissa kussakin menetelmä jälleen toimii. Kuitenkin johtuen sekatermeistä $\langle \varphi | \rho \varphi' \rangle$, missä $\varphi \in L_n$ ja $\varphi' \in L_m$, $m \neq n$, joita yleinen tila $\rho$ lähtökohtaisesti voi sisältää, tämä yritys ei tuota lopullista voittoa. Sekatermit häviäisivät tilan $\rho$ ominaiskannassa, mutta yleisen tuntemattoman tilan tapauksessa myös ominaiskanta on tuntematon. Kaiken kaikkiaan jää avoimeksi onnistuuko menetelmän laajentaminen ääretönulotteiseen tapaukseen.

## 5.3 Heikot arvot ja Ozawan mittausepätarkkuusrelaatio

Heisenberg ehdotti vuonna 1927 ilmestyneessä julkaisussaan *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, että paikan mittaustarkkuuden $\epsilon(Q, \mathcal{M})$ ja mittauksen liikemäärässä aiheuttaman häiriön $\eta(P, \mathcal{M})$ välillä toteutuu

$$\epsilon(Q, \mathcal{M})\, \eta(P, \mathcal{M}) \sim h, \tag{5.3.1}$$

missä $h$ on Planckin vakio. Heisenberg päätyi ylläolevaan ehtoon varhaisen kvanttiteorian jokseenkin heuristisen tulkinnan pohjalta ja se oli yksi ensimmäisiä yrityksiä löytää fysikaalinen tulkinta vuonna 1925 keksitylle relaatiolle $PQ - QP = \frac{h}{2\pi\imath}$. Myöhemmin 20-luvun loppupuolella E. Kennard [31] ja H. Robertson [32] johtivat *Heisenbergin epätarkkuusperiaatteena* tunnetun epäyhtälön, jonka mukaan kahden (yleisen) suureen $A$ ja $B$ hajontojen $\Delta_\psi(A)$ ja $\Delta_\psi(B)$ välillä vektoritilassa $\psi \in \mathcal{H}_1$ pätee

$$\Delta_\psi(A)\, \Delta_\psi(B) \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|\, [A, B]\, \psi\rangle|. \tag{5.3.2}$$

Luonnollisesti herää kysymys, että voidaanko suureen $A$ mittauksen $\mathcal{M}$ tarkkuuden $\epsilon_\psi(A, \mathcal{M})$ ja mittauksen $\mathcal{M}$ suureessa $B$ aiheuttaman häiriön tilassa $\psi \in \mathcal{H}_1$ tulolle antaa yleisesti jokin alaraja, esimerkiksi kommutaattorin $[A, B]$ avulla muodossa

$$H := \epsilon_\psi(A, \mathcal{M})\, \eta_\psi(B, \mathcal{M}) \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|\, [A, B]\, \psi\rangle|. \tag{5.3.3}$$

Masanao Ozawan mukaan näin ei käy, vaan sen sijaan artikkelissa [33] hän ehdottaa kaavan (5.3.3) tilalle pian esiteltävää *Ozawan mittausepätarkkuusrelaatiota*. Tässä tutkielmani viimeisessä alaluvussa kyseisessä relaatiossa esiintyvät *Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö* johdetaan heikkojen arvojen avulla perusviitteen [23] menetelmää myötäillen.

Olkoon $A$ ja $B$ tarkkoja suureita. Oletetaan, että tarkka suure $A$ pyritään mittaamaan mittauksella $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_\mathcal{A}, Z, U, \phi \rangle$, missä $Z$ valitaan tarkaksi. Tällöin määritellään Ozawan mittaustarkkuus $\epsilon_\psi$ ja -häiriö $\eta_\psi$ seuraavasti:

$$\epsilon_\psi(A, \mathcal{M})^2 = \langle \psi \otimes \phi | \left(U^* I \otimes ZU - A \otimes I\right)^2 \psi \otimes \phi \rangle \tag{5.3.4}$$

$$\eta_\psi(B, \mathcal{M})^2 = \langle \psi \otimes \phi | \left(U^* B \otimes IU - B \otimes I\right)^2 \psi \otimes \phi \rangle. \tag{5.3.5}$$

**Esimerkki 5.6.** Osoitetaan, että sopivilla valinnoilla Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö rikkovat kaavan (5.3.3) mukaista epäyhtälöä. Olkoon $\gamma \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ jokin kiinteä tila ja määritellään instrumentti $\mathcal{I}$ kaavalla $\mathcal{I}(X)(\rho) = \mathrm{tr}\left[E^Q(X)\rho\right]\gamma$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ ja $X \in \mathscr{A}$. Tällöin instrumentti $\mathcal{I}$ on esimerkin 3.11 mukaan täyspositiivinen, joten $\mathcal{I} = \mathcal{I}^\mathcal{M}$ jollekin mittaukselle $\mathcal{M}$. Koska $\mathrm{tr}\left[\mathcal{I}(X)(\rho)\right] = \mathrm{tr}\left[E^Q(X)\rho\right]$ kaikilla $\rho \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$, kyseinen mittaus on $Q$-mittaus.

Nyt ratkaiseva artikkelin [34] tulos on, että rajoitetuille itseadjungoiduille operaattoreille $A$ ja $B$ Ozawan tarkkuus ja häiriö on annettavissa muodossa

$$\epsilon_\psi(A, \mathcal{M})^2 = \langle \psi | \left(E^\mathcal{M}[2] - E^\mathcal{M}[1]^2\right) \psi \rangle + \langle \psi | \left(E^\mathcal{M}[1] - A\right)^2 \psi \rangle \tag{5.3.6}$$

$$\eta_\psi(B, \mathcal{M})^2 = \langle \psi | \left(\mathcal{I}^\mathcal{M}(\mathbb{R})^*(B^2) - \mathcal{I}^\mathcal{M}(\mathbb{R})^*(B)^2\right) \psi \rangle + \langle \psi | \left(\mathcal{I}^\mathcal{M}(\mathbb{R})^*(B) - B\right)^2 \psi \rangle. \tag{5.3.7}$$

Toisaalta tapauksessa $A = Q$ ja $B = P$ ylläolevat kaavat pätevät, kunhan vain vaaditaan, että $\psi \in \mathscr{D}(Q) \cap \mathscr{D}(P)$ (vrt. [34] liitteiden A ja B todistukset). Koska $\mathcal{I}^\mathcal{M}(\mathbb{R})^*(B) = \mathrm{tr}\left[B\,\gamma\right] I$, aina kun $B\,\gamma \in \mathscr{T}(\mathcal{H})$, niin ylläolevan nojalla

$$\begin{aligned} \epsilon_\psi(Q, \mathcal{M})^2 &= \langle \psi | \left(Q^2 - Q^2\right) \psi \rangle + \langle \psi | \left(Q - Q\right)^2 \psi \rangle = 0 \\ \eta_\psi(P, \mathcal{M})^2 &= \langle \psi | \left(\mathrm{tr}\left[P^2\,\gamma\right] I - \left(\mathrm{tr}\left[P\,\gamma\right] I\right)^2\right) \psi \rangle + \langle \psi | \left(\mathrm{tr}\left[P\,\gamma\right] I - P\right)^2 \psi \rangle \\ &= \mathrm{tr}\left[P^2\,\gamma\right] - 2\mathrm{tr}\left[P\,\gamma\right] \langle \psi | P\psi \rangle + \langle \psi | P^2 \psi \rangle, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

aina kun $\psi \in \mathscr{D}(Q) \cap \mathscr{D}(P)$ ja $\gamma \in \mathscr{D}(P)$: nämä ehdot täyttyvät esimerkiksi valitsemalla $\psi = \psi_0$ ja $\gamma = P[\psi_0]$, missä $\psi_0$ on harmonisen oskillaattorin perustila. Silloin $\eta_\psi(P, \mathcal{M}) < \infty$, joten $\epsilon_\psi(Q, \mathcal{M})\,\eta_\psi(P, \mathcal{M}) = 0$, mikä rikkoo epäyhtälön (5.3.3).

Seuraava lause osoittaa, että Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö toteuttavat kuitenkin erään toisen epäyhtälön.

**Lause 5.7.** Olkoon $\mathcal{M} = \langle \mathcal{H}_{\mathcal{A}}, Z, U, \phi \rangle$, missä $Z$ valitaan tarkaksi suureeksi. Silloin edellä määriteltyjen lukujen $\epsilon_\psi(A, \mathcal{M})$ ja $\eta_\psi(B, \mathcal{M})$ välillä toteutuu epäyhtälö

$$\begin{aligned} O &:= \epsilon_\psi(A,\mathcal{M})\,\eta_\psi(B,\mathcal{M}) + \epsilon_\psi(A,\mathcal{M})\,\Delta_\psi(B) + \Delta_\psi(A)\,\eta_\psi(B,\mathcal{M}) \\ &\geq \frac{1}{2}|\langle\psi|\,[A,B]\,\psi\rangle|. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

*Todistus.* [20] Merkitään

$$\begin{cases} A^{\mathrm{in}} = A \otimes I \\ B^{\mathrm{in}} = B \otimes I \end{cases}, \qquad \begin{cases} Z^{\mathrm{out}} = U^* I \otimes Z U \\ B^{\mathrm{out}} = U^* B \otimes I U \end{cases}, \tag{5.3.10}$$

ja määritellään

$$\begin{cases} N(A) = Z^{\mathrm{out}} - A^{\mathrm{in}} \\ D(B) = B^{\mathrm{out}} - B^{\mathrm{in}} \end{cases}. \tag{5.3.11}$$

Ehtoa $[Z^{\mathrm{out}}, B^{\mathrm{out}}] = 0$ ja kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} & |\langle\psi\otimes\phi|[N(A),D(B)]\psi\otimes\phi\rangle| + |\langle\psi\otimes\phi|[N(A),B^{\mathrm{in}}]\psi\otimes\phi\rangle| \\ + \; & |\langle\psi\otimes\phi|[A^{\mathrm{in}},D(B)]\psi\otimes\phi\rangle| \geq |\langle\psi\otimes\phi|[A^{\mathrm{in}},B^{\mathrm{in}}]\psi\otimes\phi\rangle| = |\langle\psi|[A,B]\psi\rangle|. \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

[20] Todistus on oleellisesti peräisin alkuperäisartikkelista [33].

Toisaalta

$$\begin{aligned}
& |\langle\psi\otimes\phi|[N(A),D(B)]\psi\otimes\phi\rangle| \\
\overset{(5.3.2)}{\leq}\; & \Delta_{\psi\otimes\phi}(N(A))\,\Delta_{\psi\otimes\phi}(D(B)) \\
=\; & 2\left(\langle\psi\otimes\phi|N(A)^2\psi\otimes\phi\rangle-\langle\psi\otimes\phi|N(A)\psi\otimes\phi\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \times\left(\langle\psi\otimes\phi|D(B)^2\psi\otimes\phi\rangle-\langle\psi\otimes\phi|D(B)\psi\otimes\phi\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\; & 2\left(\langle\psi\otimes\phi|N(A)^2\psi\otimes\phi\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\left(\langle\psi\otimes\phi|D(B)^2\psi\otimes\phi\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \\
=:\; & 2\epsilon_\psi(A,\mathcal{M})\,\eta_\psi(B,\mathcal{M})
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

ja vastaavasti saadaan

$$|\langle\psi\otimes\phi|[N(A),B^{\mathrm{in}}]\psi\otimes\phi\rangle| \;\leq\; 2\epsilon_\psi(A,\mathcal{M})\,\Delta_\psi(B) \tag{5.3.14}$$

$$|\langle\psi\otimes\phi|[A^{\mathrm{in}},D(B)]\psi\otimes\phi\rangle| \;\leq\; 2\Delta_\psi(A)\,\eta_\psi(B,\mathcal{M}). \tag{5.3.15}$$

Sijoittamalla nämä arviot ylläolevaan kaavaan (5.3.12) saadaan väite.

□

Kaavaa (5.3.9) Ozawa kutsuu *universaaliksi mittausepätarkkuusrelaatioksi* ja ehdottaa kaavan (5.3.3) tilalle. Tässä tutkielmassa epäyhtälöstä (5.3.9) käytetään kuitenkin vähemmän hyökkäävää nimitystä *Ozawan mittausepätarkkuusrelaatio.*

Artikkelissa [34] on tutkittu Ozawan mittaustarkkuuden ja -häiriön hyviä ja huonoja puolia. Mainittakoon tässä, että mittauksen $\mathcal{M}$ indusoiman suureen $E^{\mathcal{M}}$ ollessa spektraalimitta $E^C$, mittaustarkkuus $\epsilon_\psi(A,\mathcal{M})$ on kaavan (5.3.6) mukaisesti yksinkertaista muotoa

$$\epsilon_\psi(A,\mathcal{M})^2=\langle\psi|\,(C-A)^2\,\psi\rangle. \tag{5.3.16}$$

Tällöin esimerkiksi spinsuureen $A=\sigma_x$ mittaustarkkuus $\epsilon_\psi(A,\mathcal{M})=0$, kun valitaan

$$C=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\qquad\text{ja}\qquad\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \tag{5.3.17}$$

Matriiseilla $C$ ja $A$ ei kuitenkaan ole mitään tekemistä keskenään: niiden ominaisarvot, $(-1,3)$ ja $(-1,1)$ vastaavasti, eivät kaikki ole samoja ja samatkin ominaisarvot esiintyvät eri todennäköisyyksillä tilassa $\psi$. Edeltävässä esimerkissä 5.6 ilmenee eräs epäkohta myös Ozawan määrittelemässä mittaushäiriössä. Nimittäin häiritty liikemääräsuure $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\mathbb{R})^*(P) = \mathrm{tr}\,[P\,\gamma]\,I$, eli triviaali suure, on kokonaan menettänyt *nopeussysäyskovarianssin*, joka on eräs liikemäärältä vaadittava karakteristinen ominaisuus. Näin ollen olisi luonnollista olettaa, että häiriön $\eta_\psi(P,\mathcal{M})$ tulisi olla suuri. Kuitenkin sopivilla vektorin $\psi \in \mathcal{H}_1$ ja tilan $\gamma \in \mathscr{S}(\mathcal{H})$ valinnoilla kyseinen häiriö voidaan saada jopa mielivaltaisen pieneksi[21], mikä on ristiriidassa edeltävän olettamuksen kanssa. Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö ovat saaneet osakseen vahvaa kritiikkiä myös artikkelissa [35]. Kaiken kaikkiaan vaikuttaakin siltä, että Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö eivät ole täysin hyvin määriteltyjä mittauksen tarkkuuden ja häiriön mittareita.

Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö ovat kuitenkin matemaattisesti hyvin määriteltyjä ja seuraavaksi tutkin, kuinka ne voitaisiin kokeellisesti mittauksilla saavuttaa. Ensimmäinen ja ehkä luonnollisin yritys esimerkiksi luvun (5.3.4) määräämiseksi kokeellisesti olisi selvittää itseadjungoitua operaattoria $U^*I \otimes ZU - A \otimes I$ vastaava spektraalimitta, etsiä jokin siihen liittyvä mittaus ja määrätä mittaustulostilastosta toinen momentti tilassa $\psi \otimes \phi$. Usein edeltävä tehtävä voi kuitenkin olla erittäin haastava. Vaihtoehtoinen lähestymistapa on määrätä Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö heikkojen arvojen avulla, kuten on tehty artikkelissa [23]. Seuraavassa tarkastellaan lyhyesti tätä menetelmää.

Olkoon $C$ ja $D$ tarkkoja suureita. Mittaustarkkuuden ja -häiriön mittaamiseksi tarvitsee oleellisesti määrätä muotoa $\langle\xi|(C-D)^2\xi\rangle$ olevia lukuja mittausten avulla. Artikkelissa [23] tämä tapahtuu integroimalla funktiota $(x,y) \mapsto (x-y)^2$ kaksoismitan $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni (X,Y) \mapsto \mu_\xi := \mathfrak{Re}\left[\langle\xi|E^C(Y)E^D(X)\xi\rangle\right] \in [-1,1]$ suhteen:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x-y)^2\,d\mu_\xi(x,y) = \langle\xi|(C-D)^2\xi\rangle. \tag{5.3.18}$$

[21] Huomaa, että esimerkin 5.6 ehdot $\psi \in \mathscr{D}(Q) \cap \mathscr{D}(P)$ ja $\gamma \in \mathscr{D}(P)$ täyttäviä tiloja on paljon: esimerkiksi kaikki Hermiten funktiot ovat tällaisia ja niiden virittämä aliavaruus ovat tiheässä $\mathcal{H}$:ssa.

Huomautettakoon, että vaikka luvun $\langle\xi|(C-D)^2\xi\rangle$ määrääminen edellä esitetyn mukaisesti onnistuu, niin sitä ei tule käsittää kaksoismitan $\mu_\xi$ toisena momenttina, sillä yleisesti $\mu_\xi$ saa myös negatiivisia arvoja eikä siten kelpaa edes todennäköisyysmitaksi[22]. Voidaankin osoittaa, että $\mu_\xi$ laajenee todennäköisyysmitaksi tarkalleen silloin, kun vektori $\xi$ kuuluu operaattoreiden $C$ ja $D$ kommutointialueeseen $\mathrm{com}(C,D) = \{\varphi \in \mathcal{H}|\, E^C(X)E^D(Y)\varphi = E^D(Y)E^C(X)\varphi,$ kaikilla $X,Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ [1, s.143].

Lauseen 4.9 mukaisesti luvut $\mathfrak{Re}\left[\langle\xi|E^C(Y)E^D(X)\xi\rangle\right]$ voidaan saavuttaa heikkojen mittausten avulla kaikilla $X,Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, joten kaksoismitta $\mu_\xi$, ja sitä myöten Ozawan mittaustarkkuus ja -virhe, on mahdollista määrätä: esimerkiksi valitsemalla $C = U^*I\otimes ZU$, $D = A\otimes I$ ja $\xi = \psi\otimes\phi$ saadaan

$$\mu_{\psi\otimes\phi}(X,Y) \quad = \quad \mathfrak{Re}\left[\langle\psi\otimes\phi|U^*I\otimes E^Z(Y)UE^A(X)\otimes I\psi\otimes\phi\rangle\right], \qquad (5.3.19)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(x-y)^2\,d\mu_{\psi\otimes\phi}(x,y) &= \langle\psi\otimes\phi|\,(U^*I\otimes ZU - A\otimes I)^2\,\psi\otimes\phi\rangle \\ &= \epsilon_\psi(A,\mathcal{M})^2. \qquad (5.3.20)\end{aligned}$$

Vastaavaan tapaan löydetään myös $\eta_\psi(B,\mathcal{M})$.

### 5.3.1 Kubittiesimerkki

Koko lopun tutkielman ajan merkitään *kontrolloituun NOT-porttiin (CNOT)* liittyvää unitaarimuunnosta

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.3.21)$$

[22] Tässä mielessä artikkeli [23] kaipaa tarkennusta, sillä siellä kaksoismitasta $\mu_\xi$ puhutaan todennäköisyysmittana ja Ozawan mittaustarkkuus ja -virhe tulkitaan rms-keskiarvona.

Valitaan mitattavaksi suureeksi spinsuure $\sigma_z$ (suure $A$), joka pyritään mittaamaan mittauksella $\mathcal{M} = \langle \mathbb{C}^2, \sigma_z, U, \phi \rangle$, missä $\phi = \cos(\theta)|-\rangle + \sin(\theta)|+\rangle$. Tarkastellaan mittauksen $\mathcal{M}$ aiheuttamaa häiriötä komplementaarisessa spinsuureessa $\sigma_x$ (suure $B$). Systeemin alkutilaksi valitaan jokin spinsuureen $\sigma_y$ ominaistila $\psi \in \mathbb{C}^2$, $\|\psi\| = 1$, jolloin molempien mittausepätarkkuusrelaatioiden (5.3.3) ja (5.3.9) oikean puolen luku $\frac{1}{2}|\langle\psi|\,[\sigma_z, \sigma_x]\,\psi\rangle| = |\langle\psi|\sigma_y\psi\rangle|$ saa maksimiarvonsa $|\langle\psi|\sigma_y\psi\rangle| = 1$. Silloin Ozawan mittaustarkkuudeksi saadaan:

$$\begin{aligned}\epsilon_\psi(\sigma_z, \mathcal{M})^2 &= \langle\psi\otimes\phi|\left(U^* I\otimes\sigma_z U - \sigma_z\otimes I\right)^2 \psi\otimes\phi\rangle \\ &= 4\langle\psi\otimes\phi|I\otimes|+\rangle\langle+|\psi\otimes\phi\rangle \\ &= 4\sin^2(\theta). \qquad (5.3.22)\end{aligned}$$

Vastaavasti Ozawan mittaushäiriöksi saadaan:

$$\begin{aligned}\eta_\psi(\sigma_x, \mathcal{M})^2 &= \langle\psi\otimes\phi|\left(U^*\sigma_x\otimes I U - \sigma_x\otimes I\right)^2 \psi\otimes\phi\rangle \\ &= 2\langle\psi\otimes\phi|I\otimes(I-\sigma_x)\psi\otimes\phi\rangle \\ &= 2\left(\cos(\theta) - \sin(\theta)\right)^2. \qquad (5.3.23)\end{aligned}$$

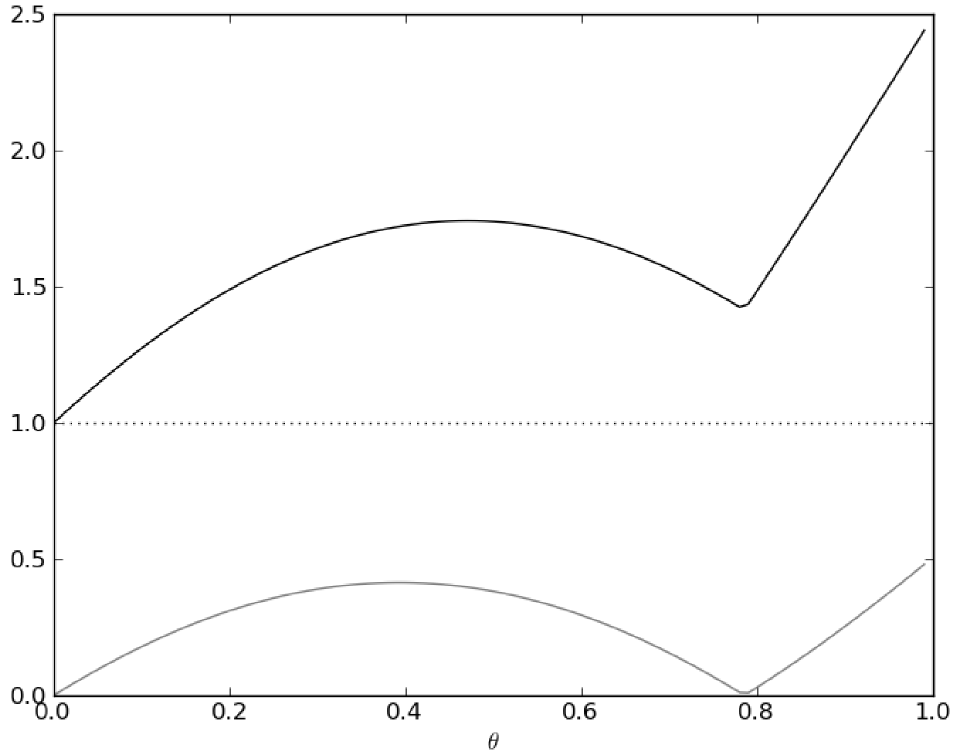
Hajonnat tilassa $\psi$ ovat $\Delta_\psi(\sigma_z) = 1 = \Delta_\psi(\sigma_x)$. Nyt mittausepätarkkuusrelaatioiden vasemmaksi puoleksi saadaan

$$H = 2\sqrt{2}|\sin(\theta)||\cos(\theta) - \sin(\theta)| \qquad (5.3.24)$$

$$O = 2\sqrt{2}|\sin(\theta)||\cos(\theta) - \sin(\theta)| + 2|\sin(\theta)| + \sqrt{2}|\cos(\theta) - \sin(\theta)| \qquad (5.3.25)$$

Kuvassa 4 on esitetty mittausepätarkkuusrelaatiot $\theta$:n funktiona. Erityisesti huomataan, että kaavan (5.3.3) mittausepätarkkuusperiaate rikkoutuu ja sitä vastoin Ozawan mittausepätarkkuusperiaate toteutuu välillä $\theta \in [0, 1]$.

Artikkelissa [23] A. Lund ja H. Wiseman esittelevät edellä esitellyn kubittiesimerkin ja koejärjestelyn sen toteuttamiseksi. Kokeellinen työ on julkaistu L. Rozeman




Kuva 4: Kaavan (5.3.24) $H$ (alempi vaaleanharmaa käyrä) ja kaavan (5.3.25) $O$ (ylempi tummanharmaa käyrä) esitettynä $\theta$:n funktiona välillä $\theta \in [0,1]$. Katkoviiva esittää epätarkkuusperiaatteiden alarajaa $\frac{1}{2}|\langle\psi|\,[\sigma_z,\sigma_x]\,\psi\rangle| = 1$.

*et al.* artikkelissa [24] – tutkielmani lopuksi näiden papereiden teoreettiset tulokset johdetaan täsmällisesti. Aloitetaan aputuloksilla.

**Lemma 5.8.** Olkoon $\phi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ mittalaitteen alkutila. Mittaus $\mathcal{M} = \langle\mathbb{C}^2, \sigma_z, U, \phi\rangle$ on heikko mittaus, kun $2\alpha^2 - 1 \to 0$.

*Todistus.* Olkoon $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ ja $\varphi \in \mathbb{C}^2_1$ mielivaltaisia. Osittaisen sisätulon avulla saadaan

$$\langle\phi|U^* L \otimes IU\phi\rangle_{\mathbb{C}^2} = \begin{pmatrix} a & 2\alpha\beta b \\ 2\alpha\beta c & d \end{pmatrix} \longrightarrow L \tag{5.3.26}$$

tarkalleen, kun $2\alpha\beta \to 1$. Edelleen käyttämällä normitusehtoa $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left[\mathcal{I}^{\mathcal{M}}(\Omega)(P[\varphi])\, L\right] &= \langle \varphi \otimes \phi | U^* L \otimes I U \varphi \otimes \phi \rangle \\ &\longrightarrow \mathrm{tr}\left[P[\varphi]\, L\right], \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

kun $2\alpha^2 - 1 \to 0$, kaikilla $\varphi \in \mathbb{C}^2_1$ ja $L \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$. Käyttämällä lausetta 2.2 saadaan väite. □

**Lemma 5.9.** Olkoon $\phi = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Mittauksessa $\mathcal{M} = \langle \mathbb{C}^2, \sigma_z, U, \phi \rangle$ tulee mitatuksi suure $E(j) = \frac{1}{2}\left(I + j(2\alpha^2 - 1)\sigma_z\right)$, $j \in \{-1, +1\}$.

*Todistus.* Olkoon $j = +1$, jolloin

$$U^* I \otimes E^{\sigma_z}(\{+1\}) U = |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|, \tag{5.3.28}$$

mistä edelleen osittaisen sisätulon avulla saadaan

$$\begin{aligned} \langle \phi | U^* I \otimes E^{\sigma_z}(\{+1\}) U \phi \rangle_{\mathbb{C}^2} &= \alpha^2 |0\rangle\langle 0| + \beta^2 |1\rangle\langle 1| \\ &= |1\rangle\langle 1| + \alpha^2 \sigma_z \\ &= \frac{1}{2}\left(I + (2\alpha^2 - 1)\sigma_z\right). \end{aligned} \tag{5.3.29}$$

Mittauksessa $\mathcal{M}$ mitatuksi tulevaksi suureeksi $E$ saadaan siis kaavan (3.1.13) mukaisesti $E(\{+1\}) = \frac{1}{2}\left(I + (2\alpha^2 - 1)\sigma_z\right)$. Vastaava lasku osoittaa, että $E(\{-1\}) = \frac{1}{2}\left(I - (2\alpha^2 - 1)\sigma_z\right)$. □

**Lemma 5.10.** Olkoon $S_{\vec{a}}$ spin-$\frac{1}{2}$ -suure, $\varphi \in \mathbb{C}^2$, $\|\varphi\| = 1$, mielivaltainen vektoritila, $F : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ suure ja joukko $Y \in \mathscr{A}$, siten että $F(Y)\varphi \neq 0$. Silloin

$$2P[\pm_{\vec{a}}]^w(\varphi, F(Y)) = 1 \pm S^w_{\vec{a}}(\varphi, F(Y)). \tag{5.3.30}$$

*Todistus.* Lineaarisuuden nojalla

$$\langle \varphi | F(Y) S_{\vec{a}} \varphi \rangle = \langle \varphi | F(Y) E^{S_{\vec{a}}}(\{+1\}) \varphi \rangle - \langle \varphi | F(Y) E^{S_{\vec{a}}}(\{-1\}) \varphi \rangle, \tag{5.3.31}$$

mistä saadaan käyttämällä identiteettiä $E^{S_{\vec{a}}}(\{+1\}) + E^{S_{\vec{a}}}(\{-1\}) = I$

$$\langle\varphi|F(Y)S_{\vec{a}}\varphi\rangle = \pm 2\langle\varphi|F(Y)E^{S_{\vec{a}}}(\{+1\})\varphi\rangle \mp \langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle. \tag{5.3.32}$$

Jakamalla puolittain luvulla $\langle\varphi|F(Y)\varphi\rangle$ saadaan väite. □

Tarkastellaan ensiksi Ozawan mittaustarkkuutta $\epsilon_\psi$. Aiemman kaavan (5.3.20) perusteella

$$\begin{aligned}\epsilon_\psi(\sigma_z, \mathcal{M}_2)^2 &= \sum_{j,k=\pm1}(k-j)^2\mu_{\psi\otimes\phi_2}(j,k)\\ &= 4\mu_{\psi\otimes\phi_2}(+1,-1) + 4\mu_{\psi\otimes\phi_2}(-1,+1),\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

missä

$$\begin{aligned}\mu_{\psi\otimes\phi_2}(j,k) &= \mathfrak{Re}\left[\langle\psi\otimes\phi_2|U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)UE^{\sigma_z}(j)\otimes I\psi\otimes\phi_2\rangle\right]\\ &= \mathfrak{Re}\left[(E^{\sigma_z}(j)\otimes I)^w\left(\psi\otimes\phi_2, U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)U\right)\right]\times\\ &\quad\times\langle\psi\otimes\phi_2|U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)U\psi\otimes\phi_2\rangle.\end{aligned} \tag{5.3.34}$$

Edelleen

$$\begin{aligned}\langle\psi\otimes\phi_2|U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)U\psi\otimes\phi_2\rangle &= \mathrm{tr}\left[I\otimes E^{\sigma_z}(k)UP[\psi]\otimes P[\phi_2]U^*\right]\\ &\overset{5.9}{=} \langle\psi|\frac{1}{2}\left(I + k\cos(2\theta)\sigma_z\right)\psi\rangle\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{5.3.35}$$

kaikilla $k \in \{-1,+1\}$. Käyttämällä vielä lemmaa 5.10 saadaan

$$\begin{aligned}&2\mathfrak{Re}\left[(E^{\sigma_z}(j)\otimes I)^w\left(\psi\otimes\phi_2, U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)U\right)\right]\\ &= 1 + j\mathfrak{Re}\left[(\sigma_z\otimes I)^w\left(\psi\otimes\phi_2, U^*I\otimes E^{\sigma_z}(k)U\right)\right],\end{aligned} \tag{5.3.36}$$

kaikilla $j, k \in \{-1, +1\}$. Tähän mennessä on siis saatu

$$\begin{aligned}
\epsilon_\psi(\sigma_z, \mathcal{M}_2)^2 &= 2 + \mathfrak{Re}\left[(\sigma_z \otimes I)^w \left(\psi \otimes \phi_2, U^* I \otimes E^{\sigma_z}(-1)U\right)\right] \\
&\quad - \mathfrak{Re}\left[(\sigma_z \otimes I)^w \left(\psi \otimes \phi_2, U^* I \otimes E^{\sigma_z}(+1)U\right)\right] \\
&= 2 + \sum_{k=\pm 1} -k\, \mathfrak{Re}\left[(\sigma_z \otimes I)^w \left(\psi \otimes \phi_2, U^* I \otimes E^{\sigma_z}(k)U\right)\right]. \quad (5.3.37)
\end{aligned}$$

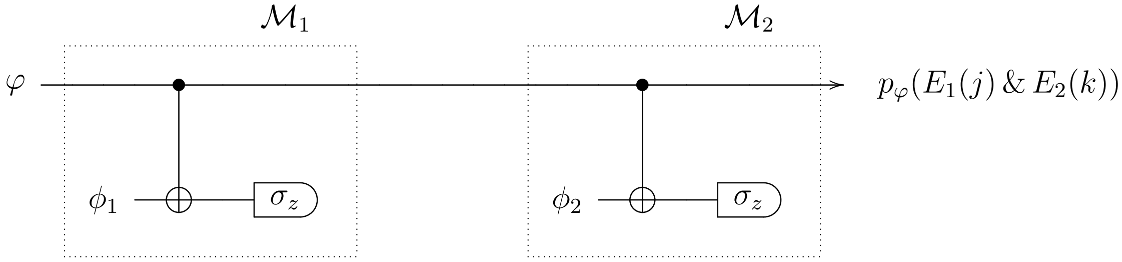
**Lemma 5.11.** Tehdään jonomittauksena ensin mittaus $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{C}^2, \sigma_z, U_1, \phi_1 \rangle$ ja sen jälkeen mittaus $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{C}^2, \sigma_z, U_2, \phi_2 \rangle$, missä $\phi_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $\phi_2 = \sin(\theta)|0\rangle + \cos(\theta)|1\rangle$ ja $U_i$ viittaa CNOT-porttia kuvaavaan unitaarimuunnokseen systeemin tilan ja $i$:nnen mittalaitteen välillä $i = 1, 2$ (katso kuva 5). Olkoon $E_i$ $i$:nnessa mittauksessa mitattava suure, $i = 1, 2$. Jonomittauksesta saatavat jonotodennäköisyydet ovat silloin

$$\begin{aligned}
p_\varphi(E_1(i)\,\&\,E_2(j)) &= \langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U_2 \; E_1(j) \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle \\
&=: p_{\psi \otimes \phi_2}(E_1(j) \otimes I \;\&\; U_2^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U_2) \qquad (5.3.38)
\end{aligned}$$

*Todistus.* Lemman 5.9 nojalla ensimmäisessä mittauksessa tulee mitatuksi suure $E_1(j) = \frac{1}{2}\left(I + j(2\alpha^2 - 1)\sigma_z\right)$, $j = \pm 1$, ja vastaavasti jälkimmäisessä suure $E_2(k) = \frac{1}{2}\left(I + k\cos(2\theta)\sigma_z\right)$, $k = \pm 1$. Nyt kaikilla systeemin alkutiloilla $\varphi \in \mathbb{C}^2_1$

$$\begin{aligned}
p_\varphi(E_1(j)\,\&\,E_2(k)) &\overset{(3.1.14)}{=} \operatorname{tr}\left[E_2(k)\, \mathcal{I}^{\mathcal{M}_1}(j)(P[\varphi])\right] \\
&= \operatorname{tr}\left[E_2(k) \otimes E^{\sigma_z}(j)\, U_1 P[\varphi] \otimes P[\phi_1] U_1^*\right] \\
&= \langle \varphi \otimes \phi_1 | E_2(k) \otimes I\, U_1^* I \otimes E^{\sigma_z}(j) U_1 \varphi \otimes \phi_1 \rangle \qquad (5.3.39) \\
&= \langle \varphi | E_2(k) E_1(j) \varphi \rangle \qquad (5.3.40) \\
&= \langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U_2\, E_1(j) \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle, \qquad (5.3.41)
\end{aligned}$$

sillä $[U_1^*, E_2(k) \otimes I] = 0$. $\square$




Kuva 5: Lemman 5.11 koejärjestely.

Nyt edellisen lemman 5.11, heikon arvon määritelmän ja lineaarisuuden nojalla[23]

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Re}\left[(\sigma_z \otimes I)^w\left(\psi \otimes \phi_2, U^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U\right)\right] \\
= \; & \frac{1}{2\alpha^2-1} \sum_{j=\pm 1} j\, p_{\psi\otimes\phi_2}(E_1(j) \otimes I \mid U_2^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U_2) \\
\overset{(5.3.35)}{=} \; & \frac{2}{2\alpha^2-1} \sum_{j=\pm 1} j\, p_{\psi\otimes\phi_2}(E_1(j) \otimes I \;\&\; U_2^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) U_2) \\
\overset{5.11}{=} \; & \frac{2}{2\alpha^2-1} \sum_{j=\pm 1} j\, p_{\psi}(E_1(j)\,\&\,E_2(k)). \qquad (5.3.42)
\end{aligned}$$

Loppujen lopuksi Ozawan tarkkuus saadaan ilmaistuksi suoraan mitattavien jonotodennäköisyyksien avulla muodossa

$$\epsilon_\psi(\sigma_z, \mathcal{M}_2)^2 \;=\; 2 + \frac{2}{2\alpha^2-1} \sum_{j,k=\pm 1} -jk\, p_\psi(E_1(j)\,\&\,E_2(k)). \qquad (5.3.43)$$

Erityisesti sijoittamalla $E_i$:n, $i = 1, 2$ lausekkeet ylläolevaan, saadaan $\epsilon_\psi(\sigma_z, \mathcal{M}_2) = 2|\sin(\theta)|$ niinkuin pitääkin.

Edellä parametri $2\alpha^2 - 1$ on oleellinen, sillä siihen liittyvän mittauksen on oltava riittävän heikko, jotta vektoritila $\psi$ ei muuttuisi kyseisessä mittauksessa. Tosiasiallisessa mittauksessa ei voida kuitenkaan tehdä rajankäyntiä $2\alpha^2 - 1 \to 0$, sillä silloin mittauksesta ei saada mitään informaatiota. Huomattavaa on kuitenkin, että mittaus voi ainoastaan laskea mittausepätarkkuusrelaatioiden vasemman puolen rajaa, sillä se on $\psi$:n valinnan nojalla maksimaalinen, eikä siitä syystä voi johtaa virheelliseen kaavan (5.3.3) mittausepätarkkuusperiaatteen rikkoutumiseen [23].

[23] Huomaa, että $\sigma_z = \frac{E_1(+1) - E_2(-1)}{2\alpha^2-1}$.

Ozawan mittaushäiriö $\eta_\psi(\sigma_x, \mathcal{M}_2)$ on ongelmallisempi tapaus. Nimittäin jälkimmäisen mittauksen $\mathcal{M}_2$ on säilyttävänä samana ja luku $\langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* \sigma_x \otimes I U_2 \; \sigma_x \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle$ pitäisi pystyä määrittämään muuttamalla pelkästään ensimmäistä mittausta. Artikkeleissa [23] tämä on pyritty toteuttamaan muuttamalla ensimmäisen mittauksen unitaarikytkentä muotoon $V = H \otimes I \, U_1 H \otimes I$, missä $H$ on *Hadamardin muunnos*

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.3.44}$$

Osittaisen sisätulon avulla saadaan

$$\langle \phi_2 | U_2^* E^{\sigma_x}(k) \otimes I U_2 \; \phi_2 \rangle_{\mathbb{C}^2} = \frac{1}{2} \left( I + k \sin(2\theta) \sigma_x \right), \quad k = \pm 1 \tag{5.3.45}$$

Johtuen $\sin(2\theta)$-termistä edellä mainittu jonomittausjärjestely ei voi[24] kuitenkaan tuottaa lukua $\langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* E^{\sigma_x}(k) \otimes I U_2 \; E^{\sigma_x}(j) \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle$, $j, k \in \{\pm 1\}$ – tarvitaan jotain muuta. Seuraavaksi on esitelty ehdotus tilanteen korjaamiseksi.

Aiemmin jo mainittiin, että tässä kubittiesimerkissä kaavan (5.3.3) mittausepätarkkuusperiaate rikkoutuu kaikilla $\theta$:n arvoilla välillä $\theta \in [0, 1]$, joten riittää tarkastella tapausta $\theta = \frac{\pi}{8}$, jolloin siis $\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(2\theta)$.

**Lemma 5.12.** Tehdään jonomittauksena mittaukset $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{C}^2, E^{\sigma_z}, V, \phi_1 \rangle$ ja $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{C}^2, E^{\sigma_z}, U_2, \phi_2 \rangle$, missä $\phi_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, $\phi_2 = \cos(\theta)|0\rangle + \sin(\theta)|1\rangle$, $\theta = \frac{\pi}{8}$ ja $V = U_1 H \otimes I$ (katso kuva 6). Jonomittauksesta saatavat jonotodennäköisyydet ovat silloin

$$\begin{aligned} p_\varphi(F_1(j) \,\&\, E_2(k)) &= \langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* E^{\sigma_x}(k) \otimes I U_2 \; F_1(j) \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle \\ &=: p_{\psi \otimes \phi_2}(F_1(j) \otimes I \;\&\; U_2^* E^{\sigma_x}(k) \otimes I U_2), \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

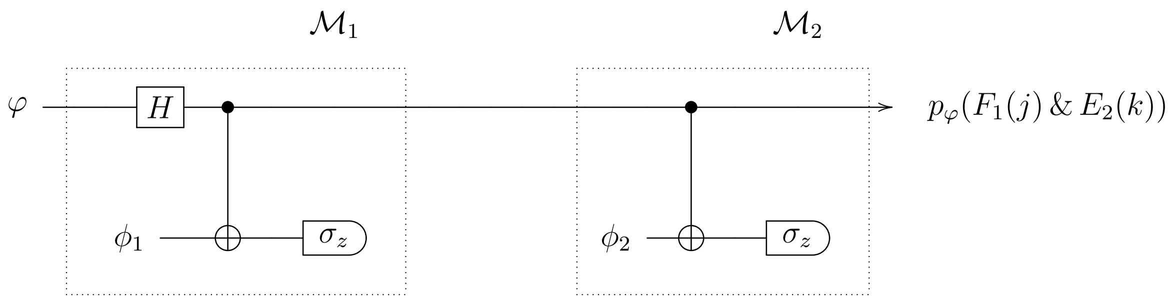
[24]Ensimmäisen mittauksen pitäisi vaikuttaa jälkimmäisen mittauksen mittalaitteen alkutilaan vrt. lemman 5.11 kaavat (5.3.39)-(5.3.41).

missä $F_1$ ($E_2$) on ensimmäisessä (jälkimmäisessä) mittauksessa mitatuksi tuleva suure.

*Todistus.* Todistus menee samaan tapaan kuin lemman 5.11 todistus. Lemmaa 5.9 käyttäen saadaan ensimmäisessä mittauksessa mitattuksi tulevaksi suureksi $F_1(j) = \frac{1}{2}\left(I + j(2\alpha^2 - 1)\sigma_x\right)$, joten

$$\begin{aligned} p_\varphi(F_1(j) \,\&\, E_2(k)) &= \langle \varphi \otimes \phi_1 | V^* I \otimes E^{\sigma_z}(k) I \otimes E^{\sigma_z}(j) V \varphi \otimes \phi_1 \rangle \\ &= \langle \varphi \otimes \phi_1 | \frac{1}{2}\left(I + k\cos(2\theta)\right) \otimes IV * I \otimes E^{\sigma_z}(j) V \varphi \otimes \phi_1 \rangle \\ &= \langle \varphi | \frac{1}{2}\left(I + k\cos(2\theta)\sigma_x\right) F_1(j) \varphi \rangle \\ &\overset{(5.3.45)}{=} \langle \varphi \otimes \phi_2 | U_2^* E^{\sigma_x}(k) \otimes I U_2 F_1(j) \otimes I \varphi \otimes \phi_2 \rangle, \end{aligned} \tag{5.3.47}$$

sillä $\theta = \frac{\pi}{8}$. □




Kuva 6: Lemman 5.12 koejärjestely.

Ozawan mittaushäiriökin saadaan loppujen lopuksi ilmaistuksi suoraan mitattavien jonotodennäköisyyksien avulla muodossa

$$\eta_\psi(\sigma_x, \mathcal{M}_2)^2 = 2 + \frac{2}{2\alpha^2 - 1} \sum_{j,k=\pm 1} -jk\, p_\psi(F_1(j) \,\&\, E_2(k)). \tag{5.3.48}$$

Tämän alaluvun laskut osoittavat, että Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö ovat johdettavissa heikkojen arvojen avulla ja esitelty kubittiesimerkki rikkoo kaavan (5.3.3) mittausepätarkkuusperiaatetta. Kubittiesimerkin tapauksessa jopa $[U^* I \otimes E^{\sigma_z}(j) U, E^{\sigma_z}(i) \otimes I] = 0 = [U^* E^{\sigma_z}(j) \otimes IU, E^{\sigma_x}(i) \otimes I]$, kaikilla $i, j \in \{-1, +1\}$, joten heikkojen arvojen reaaliosien avulla annetut kaksoismitat ($\mu_\xi$)

laajenevat todennäköisyysmittoiksi. Näin ollen Ozawan mittaustarkkuudelle ja -häiriölle on annettavissa myös todennäköisyysteoreettinen tulkinta kyseisten todennäköisyysmittojen toisena momenttina. Kuten jo aiemmin mainittua, ei ole kuitenkaan ilmeistä, ovatko Ozawan mittaustarkkuus ja -häiriö muuten hyvin määriteltyjä mittauksen tarkkuuden ja häiriön mittareita.

# Viitteet

[1] P. Lahti ja K. Ylinen, *Johdatus kvanttimekaniikkaan* (Suomen fyysikkoseura, 1989).

[2] P. Lahti, M. Maczynski ja K. Ylinen, *The moment operators of phase space observables and their number margins*, Rep. Math. Phys. **41**(3), s.319–331 (1998).

[3] J. Kiukas, P. Lahti ja K. Ylinen, *Phase space quantization and the operator moment problem*, J. Math. Phys. **47**(7), 072104–1–18 (2006).

[4] N. Dunford ja J. Schwartz, *Linear operators Part I: General theory* (Interscience publishers, 1958).

[5] J. Kiukas, P. Lahti ja K. Ylinen, *Semispectral measures as convolutions and their moment operators*, J. Math. Phys. **49**(11), 112103–1–6 (2008).

[6] P. Mittelstaedt, *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process* (Cambridge University Press, 1998).

[7] E. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, 1980).

[8] P. Busch, P. Lahti ja P. Mittelstaedt, *The Quantum Theory of Measurement* (Springer, 1996).

[9] P. Busch, M. Grabowski ja P. Lahti, *Operational Quantum Physics* (Springer, 1995).

[10] T. Heinosaari ja M. Ziman, *The Mathematical Language of Quantum Theory* (Cambridge University Press, 2012).

[11] M. Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, J. Math. Phys. **25**(1), s.79–87 (1984).

[12] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, 1932), engl.: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, 1955).

[13] P. Busch ja P. Lahti, *The Standard Model of Quantum Measurement Theory: History and Applications*, Found. Phys. **26**(7), s.875–893 (1996).

[14] E. Haapasalo, P. Lahti ja J. Schultz, *Weak vs. approximate values in quantum state determination*, Phys. Rev. A **84**(5), 052107–1–7 (2011).

[15] P. Busch, G. Cassinelli ja P. Lahti, *On the Quantum Theory of Sequential Measurements*, Found. Phys. **20**(7), s.757–775 (1990).

[16] Y. Aharonov, D. Albert ja L. Vaidman, *How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-$\frac{1}{2}$ Particle Can Turn Out to be 100*, Phys. Rev. Lett. **60**(14), s.1351–1354 (1988).

[17] S. E. Ahnert ja M. C. Payne, *Linear optics implementation of weak values in Hardy's paradox*, arXiv:quant-ph/0408153 , (2004).

[18] Y. Aharonov *et al.*, *Revisiting Hardy's paradox: counterfactual statements, real measurements, entanglement and weak values*, Phys. Lett. A **301**(3-4), s.130–138 (2002).

[19] M. Meglicki, *On Hardy's paradox, weak measurements, and multitasking diagrams*, Phys. Lett. A **375**(27), s.2606–2616 (2011).

[20] S. Kocsis *et al.*, *Observing the Average Trajectories of Single Photons in a Two-Slit Interferometer*, Science **332**(6034), s.1170–1173 (2011).

[21] C. Bamber *et al.*, *Direct measurement of a quantum wavefunction*, Nature **474**(7350), s.188–191 (2011).

[22] C. Bamber ja J. S. Lundeen, *Procedure for Direct Measurement of General Quantum States Using Weak Measurement*, Phys. Rev. Lett. **108**(7), 070402–1–5 (2012).

[23] A. Lund ja H. Wiseman, *Measuring measurement–disturbance relationships with weak values*, New J. Phys. **12**(9), 093011–1–11 (2010).

[24] L. A. Rozema *et al.*, *Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements*, Phys. Rev. Lett. **109**(10), 100404–1–5 (2012).

[25] M. V. Berry, N. Brunner, S. Popescu ja P. Shukla, *Can apparent superluminal neutrino speeds be explained as a quantum weak measurement?*, J. Phys. A: Math. Theor. **44**(49), 492001–1–5 (2011).

[26] http://physicsworld.com/cws/article/news/2011/dec/16/physics-world-reveals-its-top-10-breakthroughs-for-2011.

[27] Y. Aharonov ja A. Botero, *Quantum averages of weak values*, Phys. Rev. A **72**(5), 052111–1–12 (2005).

[28] K. Gustafson ja D. Rao, *Numerical Range* (Springer-Verlag, 1997).

[29] Y. Aharonov, A. J. Leggett, A. Peres ja L. Vaidman, *Aharonov and Vaidman reply*, Phys. Rev. Lett. **62**(19), s.2325–2327 (1989).

[30] E. Hewitt ja K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis* (Springer, 1975).

[31] E. H. Kennard, *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, Zeitschrift für Physik **44**(4-5), s.326–352 (1927).

[32] H. P. Robertson, *The Uncertainty Principle*, Phys. Rev. **34**(1), (1929).

[33] M. Ozawa, *Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement*, Phys. Rev. A **67**(4), 042105–1–6 (2003).

[34] P. Busch, T. Heinonen ja P. Lahti, *Noise and disturbance in quantum measurement*, Phys. Lett. A **320**(4), s.261–270 (2004).

[35] P. Busch, P. Lahti ja R. Werner, *Proof of Heisenberg's error-disturbance relation*, arXiv:1306.1565 , (2013).