



Turun yliopisto  
University of Turku

# **KOPULAFUNKTIOIHIN JA EHDOLLISEEN VOLATILITEETTIIN PERUSTUVAN VALUE AT RISK -MITAN ENNUSTEKYKY**

**Value at Risk -mitan estimointimenetelmien vertailu 2005–2016**

Laskentatoimen ja rahoituksen pro gradu  
-tutkielma

Laatija:  
Arttu Kiviniemi

Ohjaajat:  
Prof. Mika Vaihekoski  
KTM Mika Hannula

30.10.2017  
Turku



Turun kauppakorkeakoulu • Turku School of Economics

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

The originality of this thesis has been checked in accordance with the University of Turku quality assurance system using the Turnitin OriginalityCheck service.

# SISÄLLYSLUETTELO

1	JOHDANTO .....	7
1.1	Johdatus aihepiiriin .....	7
1.2	Aikaisemmat tutkimukset.....	9
1.3	Tutkielman tavoitteet ja rajaukset .....	11
1.4	Tutkielman rakenne .....	14
2	VALUE AT RISK MARKKINARISKIN MITTARINA.....	15
2.1	Value at Risk -mitan määritelmä ja ominaisuudet .....	15
2.2	Value at Risk ja vakavaraisuussäätely .....	21
2.3	Estimointimenetelmistä.....	25
2.3.1	Parametriset menetelmät .....	26
2.3.2	Historiallinen simulointi .....	32
2.3.3	Monte Carlo -menetelmä .....	35
2.4	Toteumatestauksesta ja mallien ennustekyvyn vertailusta.....	37
3	KOPULAFUNKTIOT RIIPPUVUUSRAKENTEIDEN MALLINNUKSESSA .	41
3.1	Kopuloiden teoriasta ja riippuvuuden mittareista .....	41
3.1.1	Kopulafunktion määritelmä ja keskeiset ominaisuudet .....	41
3.1.2	Simuloinnista ja kopulafunktioiden estimoinnista.....	43
3.1.3	Riippuvuuden mittareista .....	46
3.2	Yleisimmät kopulaperheet ominaisuuksineen.....	50
3.2.1	Elliptiset kopulafunktiot.....	50
3.2.2	Arkhimedeen kopulafunktiot .....	53
3.3	Kopulafunktiot Value at Risk -mitan estimoinnissa .....	57
4	TUTKIMUSAINEISTO JA -MENETELMÄT .....	63
4.1	Tutkimusaineiston kuvaus.....	63
4.2	Reunajakaumien ja riippuvuusrakenteiden mallinnus.....	66
4.2.1	AR-GARCH-mallien estimointi ja mallin valinta .....	66
4.2.2	Kopulafunktioiden estimointi .....	71
4.3	Value at Risk -mitan estimointi ja mallien vertailu.....	76
4.3.1	Sovellettujen estimointimenetelmien kuvaus .....	76
4.3.2	VaR-mallien toteumatestaus ja mallien suhteellisen ennustekyvyn arviointi .....	79
5	TULOKSET.....	84
5.1	Mallien toteumatestaus ja ennustekyvyn vertailu koko tarkastelujaksolla ..	84

5.2	Mallien toteumatestaus ja ennustekyvyn vertailu osaperiodeittain.....	94
5.3	Estimointi-ikkunan pituuden vaikutus tuloksiin .....	105
5.4	Johtopäätökset ja jatkotutkimusehdotukset.....	110
6	YHTEENVETO.....	115
	LÄHTEET.....	117
	LIITTEET .....	123
Liite 1	AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien parametriestimaatit .....	123
Liite 2	Simulointi kopulafunktioista .....	124
Liite 3	Kuviaita 99 %:n VaR-malleista portfolioissa AM-EU .....	126
Liite 4	CPA-testien tulokset ensimmäisellä ja kolmannella osaperiodilla .....	127
Liite 5	VaR-mallien estimoinnissa ja arvioinnissa sovellettavan R-koodin olennaisimmat osat.....	130

## KUVIOLUETTELO

Kuvio 1	Simuloituja havaintopareja Gaussin kopulasta ja t-kopulasta sekä niihin perustuvista yhteisjakaumista.....	52
Kuvio 2	Simuloituja havaintopareja Claytonin ja Gumbelin kopulasta sekä niihin perustuvista yhteisjakaumista.....	56
Kuvio 3	Osakeindeksien logaritmiset päivätuotot ja absoluuttiset tuotot aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016 .....	64
Kuvio 4	Tuottoaikasarjoihin sovitettujen normaalijakaumaan perustuvien AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien standardoitujen jäännösten sirontakuviot .....	72
Kuvio 5	Elliptisiin kopulafunktioihin sekä Claytonin kopulaan perustuvien hyväksytyjen 99 %:n VaR-mallien tappiofunktioiden erotukset portfolioissa AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 .....	92
Kuvio 6	HS-, VC-, Gauss-n- ja Clayton-e-mallien mukaiset 99 %:n VaR-estimaatit portfoliolle AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 .....	126

## TAULUKKOLUETTELO

Taulukko 1	Tuottoaikasarjojen kuvailevat tunnusluvut.....	65
Taulukko 2	Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaineistoon sovitettujen AR-GARCH-mallien vertailu.....	69
Taulukko 3	Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottojen standardoitujen jäännösten kaksiulotteisiin aikasarjoihin sovitettujen kopulafunktioiden vertailu.....	74
Taulukko 4	95 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 .....	85
Taulukko 5	CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 hyväksytyille 95 %:n VaR-malleille .....	88
Taulukko 6	99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 .....	89

Taulukko 7	CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille .....	91
Taulukko 8	99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007 .....	95
Taulukko 9	99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011 .....	98
Taulukko 10	CPA-testien tulokset ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille .....	99
Taulukko 11	99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016 .....	101
Taulukko 12	500 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005– 30.12.2016 .....	107
Taulukko 13	500 ja 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien ennustekykyä vertailevien CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 .....	108
Taulukko 14	Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaikasarjoihin sovitettujen AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien parametriestimaatit ja p-arvot.....	123
Taulukko 15	CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille .....	127
Taulukko 16	CPA-testien tulokset ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille .....	128

# 1 JOHDANTO

## 1.1 Johdatus aihepiiriin

Value at Risk (VaR) on yksi tunnetuimmista ja yleisimmistä markkinariskin mittareista, jota voidaan soveltaa esimerkiksi riskiraportoinnissa, riskienhallinnassa, riskiperusteisessa suorituskykymittauksessa sekä investointipäätöksenteossa. VaR on portfolion estimoidun tai oletetun tappiojakauman kvantiilimitta, joka ilmaisee portfolion suurimman odotetun tappion tietyllä aikavälillä ja annetulla varmuustasolla (Jorion 2001, 22). VaR-mitalla on keskeinen merkitys myös Baselin pankkivalvontakomitean suosituksiin perustuvassa vakavaraisuussäätelyssä, sillä markkinariskin sisäisiä malleja soveltavien pankkien markkinariskin pääomavaatimus pohjautuu VaR-mittaan. Pääomavaatimuksen suuruus perustuu sekä VaR-estimaattien tasoon että sovelletun VaR-mallin ennustekykyyneen (Basel Committee on Banking Supervision 2011, 15). Koska epätarkat estimaatit kasvattavat pääomavaatimusta ja rajoittavat näin ollen esimerkiksi pankkien lainanantomahdollisuuksia, pankeilla on kannustin kehittää riskienhallintajärjestelmiään ja soveltaa menetelmiä, joiden avulla VaR-mitta voidaan estimoida mahdollisimman tarkasti. Rahoitusjärjestelmän vakauden kannalta on toisaalta olennaista, että rahoituslaitokset arvioivat riskejään mahdollisimman tarkasti ja varautuvat epäsuotuisaan markkinakehitykseen riittävän suurilla pääomapuskureilla. Näin ollen on perusteltua tutkia, millaisilla menetelmillä portfolion VaR-mitta voidaan estimoida mahdollisimman tarkasti.

VaR-mitan yleisimpien estimointimenetelmien, kuten historiallisen simuloinnin ja varianssi-kovarianssimenetelmän, soveltamiseen liittyy useita ongelmakohtia, joista merkittävimmät liittyvät portfoliotuottojen tai portfoliotuottoja ajavien riskifaktorituottojen jakaumaoletuksiin. Historiallisessa simuloinnissa portfoliotuottojen oletetaan olevan riippumattomia ja samoin jakautuneita (independent and identically distributed, IID), kun taas varianssi-kovarianssimenetelmä perustuu tyypillisesti riskifaktorituottojen multinormaalisuusoletukseen. (McNeil, Frey & Embrechts 2015, 340–343.) Multinormaalisuusoletuksen seurauksena myös riskifaktorituottojen yksiulotteisten todennäköisyysjakaumien oletetaan olevan normaaleja. Mikäli riskifaktorituottojen yhteisjakauma on normaali, voidaan niiden riippuvuus rakenne määrittää yksiselitteisesti faktorituottojen korrelaatiomatriisin avulla. Lineaarinen korrelaatio soveltuu kuitenkin muuttujien välisen riippuvuuden kuvaamiseen vain, jos muuttujien yhteisjakauma on elliptinen, kuten multinormaali. (Embrechts, McNeil & Straumann 2002.)

Useissa empiirisissä tutkimuksissa havaitut ilmiöt, kuten tuottoaikasarjojen paksuhäntäisyys sekä volatilitiitin ajallinen vaihtelevuus ja klusteroituminen, kuitenkin kyseenalaistavat yksiulotteisten tuottoaikasarjojen riippumattomuus- ja normaalisuusoletukset

(ks. esim. Mandelbrot 1963; Fama 1965). Tutkimuksissa on myös havaittu, että tuottojakaumien häntien ääritapahtumat eivät ole keskenään riippumattomia. Esimerkiksi Longinin ja Solnikin (2001) sekä Angin ja Chenin (2002) tutkimusten mukaan erityisesti poikkeuksellisen suurten negatiivisten tuottojen välillä vallitsee positiivinen riippuvuussuhde. Käytännössä tämä ilmenee useiden eri varallisuuskohteiden arvojen voimakkaana samanaikaisena laskuna esimerkiksi markkinakriisien aikana. Multinormaalijakauma ja lineaarinen korrelaatio eivät kuitenkaan pysty kuvaamaan äärimmäisten tuottohavaintojen asymptoottista riippuvuutta ja epäsymmetrisiä riippuvuusrakenteita, minkä vuoksi multinormaalisuuden nojaavat VaR-mallit saattavat aliarvioida portfolion riskejä huomattavasti (Embrechts ym. 2002; Ané & Kharoubi 2003). Tappioilta suojaavien pääomapuskurien määrittäminen liian alhaisten VaR-estimaattien avulla voi puolestaan johtaa koko rahoitusjärjestelmän laajuisiin vakaviin ongelmiin, mikäli huomioimatta jääneet riskit realisoiduvat.

Yksittäisten riskifaktorien empiirisiä ominaisuuksia ja riskifaktorien riippuvuusrakenteita kuvaavan yhteisjakauman määrittäminen on usein kuitenkin erittäin haasteellista. Erityisesti riskifaktorien suuri lukumäärä sekä heterogeeniset reunajakaumat lisäävät mallinnuksen haastavuutta (McNeil ym. 2015, 266). Mallinnusongelmaa voidaan kuitenkin helpottaa huomattavasti soveltamalla kopulafunktioita, jotka ovat muuttujien välisen riippuvuusrakenteen kuvauksia.

Yksi kopulafunktioiden teorian keskeisimmistä tuloksista on Sklarin (1959) lause, jonka mukaan tarkasteltavien muuttujien yhteisjakauma voidaan esittää muuttujien yksiulotteisten reunajakaumien ja muuttujien välistä riippuvuusrakennetta kuvaavan kopulafunktion yhdistelmänä. Tätä ominaisuutta voidaan soveltaa myös muuttujien yhteisjakauman estimoinnissa, sillä yhteisjakauman estimointiongelma voidaan jakaa reunajakaumien ja riippuvuusrakennetta kuvaavan kopulafunktion estimointiin (Cherubini, Luciano & Vecchiato 2004, 153). Vaikka kopulafunktioiden keskeinen teoriapohja luotiin jo 1950-luvulla, kopulafunktioiden soveltaminen yleistyi vasta 2000-luvulla. Kopulafunktioita käsittelevien tutkimusten yleistyminen on ollut erityisen voimakasta rahoituksen tieteenalalla. Genestin, Gendronin ja Bourdeau-Brienin (2009) vuonna 2006 toteuttaman tutkimuksen mukaan rahoituksen tieteenalan julkaisut kattoivat peräti 41 % kopulafunktioita sivuavasta kirjallisuudesta.

Taloudellisten aikasarjojen multinormaalisuudesta poikkeavien empiiristen ominaisuuksien ja kopulafunktioihin perustuvan mallinnuksen joustavuuden vuoksi kopulafunktioita voidaan hyödyntää erityisesti riskienhallinnassa ja riskimittojen, kuten VaR-mitan, estimoinnissa (Patton 2012). Kopulafunktioihin perustuvaa lähestymistapaa soveltamalla riskifaktorituottojen yksiulotteisiin aikasarjoihin voidaan sovittaa malleja, jotka kuvaavat yksittäisten riskifaktorien empiirisiä ominaisuuksia mahdollisimman hyvin. Riskifakto-



rien välisiä riippuvuussuhteita voidaan sen sijaan mallintaa sovittamalla aineistoon kopulafunktioita, joiden avulla voidaan kuvata esimerkiksi riskifaktorituottojen asymptoottista riippuvuutta. (Cherubini ym. 2004, 69–70.)

Vaikka tuottoaikasarjojen empiiriset ominaisuudet puoltavat kehittyneempien menetelmien, kuten ehdollisen volatilitietin ja kopulamallien, soveltamista VaR-mitan estimoinnissa, on kuitenkin syytä huomioida, että VaR-mitan perinteisten estimointimenetelmien soveltaminen ja kalibrointi on huomattavasti yksinkertaisempaa ja vaivattomampaa. Estimoinnin yksinkertaisuus onkin yksi keskeisimmistä syistä siihen, että historiallinen simulointi on selvästi käytetyin VaR-mitan estimointimenetelmä pankeissa (Perignon & Smith 2010). Jotta monimutkaisempien mallien soveltaminen olisi perusteltua, tulee mallien tuottaa systemaattisesti ja markkinatilanteesta riippumatta yksinkertaisia menetelmiä tarkempia VaR-estimaatteja.

## 1.2 Aikaisemmat tutkimukset

VaR-mitan eri estimointimenetelmiä vertailevien tutkimusten perusteella estimointimenetelmien ennustekyky riippuu merkittävästi tarkastelujaksosta. Useiden tutkimusten mukaan VaR-mallien ennustekyky heikkenee selvästi esimerkiksi markkinakriisien aikana, jolloin sijoituskohteiden arvot vaihtelevat voimakkaasti (Bao, Lee & Saltoğlu 2006; Halbleib & Pohlmeier 2012; Abad & Benito 2013). Kuesterin, Mitnikin ja Paoellan (2006) sekä Angelidisin, Benosin ja Degiannakisin (2007) mukaan ehdollistamattomat menetelmät, kuten normaalijakaumaan perustuva varianssi-kovarianssimenetelmä ja historiallinen simulointi, toimivat erittäin heikosti VaR-mitan estimoinnissa. VaR-mallien ennustekykyä voidaan parantaa huomattavasti soveltamalla Bollerslevin (1986) kehittämää GARCH-mallia (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) tai sen laajennuksia tuottoaikasarjojen ehdollisen volatilitietin mallinnukseen.

Parametristen GARCH-mallien ennustekyky riippuu kuitenkin huomattavasti sekä sovelletun GARCH-mallin tyypistä että mallin perustana olevan innovaatioprosessin jakaumaoletuksesta. Normaalijakaumaan perustuvat GARCH-mallit toimivat lähes poikkeuksetta heikommin kuin paksuhäntäisiin jakaumiin, kuten t-jakaumaan, perustuvat mallit (ks. esim. Alexander & Sheedy 2008). Paksuhäntäisten innovaatiojakaumien soveltaminen parantaa mallien ennustekykyä erityisesti turbulenteilla tarkastelujaksoilla. (Chen, Gerlach, Lin & Lee 2012; Halbleib & Pohlmeier 2012.) Giotin ja Laurentin (2004), Huangin ja Linin (2004) sekä Chenin ym. (2012) mukaan VaR-mallien ennustekykyä voidaan toisaalta parantaa myös soveltamalla asymmetristä GARCH-mallia, jossa positiiviset ja negatiiviset tuottosokit vaikuttavat ehdolliseen volatilitiettiin eri tavoin. Abadin ja Beniton (2013) mukaan asymmetrinen GARCH-malli parantaa VaR-estimaattien tarkkuutta etenkin, kun markkinoiden volatilitietti on korkea.

Tuottoaikasarjan tai innovaatioprosessin jakaumaoletuksiin perustuvien parametrusten mallien lisäksi VaR-mitta voidaan estimoida soveltamalla Barone-Adesin, Giannopoulou-sin ja Vosperin (1999) kehittämää ehdollista historiallista simulointia, jossa portfoliotuottojen volatilitiitin ajallinen vaihtelu huomioidaan GARCH-mallin avulla. Kuesterin ym. (2006), Angelidisin ym. (2007) ja Alexanderin ja Sheedyn (2008) mukaan ehdollisen historiallisen simuloinnin avulla voidaan tuottaa erittäin tarkkoja VaR-estimaatteja markkinatilanteesta riippumatta. Ehdollisen volatilitiitin mallintaminen parantaa tavanomaisen historiallisen simuloinnin ennustekykä erityisesti turbulenteilla ajanjaksoilla (Bao ym. 2006; Halbleib & Pohlmeier 2012).

Portfoliotuottojen yksiulotteiseen aikasarjaan perustuvien VaR-mallien estimointi on huomattavasti yksinkertaisempaa ja laskennallisesti vaivattomampaa kuin riskifaktoriin moniulotteiseen mallinnukseen pohjautuvien menetelmien estimointi. Moniulotteisen lähestymistavan soveltaminen on kuitenkin perusteltua, sillä portfoliotuottoihin vaikuttavien riskifaktoriin riippuvuussuhteiden analysointi on keskeistä riskienhallinnan ja pääomien hajautuksen kannalta (Alexander 2008b, 26). Kopulafunktiot tarjoavat joustavan ja luontevan lähestymistavan riskifaktoriin riippuvuussuhteiden mallinnukseen ja portfolion VaR-mitan estimointiin. Koska kopulafunktioiden hyödyntäminen rahoitussovelluksissa yleistyi vasta 2000-luvulla, kopulafunktioihin perustuvia VaR-malleja ei ole tutkittu yhtä laajamittaisesti kuin tavanomaisempia menetelmiä.

Aikaisempien tutkimusten mukaan kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien ennustekyky on ollut varsin hyvä. Lain (2008), Huangin, Leen ja Linin (2009), Alouin, Aïssan ja Nguyenin (2011) sekä Braunin ja Hackethalin (2013) mukaan erityisesti asymmetrisen GARCH-malliin ja kopulafunktioihin pohjautuva estimointimenetelmä soveltuu hyvin osakeindekseistä muodostettujen portfolioiden VaR-mitan estimointiin. Kopulafunktioihin perustuvien mallien ennustekyky on Huangin ym. (2009), Skoglundin, Erdmanin ja Chenin (2010), Alouin ym. (2011) sekä Weißin (2011) tutkimusten valossa ollut myös huomattavasti varianssi-kovarianssimenetelmää ja historiallista simulointia parempi.

VaR-mitan estimointiin parhaiten soveltuvan kopulafunktion tyyppiin liittyvät tutkimustulokset ovat sen sijaan hyvin vaihtelevia. Junkerin ja Mayn (2005) mukaan paksuhäntäisiin reunajakaumiin sekä asymptoottisia riippuvuusrakenteita mallintaviin kopulafunktioihin pohjautuvat mallit johtavat tarkimpiin VaR-estimaatteihin. Anén ja Kharrubin (2003) sekä Lain (2008) mukaan riskifaktoriin asymptoottista ja epäsymmetristä riippuvuutta mallintavat Arkhimedein kopulafunktiot soveltuvat parhaiten VaR-mitan estimointiin, kun taas Huangin ym. (2009) sekä Braunin ja Hackethalin (2013) mukaan elliptiseen t-kopulaan perustuvat VaR-mallit tuottavat tarkimpia VaR-estimaatteja. Fantazzinin (2008; 2009a) mukaan taas reunajakaumien mallinnuksen vaikutus VaR-mallien ennustekykyyneen on huomattavasti kopulafunktion valintaa merkittävämpi. Mikäli reunajakaumat on oikein spesifioitu, riskifaktoriin lineaariseen korrelaatioon perustuva Gaussin kopula soveltuu VaR-mitan estimointiin varsin hyvin.

Vertailevien tutkimusten pääpainona on varsin usein ollut erilaisiin kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien keskinäinen vertailu. Kopulamallien vertailu riskimitan tavanomaisempiin estimointimenetelmiin on ollut melko vähäistä ja usein vertailukohtana on käytetty kaikista yksinkertaisimpia menetelmiä, kuten ehdollistamatonta varianssi-kovarianssimenetelmää ja historiallista simulointia, joiden epätarkkuus on todennettu useissa tutkimuksissa. Kopulamallien ennustekykyä ei ole juurikaan verrattu esimerkiksi GARCH-malliin pohjautuvaan ehdolliseen historialliseen simulointiin, joka verrattaisesta yksinkertaisuudestaan huolimatta on tuottanut tarkkoja VaR-estimaatteja etenkin turbulenteilla ajanjaksoilla. Useimmissa tutkimuksissa kopulamallien ja vaihtoehtoisten VaR-mallien toimivuutta ei myöskään ole vertailtu eri ajanjaksoilla. Lisäksi aikaisempien tutkimusten tarkastelujakso ei juuri ulotu vuotta 2009 pidemmälle. Koska VaR-mallien käyttökelpoisuus edellyttää, että VaR-estimaatit ovat tarkkoja ajankohdasta riippumatta, on perusteltua tutkia, vaihteleeko VaR-mallien ennustekyky merkittävästi eri ajanjaksoilla ja miten mallit ovat toimineet globaalien finanssikriisin aikana sekä sen jälkeisinä vuosina.

Useimmissa tutkimuksissa VaR-mallien ennustekyvyn arviointimenetelminä käytetään absoluuttisen ennustekyvyn mittareita, jotka perustuvat useimmiten estimoidun VaR-mitan ylittävien tappioiden lukumäärään ja esiintymistiheyteen. Ylitysten lukumäärään ja ylitysten muodostaman aikasarjan ominaisuuksiin perustuvien arviointikriteerien avulla voidaan selvittää, mitkä mallit toimivat riittävän hyvin. Absoluuttisen ennustekyvyn mittarit eivät kuitenkaan sovellu eri mallien vertailuun, minkä vuoksi mallien vertailussa tulisi soveltaa suhteellisen ennustekyvyn mittareita ja testejä. (Giacomini & Komunjer 2005.) Ylitysten lukumäärän lisäksi valvontaviranomaiset ja VaR-malleja soveltavat pankit ovat luonnollisesti kiinnostuneita VaR-mitan ylittävien tappioiden suuruudesta, jota ylitysten lukumäärään perustuvat testit eivät kuitenkaan huomioi. Näin ollen VaR-mallien vertailussa tulisi myös soveltaa mittareita, jotka huomioivat ylitysten suuruuden. (Lopez 1998.)

### 1.3 Tutkielman tavoitteet ja rajaukset

Tutkielman tarkoituksena on vertailla eri estimointimenetelmiin perustuvien VaR-mallien ennustekykyä sekä tutkia, voidaanko kopulafunktioihin ja ehdollisen volatiliiteetin malleihin perustuvalla estimointimenetelmällä tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja tarkasteluajankohdasta riippumatta. Kopulamallien ennustekykyä verrataan VaR-mitan tavanomaisempiin estimointimenetelmiin, sillä monimutkaisten ja laskennallisesti raskaiden mallien soveltaminen on perusteltua vain, mikäli niiden avulla voidaan merkittävästi parantaa yksinkertaisempien mallien ennustekykyä. Kopulamallien käytännön sovelletavuuden kannalta on myös olennaista tutkia, minkälaiset kopulafunktiot soveltuvat VaR-

mitan estimointiin parhaiten. Tutkielmassa tarkastellaan yleisimpiä rahoitussovelluksissa käytettyjä ehdollistamattomia kopulafunktioita. Ehdolliset kopulafunktiot, joissa esimerkiksi kopulafunktion tyyppi tai mallin parametrit muuttuvat ajassa, on rajattu tarkastelun ulkopuolelle.

Tutkielmassa tarkastellaan sekä ehdollistamattomia että ehdollisia VaR-malleja, jotka estimoidaan soveltamalla liukuvaa estimointi-ikkunaa. Ehdollistamattomat VaR-mallit perustuvat varianssi-kovarianssimenetelmään sekä historialliseen simulointiin. Ehdollistamattomien mallien taustaoletuksena on, että riskifaktorituotot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Ehdollisissa malleissa riskifaktorituottojen aikasarjoihin sovitetaan AR-malleja, jotka estimoivat riskifaktorituottojen ehdollista odotusarvoa sekä GARCH-malleja, joiden avulla voidaan mallintaa riskifaktorituottojen ehdollista volatilitteettia. Ehdollisiin VaR-malleihin pohjautuvat VaR-estimaatit estimoidaan hyödyntämällä historiallista simulointia ja kopulafunktioihin perustuvaa Monte Carlo -menetelmää, jossa estimoitujen AR-GARCH-mallien ja kopulafunktioiden avulla muodostetaan portfoliotuottojen simuloitu todennäköisyysjakauma, jonka perusteella portfolion VaR-mitta voidaan määrittää. Kopulamallien reunajakaumaspesifikaatioina käytetään normaali- ja t-jakaumaa sekä innovaatiotermien empiirisiä jakaumia.

Tutkimusaineistona käytetään MSCI AC Americas-, MSCI AC Europe- ja MSCI AC Asia Pacific -kokonaistuottoindekseistä laskettuja logaritmisia päivätuottoja vuosina 2001–2016. Maailman merkittävimpien talousalueiden osaketuottoja edustavista osakeindekseistä muodostetaan kolme kahden indeksin portfoliota, joille lasketaan yhden päivän VaR-estimaatit luottamustasoilla 95 % ja 99 %. Tutkielmassa oletetaan, että portfolioiden sisältämät osakeindeksit ovat ainoita portfolion tuottoihin vaikuttavia riskitekijöitä. Käytännössä portfolion tuottoihin vaikuttavien riskitekijöiden määrä on useimmiten huomattavasti suurempi kuin kaksi. Mallinnusongelman rajaaminen kaksiulotteiseksi on kuitenkin perusteltua tutkimustulosten vertailukelpoisuuden vuoksi, sillä aikaisemmissa tutkimuksissa tarkastellaan pääasiassa kaksiulotteisia portfoliota. Portfolioiden toteutuneita tuottoja laskettaessa indeksien portfoliopainot oletetaan myös useiden aikaisempien tutkimusten mukaisesti yhtä suuriksi.

VaR-mallien ennustekykyä arvioidaan vertailemalla eri estimointimenetelmiin perustuvia yhden päivän VaR-estimaatteja tarkasteltavien portfolioiden toteutuneisiin tappioihin. VaR-mallien suorituskkyä arvioidaan sekä aikavälillä 2005–2016 että kolmen osaperiodin aikana vuosina 2005–2007, 2008–2011 ja 2012–2016. Osaperioditarkastelun avulla voidaan arvioida, kuinka merkittävä vaikutus VaR-mallien estimoinnissa käytettävällä aineistolla ja ennustejaksolla on VaR-mallien ennustekykyn. Useissa aikaisemmissa kopulamallien ennustekkyä arvioivissa tutkimuksissa tarkastelujakso ei sisällä lainkaan globaalia finanssikriisiä. Useimmissa tutkimuksissa, joiden aineisto sisältää myös finanssikriisin, tarkastelujakso ei puolestaan ulotu vuotta 2009 pidemmälle. Näin ollen VaR-mallien ennustekyvyn arviointi etenkin toisella ja kolmannella osaperiodilla

antaa mielenkiintoista lisätietoa siitä, miten eri VaR-mallit suoriutuvat merkittävän kriisiperiodin aikana ja sen jälkeisinä vuosina. Mallien suorituskykyä erityisesti toisella osaperiodilla voidaan pitää varsin olennaisena mittarina mallien käytännön sovellettavuuden kannalta, sillä toisella osaperiodilla kaikilla tarkasteltavilla markkinoilla esiintyy useita voimakkaita ja samanaikaisia kurssilaskuja, jotka ovat juuri niitä riskejä, joihin VaR-mallien tapaisilla riskienhallintamalleilla pyritään varautumaan.

VaR-mallien hyväksymiskriteereinä käytetään Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) tilastollisia testejä, jotka perustuvat VaR-mitan ylittävien tappioiden lukumäärään sekä ylitysten muodostaman aikasarjan ominaisuuksiin. Hyväksyttävästi suoriutuneiden mallien ennustekykyä vertaillaan Giacominin ja Whiten (2006) ehdollisen ennustekyvyn testillä (Conditional Predictive Ability, CPA), joka perustuu VaR-mitan ylitysten suuruuden huomioivaan asymmetriseen tappiofunktioon. Aikaisempien tutkimustulosten perusteella hypoteesina on, että ehdolliset ja paksuhäntäisiin jakaumiin perustuvat estimointimenetelmät tuottavat tarkempia VaR-estimaatteja kuin ehdollistamattomat ja normaalijakaumaan pohjautuvat menetelmät. Osaketuottojen riippuvuussuhteiden empiiristen ominaisuuksien vuoksi hypoteesina on myös, että riskifaktorien asymptoottista riippuvuutta mallintavat kopulafunktiot soveltuvat VaR-mitan estimointiin paremmin kuin multinormaalijakauman mukaiseen riippuvuusrakenteeseen perustuvat mallit.

VaR-mallien estimoinnissa käytettävän estimointiaineiston koko on yksi keskeisistä mallien käytännön sovellettavuuteen vaikuttavista tekijöistä. Erityisesti monimutkaisiin parametrisiin malleihin perustuvat estimointimenetelmät edellyttävät usein riittävän suuren estimointiaineiston soveltamista, sillä liian lyhyiden estimointi-ikkunoiden soveltaminen voi vääristää parametrusten mallien parametriestimaatteja ja johtaa siten epätarkkoihin VaR-estimaatteihin (Fantazzini 2009b). Toisaalta pitkät estimointi-ikkunat saattavat asettaa haasteita mallien käytännön sovellettavuudelle, mikäli portfoliotuottoja ajavista riskifaktorituotoista ei ole saatavilla riittävän kattavia aikasarjoja. Aikaisemmissa kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien ennustekykyä arvioivissa tutkimuksissa ei kuitenkaan ole juuri tutkittu, miten estimointi-ikkunan pituus vaikuttaa VaR-mallien suorituskykyyn. Näin ollen on perusteltua tutkia, miten VaR-mallien liukuvassa estimoinnissa sovellettavan estimointi-ikkunan pituus vaikuttaa VaR-mallien ennustekykyyn ja voidaanko myös lyhyempään estimointi-ikkunaan perustuvilla menetelmillä tuottaa tarkkoja VaR-estimaatteja. Tutkielmassa sovelletaan lähtökohtaisesti 1000 havainnon estimointi-ikkunaa, mutta VaR-mallien ennustekykyä arvioidaan ja vertaillaan myös 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuen.

## 1.4 Tutkielman rakenne

Luvussa 2 tarkastellaan VaR-mitan keskeisiä ominaisuuksia sekä VaR-mitan ja pankkien vakavaraisuussäätelyn välistä yhteyttä. Luvussa tarkastellaan ja vertaillaan myös VaR-mitan eri estimointimenetelmiä sekä esitellään VaR-mallien toteumatestauksen pääpiirteet. Luvussa 3 esitellään kopulafunktioiden teorian keskeisimmät määritelmät sekä lauseet. Luvussa tarkastellaan myös erilaisia riippuvuuden mittareita sekä käsitellään tutkielman empiirisessä osiossa sovellettavien kopulafunktioiden keskeisiä ominaisuuksia. Lisäksi luvussa tarkastellaan, miten kopulafunktioita voidaan soveltaa VaR-mitan estimoinnissa ja miten kopulafunktioihin perustuvat VaR-mallit ovat suoriutuneet aikaisempien tutkimusten perusteella.

Luvussa 4 esitellään tutkimusaineisto, reunajakaumien mallinnuksessa sovellettavat mallit sekä riippuvuusrakenteen mallinnuksessa käytettävät kopulafunktiot ja niiden estimoinnissa sovellettavien menetelmien pääpiirteet. Lisäksi luvussa kuvataan VaR-mittojen estimoinnissa sovellettavat menetelmät sekä mallien toteumatestauksessa ja suhteellisen ennustekyvyn arvioinnissa käytettävät tilastolliset testit ja mittarit.

VaR-mallien toteumatestauksen ja vertailun tulokset esitellään luvussa 5. Luvussa 5.1 tarkastellaan tuloksia koko tarkastelujaksolla, kun taas luvussa 5.2 esitellään osaperioditarkastelun tulokset. Luvussa 5.3 tarkastellaan puolestaan liukuvassa estimoinnissa sovellettavan estimointi-ikkunan pituuden vaikutusta tuloksiin. Tutkimustulosten perusteella tehdyt johtopäätökset sekä jatkotutkimusehdotukset esitellään luvussa 5.4. Luku 6 kokoaa tutkielman keskeiset havainnot yhteen.

## 2 VALUE AT RISK MARKKINARISKIN MITTARINA

### 2.1 Value at Risk -mitan määritelmä ja ominaisuudet

Markowitzin (1952) portfolioteoriaa voidaan pitää modernien riskienhallintamenetelmien kehityksen ensiaskeleena. Arvopaperimarkkinoiden lisääntynyt volatilitteetti, tietotekniikan kehitys sekä sijoitusinstrumenttien tarjonnan monipuolistuminen ja kaupan käyntivolyymien voimakas kasvu ovat myös osaltaan vauhdittaneet riskienhallintajärjestelmien kehitystä 1970-luvulta lähtien ja korostaneet etenkin markkinariskien merkitystä yritysten riskienhallinnassa. Markkinariskillä viitataan portfolion tai position arvoihin vaikuttavien markkinahintojen muutoksista aiheutuvaan riskiin. Muita keskeisiä taloudellisia riskejä ovat luottoriski, operatiivinen riski ja likviditeettiriski.

Luottoriskillä tarkoitetaan mahdollisuutta, että sopimuksen vastapuoli ei suoriudu sopimuksen mukaisista maksuvelvoitteistaan, kuten esimerkiksi velkakirjainstrumentin kuponkimaksuista ja lainan nimellisarvon takaisinmaksusta. Operatiivinen riski viittaa esimerkiksi yritysten sisäisistä prosesseista, työntekijöistä, tietojärjestelmistä tai ulkoisista tapahtumista aiheutuvien tappioiden riskiin. Kun sijoituskohdetta ei pystytä ostamaan tai myymään riittävän nopeasti sijoituskohteen käypää arvoa vastaavalla hinnalla, puhutaan likviditeettiriskistä. Pankkitoiminnassa likviditeettiriskillä voidaan myös viitata tilanteeseen, jolloin pankki ei kykene hankkimaan riittävästi rahoitusta velvoitteidensa, kuten talletusmaksujen, täyttämiseksi.

Riskienhallinnan kannalta on luonnollisesti välttämätöntä, että riskejä voidaan mitata luotettavasti ja tarkasti. Riskimitta voidaan määritellä kuvaukseksi, joka tiivistää portfolion tuleviin arvoihin liittyvän epävarmuuden yhteen reaalityökaluun (Artzner, Delbaen, Eber & Heath 1999). Portfolioteoriassakin sovellettua varianssia tai keskihajontaa voidaan pitää rahoitussovelluksissa käytetyistä riskimitoista yleisimpänä. Koska varianssi käsittelee positiivisia ja negatiivisia keskiarvopoikkeamia samalla tavalla, se soveltuu riskimitaksi vain symmetristen todennäköisyysjakaumien tapauksessa (McNeil ym. 2015, 69). Varianssi huomioi ainoastaan arvonmuutosten suuruuden eikä näin ollen tee eroa tappioiden ja tuottojen välillä. Riskejä voidaan myös mitata soveltamalla esimerkiksi herkkyysmittoja, jotka mittaavat, kuinka paljon portfolion arvo muuttuu portfoliotuottoja ajavien riskifaktoriin muuttuessa. Herkkyysmitat, kuten osakeportfolion beeta, velkakirjaportfolion duraatio sekä optioportfolion ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat, soveltuvat kuitenkin vain tietyntyyppisten riskien mittaamiseen eivätkä ne mahdollista esimerkiksi eri varallisuuslajien riskien aggregointia (Alexander 2008b, 5).

1990-luvun merkittävät markkinariskeihin ja erityisesti johdannaisiin liittyvät tappiot osoittivat perinteisten markkinariskin hallintamenetelmien puutteellisuuden. Vuonna

1994 J.P. Morgan julkaisi markkinariskin mittaamisessa soveltamansa RiskMetrics-mallin, jossa Value at Risk -mittaa (VaR) sovellettiin markkinariskin mittarina. Malliin sisältyi tekninen dokumentti, jossa kuvattiin VaR-mitan estimoinnissa sovellettavat menetelmät sekä ohjelmisto, joka mahdollisti teknisessä dokumentissa kuvattuun metodologiaan perustuvan VaR-mitan laskentajärjestelmän käyttöönoton ilmaiseksi (J.P. Morgan 1996). RiskMetrics-mallin julkaisun myötä VaR-mitan tunnettuus kasvoi merkittävästi ja riskimittaa alettiin soveltaa markkinariskin ensisijaisena mittarina useissa rahoituslaitoksissa (Dowd 2002, 9). VaR-mallien yleistymistä vauhditti voimakkaasti myös vuonna 1996 julkaistu pankkien Basel-vakavaraisuussäännösten uudistus, joka mahdollisti markkinariskin pääomavaatimuksen laskennan VaR-mallin avulla (Basel Committee on Banking Supervision 1996).

Toisin kuin varianssi tai keskihajonta, VaR-mitta kuvaa ainoastaan sijoituskohteen negatiivisia riskejä. VaR ilmaisee portfolion suurimman potentiaalisen tappion tietyllä todennäköisyydellä ja ajanjaksolla, jonka aikana portfolion riskiprofiilin oletetaan pysyvän muuttumattomana. (Jorion 2001, 107–108.) VaR-mittaa voidaan soveltaa erityyppisten vastuiden riskien arviointiin ja vertailuun kaikilla organisaatiotasoilla. Koska VaR-mitta huomioi portfoliotuottoihin vaikuttavien riskifaktorien yhteisvaihtelun, mitan avulla voidaan estimoida esimerkiksi eri varallisuuslajien tai organisaatioyksiköiden aggregoitua riskiä. Markkinariskin lisäksi VaR-mallien avulla voidaan mitata myös muita riskilajeja, kuten luottoriskiä ja operatiivista riskiä, sekä eri riskilajien yhteisvaikutuksia. (Dowd 2002, 9–10; Alexander 2008b, 6.)

VaR-mittaa on perinteisesti sovellettu sekä organisaation sisäisessä että ulkoisessa riskiraportoinnissa. Passiivisten sovelluskohteiden lisäksi VaR-malleja voidaan soveltaa riskinoton rajoittamiseen ja seurantaan eri organisaatiotasoilla. Positioiden nimellisarvojen sijaan eri yksiköiden arvopaperikaupankäynnin rajoina voidaan käyttää VaR-mittaa. Toisin kuin nimellisarvot, VaR-luvut huomioivat erot positioiden riskillisyydessä sekä tekevät eri yksiköiden riskirajoista vertailukelpoisia. VaR-mittaa voidaan myös hyödyntää organisaation sisäisten, tappioilta suojaavien pääomapuskurien määrittämisessä sekä riskisopeutettujen suorituskykymittareiden nimittäjänä. (Jorion 2001, 362, 379; Alexander 2008b, 424–425.)

Kuten VaR-mitan sanallisesta määritelmästä ilmenee, portfolion VaR-mitan laskeminen edellyttää portfolion tappiojakauman spesifiointia. Portfolion tappiojakauman kertymäfunktio  $F_L$  voidaan määritellä seuraavasti

$$F_L(l) = P(L \leq l), \quad (2.1)$$



missä  $l \in \mathbb{R}^1$ . Portfolion VaR-mitta aikavälillä  $\Delta t$  ja luottamustasolla  $\alpha \in (0, 1)$  on pienin luku  $l$ , jota suuremman tappion todennäköisyys aikavälillä  $\Delta t$  on korkeintaan  $1 - \alpha$ . Todennäköisyyden komplementtisäännön nojalla portfolion VaR-mitta voidaan näin ollen ilmaista tappiojakauman  $F_L$  avulla seuraavasti

$$\text{VaR}_\alpha = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (2.2)$$

VaR luottamustasolla  $\alpha$  on näin ollen portfolion tappiojakauman kvantiilimitta

$$\text{VaR}_\alpha = q_\alpha(F_L) := F_L^{\leftarrow}(\alpha), \quad (2.3)$$

missä  $F_L^{\leftarrow}$  on portfolion tappiojakauman yleistetty käänteisfunktio. Mikäli portfolion tappiojakauma on jatkuva,  $q_\alpha(F_L) = F_L^{-1}(\alpha)$ , missä  $F_L^{-1}$  on tappiojakauman tavanomainen käänteisfunktio. (McNeil ym. 2015, 64–65.)

Portfolion tappiojakauma voidaan määrittää suoraan portfolion arvonmuutosten yksiulotteisen aikasarjan avulla. Mallinrusongelma voidaan vaihtoehtoisesti laajentaa moniulotteiseksi tarkastelemalla portfolion arvoprosessiin vaikuttavia riskifaktoreita ja niiden muutoksia. Olkoon  $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, joka kuvaa ajanhetkellä  $t$  havaitun riskifaktorien vektorin  $\mathbf{z}_t = (z_{t,1}, \dots, z_{t,d})'$  portfolion arvoksi  $V_t$ . Portfolion arvolle  $V_t$  on siis voimassa

$$V_t = f(t, \mathbf{z}_t). \quad (2.4)$$

Määrittelemällä portfolion yhden periodin tappio  $L_{t+1} := -(V_{t+1} - V_t)$  ja riskifaktorien muutos  $\mathbf{X}_{t+1} := \mathbf{Z}_{t+1} - \mathbf{z}_t$  portfolion tappio voidaan esittää riskifaktorimuutosten funktiona muodossa

$$L_{t+1} = l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1}) := -(f(t+1, \mathbf{z}_t + \mathbf{X}_{t+1}) - f(t, \mathbf{z}_t)), \quad (2.5)$$

missä  $l_{[t]}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  on ajanhetken  $t$  tappio-operaattori, joka kuvaa riskifaktorimuutokset portfolion tappioksi. (McNeil ym. 2015, 48, 327.)

Kaavojen (2.2) ja (2.5) esitysten perusteella on selvää, että VaR-mitan estimointi kuluu satunnaismuuttujan  $L_{t+1}$  yksiulotteisen todennäköisyysjakauman estimointiin, joka edellyttää puolestaan riskifaktorimuutosten  $\mathbf{X}_{t+1}$  yhteisjakauman spesifointia. Portfolion yksiulotteinen tappiojakauma määrittyy näin ollen riskifaktorimuutosten moniulotteisen todennäköisyysjakauman sekä sovelletun tappio-operaattorin tai sen approksimaation muodon perusteella. (McNeil ym. 2015, 338.)

VaR-mitan eri estimointimenetelmien merkittävimmät erot liittyvät juuri siihen, miten riskifaktorimuutosten yhteisjakauma ja portfolion tappiojakauma estimoidaan. Paramet-

---

<sup>1</sup> Tässä tutkielmassa satunnaismuuttujaan viitataan pääsääntöisesti isolla kirjaimella ja satunnaismuuttujan realisaatioon pienellä kirjaimella, ellei asiayhteydestä toisin ilmene.

risissa menetelmissä riskifaktorimuutosten oletetaan noudattavan jotakin tunnettua todennäköisyysjakaumaa, kuten multinormaalijakaumaa. Tyypillistä on myös, että tappio-opeeraattoria approksimoidaan jollakin yksinkertaisella funktiolla. Parametristen menetelmien lähtöoletusten vuoksi portfolion VaR-mitalle voidaan johtaa eksplisiittinen suljetun muodon ratkaisu. Historiallinen simulointi puolestaan perustuu riskifaktorimuutosten historiallisten realisaatioiden perusteella määritettyyn empiiriseen tappiojakaumaan, kun taas Monte Carlo -menetelmä pohjautuu riskifaktorimuutosten parametriseen malliin ja sen perusteella simuloituun tappiojakaumaan. (Alexander 2008b, 41–44.)

VaR-mitan estimointi edellyttää tappiojakauman spesifioinnin lisäksi ennustehorisontin  $\Delta t$  ja luottamustason  $\alpha$  valitsemista. Yleisesti VaR-mitta on sitä suurempi, mitä pidempää ennustehorisonttia ja mitä korkeampaa luottamustasoa sovelletaan, muiden tekijöiden pysyessä muuttumattomina. Ennustehorisontin tulisi vastata ajanjaksoa, jonka aikana portfolion koostumuksen oletetaan pysyvän muuttumattomana. (Jorion 2001, 116–117.) Ennustehorisontin tulisi toisaalta heijastaa portfolion sijoituskohteiden likviditeettiä. Ideaalitulanteessa riskihorisontin pituuden tulisi vastata portfolion sijoituskohteiden likvidointiin kuluvaan aikaan. (Dowd 2002, 27.) Lyhyen riskihorisontin soveltaminen on näin ollen perusteltua, mikäli sijoituskohteet ovat likvidoitavissa hyvin nopeasti ja alhaisin kustannuksin. Portfolion sijoituskohteiden likviditeetti voi kuitenkin vaihdella huomattavasti eri markkinatilanteissa. Koska sijoituskohteiden likviditeetti heikkenee tyypillisesti markkinakriisien aikana, tulisi turbulenteilla ja epävakailta ajanjaksoilla soveltaa pidempiä riskihorisontteja (Alexander 2008b, 14).

Tietyissä tapauksissa ennustehorisontin pituus voi määrittyä myös sopimusoikeudellisten ja lainsäädännöllisten rajoitteiden perusteella. Esimerkiksi vakuutusyhtiöt joutuvat tyypillisesti pitämään vastuista muodostuvan portfolionsa muuttumattomana yhden vuoden ajan, jolloin yhden vuoden ennustehorisontin soveltaminen VaR-mitan estimoinnissa on luontevaa. Basel-vakavaraisuussäännökset edellyttävät puolestaan kymmenen päivän riskihorisontin soveltamista VaR-mitan laskennassa. (Alexander 2008b, 14; McNeil ym. 2015, 66.) VaR-mallien estimointiin ja toteumatestaukseen liittyvät näkökohdat puoltavat toisaalta lyhyen ennustehorisontin soveltamista, sillä lyhyt ennustehorisontti tyypillisesti kasvattaa mallien estimoinnissa ja toteumatestauksessa käytössä olevien havaintojen määrää, mikä puolestaan parantaa tilastollisten menetelmien luotettavuutta. Lisäksi oletus portfolion muuttumattomuudesta on yleensä realistinen ja perusteltu vain lyhyellä aikavälillä. (Jorion 2001, 119; Dowd 2002, 27.)

Myös VaR-mallin luottamustason valinta riippuu ennustehorisontin ohella mallin käyttötarkoituksesta. Luottamustason tulisi heijastaa VaR-mitan ylittämisestä aiheutuvia kustannuksia ja riskimitan soveltajan suhtautumista riskiin. Mitä korkeammat VaR-mitan ylittämiseen liittyvät kustannukset ovat ja mitä voimakkaammin VaR-mitan soveltaja pyrkii karttamaan riskejä, sitä korkeampi valitun luottamustason tulisi olla. Näin ollen korkeiden luottamustasojen soveltaminen on perusteltua esimerkiksi, jos VaR-mittaa

käytetään tappioilta suojaavien pääomapuskurien määrittämiseen, sillä liian suuret tappiot pääomapuskurien tasoon nähden johtavat pahimmassa tapauksessa konkurssiin. Esimerkiksi Basel-säännösten mukaan markkinariskin pääomavaatimusten laskennassa sovellettavien VaR-mallien luottamustason tulee olla 99 %. (Jorion 2001, 117–118; McNeil ym. 2015, 66–67.) Mikäli VaR-mittaa sen sijaan sovelletaan esimerkiksi yrityksen arvopaperikaupankäynnin riskirajojen asettamiseen, voi alemman luottamustason soveltaminen olla perusteltua (Alexander 2008b, 15). VaR-mallien toteumatestauksen kannalta on toisaalta perusteltua soveltaa matalampia luottamustasoja, sillä liian korkea luottamustaso alentaa VaR-mitan ylittävien tappioiden lukumäärää, mikä puolestaan heikentää mallien ennustekykä arvioivien tilastollisten testien luotettavuutta (Jorion 2001, 119; Dowd 2002, 27).

VaR-mitan yleisyydestä huolimatta riskimitan ominaisuuksiin liittyy myös selkeitä heikkouksia. VaR-luku ilmaisee määritelmällisesti suurimman odotetun tappion tietyllä varmuustasolla mutta ei kerro mitään VaR-mitan ylittävien tappioiden vakavuudesta (McNeil ym. 2015, 64). Esimerkiksi yhden päivän VaR-luku luottamustasolla 95 % ylitetään odotusarvoisesti viitenä päivänä 100 päivän aikana. VaR-luku ei kuitenkaan ilmaise, kuinka suuria ylitykset ovat.

Mikäli VaR-mittaa sovelletaan esimerkiksi yrityksen palkitsemisjärjestelmän perustana tai arvopaperikaupankäynnin riskirajojen asettamiseen, VaR-mitan ominaisuudet saattavat johtaa kaappoihin tai sopimuksiin, jotka altistavat yrityksen merkittävälle riskille. Työntekijöillä voi olla kannustin osallistua esimerkiksi johdannaiskaupoihin, jotka kasvattavat yrityksen voittoja normaaleissa markkinaolosuhteissa mutta sisältävät erittäin suuren tappion riskin. Mikäli tappion todennäköisyys on riittävän pieni, VaR-luku voi jäädä varsin matalaksi ja positio voi näin ollen vaikuttaa vähäriskiseltä, vaikka todellisuudessa positioon liittyy huomattavan tappion riski. VaR-luku ei välttämättä myöskään anna oikeaa kuvaa eri positioiden suhteellisesta riskisyydestä. Vaikka kahden position VaR-luvut olisivat identtiset, positioiden riskit saattavat silti poiketa toisistaan huomattavasti, jos esimerkiksi toisen position tappiojakauma on huomattavasti paksuhäntäisempi. Ongelmaa voidaan lievittää tarkastelemalla VaR-mittoja usealla eri luottamustasolla, jolloin positioiden riskiprofiilista saadaan kattavampi kuva. (Dowd 2002, 28–29.)

VaR-mitan puutteista kenties vakavin liittyy Artznerin ym. (1999) esittelemiin riskimittojen aksioomiin, jotka kuvaavat hyvältä ja pääomavaatimusten määrittämiseen soveltuvalta riskimitalta vaadittavia ominaisuuksia. Esityksessä riskit määritellään satunnaismuuttujien äärelliseksi joukoksi  $\mathcal{G}$ , jonka alkiot voidaan tulkita portfolion tai position mahdollisiksi arvoiksi jonakin tulevaisuuden ajanhetkenä. Riskimitta voidaan määritellä funktioksi  $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , joka kuvaa portfolion tulevaisuuden arvoon liittyvän epävarmuuden reaalityyppiseksi. Riskilliseen positioon  $X \in \mathcal{G}$  liittyvä riskimitan arvo  $\rho(X) > 0$  voidaan tulkita lisäpääoman määräksi, joka tulisi lisätä positioon, jotta position riskitasoa voitaisiin

pitää hyväksyttävänä esimerkiksi valvontaviranomaisen näkökulmasta. Jos  $\rho(X) = 0$ , position ei tarvitse lisätä lainkaan lisäpääomaa. Mikäli  $\rho(X) < 0$ , position pääomapuskuria voidaan alentaa. Mikäli joukon  $\mathcal{G}$  alkiot tulkitaan arvojen sijaan position mahdollisiksi tappioiksi, riskimitta voidaan tulkita myös position tappioilta suojaavan kokonaispääoman määräksi, joka sisältää sekä nykyisen pääoman että position riskillisyyden perusteella määräytyvän lisäpääoman (McNeil ym. 2015, 72).

Artznerin ym. (1999) mukaan riskimitan tulee olla monotoninen, siirtoinvariantti, positiivisesti homogeeninen ja subadditiivinen. Riskimitan monotonisuus tarkoittaa, että kaikilla  $X, Y \in \mathcal{G}$ , joille pätee  $X \leq Y$ , on voimassa  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ . Aksioma tarkoittaa näin ollen, että riskillisempään position  $X$  tulee lisätä enemmän lisäpääomaa kuin pienempiin tappioihin johtavaan position  $Y$ . Mikäli position lisätään vakio  $k \in \mathbb{R}$ , riskimitalle tulee puolestaan päteä  $\rho(X + k) = \rho(X) - k$ . Varman ja riskittömän summan lisääminen position pienentää näin ollen position lisäpääomavaatimusta vastaavalla summalla. Tätä ominaisuutta kutsutaan riskimitan siirtoinvarianttiudeksi. Riskimitan positiivinen homogeenisuus puolestaan tarkoittaa, että position koon kasvattaminen  $k$ -kertaiseksi kasvattaa position lisäpääomavaatimuksen myös  $k$ -kertaiseksi. Positiivisesti homogeeniselle riskimitalle on näin ollen voimassa  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$  kaikilla  $\lambda \geq 0$  ja  $X \in \mathcal{G}$ . Subadditiiviselle riskimitalle sen sijaan pätee  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  kaikilla  $X, Y \in \mathcal{G}$ . Kahden eri position yhdistelmän riski ei voi näin ollen olla suurempi kuin yksittäisten positioiden riskien summa eli toisin sanoen yksittäisten riskien aggregointi ei kasvata kokonaisriskiä. Mikäli riskimitta toteuttaa monotonisuuden, siirtoinvarianttiuden, positiivisen homogeenisuuden ja subadditiivisuuden aksioomat, sen sanotaan olevan koherentti.

Artzner ym. (1999) osoittavat, että VaR-mitta toteuttaa kaikki koherenttien riskimittojen aksioomat lukuun ottamatta subadditiivisuuden aksioomaa. VaR-mitalle ei siis yleisesti ole voimassa

$$\text{VaR}_\alpha(X + Y) \leq \text{VaR}_\alpha(X) + \text{VaR}_\alpha(Y) \quad (2.6)$$

Tietyissä tapauksissa riskien hajauttaminen voi siis kasvattaa VaR-mittaa. Tämä puolestaan voi kannustaa riskien keskittämiseen, mikäli VaR-mittaa sovelletaan esimerkiksi organisaatioyksiköiden kaupankäynnin riskirajojen asettamiseen. Vastaavat ominaisuudet voivat tietyissä tapauksissa myös kannustaa pilkkomaan yrityksiä pienempiin juridisiin yksiköihin, mikäli VaR-mittaa käytetään pääomavaateiden määrittämiseen. VaR-mitta on subadditiivinen vain, jos kaikki positiot voidaan esittää elliptisesti jakautuneiden riskifaktorituottojen lineaarikombinaationa (Dowd 2002, 30; McNeil ym. 2015, 76.)

Expected Shortfall -mitta (ES) on VaR-mittaan läheisesti liittyvä riskimitta, jota on usein ehdotettu VaR-mitan korvaajaksi. Mikäli tappio  $L$  toteuttaa ehdon  $E(|L|) < \infty$ , luottamustason  $\alpha \in (0, 1)$  ES-mitta määritellään VaR-mitan määrättynä integraalina välillä  $[\alpha, 1]$  seuraavasti

$$ES_{\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(L) du. \quad (2.7)$$

Mikäli portfolion tappiojakauma on jatkuva, voidaan ES-mitta ilmaista myös ehdollisena odotusarvona

$$ES_{\alpha} = \frac{E(L; L \geq VaR_{\alpha})}{1-\alpha} = E(L | L \geq VaR_{\alpha}). \quad (2.8)$$

ES-mitta ilmaisee siis portfolion odotetun tappion, mikäli VaR-mitta ylitetään. Kuten ES-mitan määritelmästä ilmenee, ES-mitta huomioi koko tappiojakauman hännän, sillä se sisältää VaR-mitat kaikilla luottamustasoilla  $u \in [\alpha, 1]$ . Näin ollen on selvää, että  $ES_{\alpha} \geq VaR_{\alpha}$ . (McNeil ym. 2015, 69–70.)

Toisin kuin VaR-mitta, ES toteuttaa monotonisuuden, siirtainvarianttiuden ja positiivisen homogeenisuuden lisäksi myös subadditiivisuuden aksiooman, minkä vuoksi se on koherentti riskimitta (Acerbi & Tasche 2002). Vaikka ES huomioi VaR-mittaa kattavammin tappiojakauman häntään sijoittuvat tapahtumat ja toteuttaa kaikki koherenteilta riskimitoilta vaadittavat ominaisuudet, ES-mitan soveltamiseen ja ennustekyvyn arviointiin liittyy kuitenkin käytännön haasteita. VaR-mitan estimointi on usein ES-mitan estimointia yksinkertaisempaa. ES-mitan toteumatestaus (backtesting) eli riskimitan estimaattien vertailu toteutuneisiin tappioihin on myös huomattavasti haastavampaa kuin VaR-mitan toteumatestaus. (McNeil ym. 2015, 77.) ES-mitan eri estimointimenetelmien ennustekyvyn vertailu tilastotieteellisesti mielekkäällä tavalla ei myöskään ole mahdollista, sillä ES-estimaattien vertailuun ei ole olemassa johdonmukaista ja luontevaa arviointikriteeriä (Gneiting 2011).

## 2.2 Value at Risk ja vakavaraisuussäntely

VaR-mitan tunnettuutta ja yleisyyttä selittää erityisesti VaR-mitan keskeinen asema pankkien vakavaraisuussäntelyssä, joka useissa maissa perustuu Baselin pankkivalvontakomitean suosituksiin. Pankkien vakavaraisuussäntösten tavoitteena on varmistaa, että pankeilla on otettuihin riskeihin nähden riittävästi tappioilta suojaavaa pääomaa. Pankkien omien varojen vähimmäismäärää koskeva vaatimus voidaan jaotella riskilajikohtaisiin osatekijöihin, joista merkittävimmät koskevat luotto-, markkina- ja operatiivisia riskejä. Luottoriskin pääomavaateen tarkoituksena on suojata pankkeja erityisesti tappioilta, jotka aiheutuvat rahoitustaseen (banking book) luottoriskistä, kun taas markkinariskin pääomavaateen ensisijaisena tarkoituksena on varmistaa, että pankeilla on riittävästi pääomaa, joka suojaa kaupankäyntivarastoon (trading book) kuuluvien instrumenttien arvonmuutosten riskiltä. (Basel Committee on Banking Supervision 2006, 6, 157; McNeil ym. 2015, 22.)

Vuodesta 1996 alkaen pankkien vakavaraisuussäännöksiin sisältynyt markkinariskin pääomavaade voidaan määrittää joko standardimenetelmällä tai pankkien sisäisillä menetelmillä, joiden käyttö edellyttää valvontaviranomaisen lupaa. Standardimenetelmässä kunkin instrumenttiluokan omien varojen vaatimus lasketaan suoraan sääntelyssä esitettyjen ohjeiden ja vaatimusten avulla. Markkinariskin pääomavaade saadaan laskemalla kunkin instrumenttiluokan pääomavaateet yhteen. Sisäisillä menetelmillä Basel 2 -suositusten mukaisesti määritetty markkinariskin pääomavaade pohjautuu puolestaan pankin kaupankäyntivarastolle laskettuun kymmenen päivän VaR-lukuun 99 %:n luottamustasolla. (Basel Committee on Banking Supervision 2006, 162, 195.)

Basel 2 -suositusten mukaisia pääomavaateita on kritisoitu etenkin niiden myötäsyklisen luonteen vuoksi. Pääomavaateiden myötäsyklisyydellä tarkoitetaan sitä, että pääomavaateet laskevat talouden noususuhdanteessa ja nousevat laskusuhdanteessa sekä markkinakriisien aikana. Erityisesti vuonna 2008 alkaneen finanssikriisin aikana eri varallisuuskohteiden arvojen voimakas samanaikainen lasku kasvatti luottolaitosten pääomavaateita, joiden täyttämiseksi luottolaitosten oli myytävä varallisuuttaan. Kasvaneet pääomavaateet ja varallisuuskohteiden myynti supistivat luottolaitosten luotonantomahdollisuuksia ja johtivat markkinalikviditeetin ehtymiseen, mikä puolestaan voimisti kriisin vaikutuksia entisestään. (McNeil ym. 2015, 28.) Lisäksi Basel 2 -suositusten mukaiset markkinariskin pääomavaateet osoittautuivat finanssikriisin aikana aivan liian pieniksi toteutuneisiin tappioihin nähden, minkä vuoksi Baselin pankkivalvontakomitea julkaisi vuonna 2009 Basel 2.5:ksi kutsutun täydennyksen markkinariskin pääomavaateiden laskentaan. Basel 2.5:n mukaisessa vakavaraisuuslaskennassa tavanomaiseen VaR-lukuun pohjautuvaa pääomavaadetta täydennettiin niin kutsuttuun stressitettävään VaR-lukuun (stressed VaR, sVaR) perustuvalla vaateella. Stressitettävän VaR-luvun avulla pyrittiin myös vähentämään pääomavaatimusten myötäsyklisyyttä. (Basel Committee on Banking Supervision 2011, 1.) Useiden kehittyneiden maiden voimassa olevat vakavaraisuussäännökset, kuten Euroopan unionin alueella toimivia luottolaitoksia koskeva vakavaraisuusasetus, perustuvat markkinariskiä koskevien säännösten osalta juuri Basel 2.5 -suositukseen.

Basel 2.5:n mukainen markkinariskin omien varojen vähimmäisvaatimus ajanhetkellä  $t$  voidaan esittää seuraavasti

$$\text{MCR}^t = \max \left[ \text{VaR}_{0,99}^{t-1}, m \cdot \text{VaR}_{0,99}^{\text{avg}} \right] + \max \left[ \text{sVaR}_{0,99}^{t-1}, m \cdot \text{sVaR}_{0,99}^{\text{avg}} \right], \quad (2.9)$$

missä  $\text{VaR}_{0,99}^{t-1}$  kuvaa edellisen päivän VaR-estimaattia 99 %:n luottamustasolla ja kymmenen päivän riskihorisontilla ja  $\text{VaR}_{0,99}^{\text{avg}}$  on edeltävien 60 päivän aikana laskettujen VaR-lukujen keskiarvo. Pääomavaatimuksen jälkimmäisessä komponentissa esiintyvät tekijät  $\text{sVaR}_{0,99}^{t-1}$  ja  $\text{sVaR}_{0,99}^{\text{avg}}$  viittaavat puolestaan viimeisimpään saatavilla olevaan stressitettävään VaR-lukuun sekä 60 edellisen stressitettävän VaR-luvun keskiarvoon. Kaa-

vassa esiintyvä kerroin  $m$  on valvontaviranomaisen asettama kerroin, joka kuvastaa luottolaitoksen soveltaman sisäisen mallin ennustetarkkuutta ja jonka arvo on sitä pienempi, mitä tarkempia VaR-estimaatteja luottolaitoksen riskienhallintajärjestelmä tuottaa. (Basel Committee on Banking Supervision 2011, 15.)

Basel-suositusten mukaan kaavassa (2.9) esiintyvät tavanomaiset VaR-luvut on laskettava päivittäin ja niiden estimoinnissa käytettävän aineiston tulee sisältää kaikki portfolion arvoon olennaisesti vaikuttavat riskifaktorituotot vähintään yhden vuoden ajanjaksolta. VaR-mallin perustana oleva estimointiaineisto on lisäksi päivitettävä vähintään kuukausittain. Tarvittaessa luottolaitosten tulee voida päivittää estimointiaineistoa useammin. Pääomavaateen kaavassa esiintyvän sVaR-mitan tarkoituksena on replikoida luottolaitoksen VaR-mittaa markkinoiden stressitilanteessa. Stressitestatun VaR-mitan estimointi ei sinänsä poikkea tavanomaisen VaR-mitan estimoinnista, mutta sVaR-mitan estimointiaineistona tulee käyttää riskifaktorituottoja sellaiselta 12 kuukauden yhtäjaksoiselta ajanjaksolta, jonka aikana on esiintynyt luottolaitoksen portfolion kannalta merkittäviä rahoitusmarkkinoiden ongelmia. Stressitestattu VaR-luku tulee estimoida vähintään viikoittain. (Basel Committee on Banking Supervision 2011, 13–15.)

Vaikka sääntely asettaa tietyt vähimmäisvaatimukset markkinariskin pääomavaateen laskennassa sovellettaville sisäisille malleille, VaR- ja sVaR-mittojen estimoinnissa sovellettavat menetelmät ovat pankkien vapaasti valittavissa. Sisäisiä malleja soveltavilla luottolaitoksilla on näin ollen kannustin soveltaa menetelmiä, jotka toisaalta huomioivat kaikki pankin kaupankäyntivaraston arvoon olennaisesti vaikuttavat riskitekijät ja jotka toisaalta minimoivat kaavassa (2.9) esitetyn pääomavaateen. Markkinariskin pääomavaateen kaavaan on myös sisällytetty kannustin kehittää ja soveltaa VaR-malleja, joiden ennustetarkkuus on mahdollisimman hyvä, sillä kaavan (2.9) esityksen mukaisesti pääomavaateen suuruus määräytyy VaR- ja sVaR-estimaattien tason lisäksi sovelletun VaR-mallin ennustekykyä kuvaavan kertoimen  $m = (3 + k)$ ,  $k \in [0, 1]$ , perusteella. Lisäkertoimen  $k$  suuruus määräytyy Basel 2 -suosituksissa kuvatun vyöhykemallin mukaisesti. (Basel Committee on Banking Supervision 2011, 15–16.)

Vyöhykemallin mukaisessa toteumatestauksessa tutkitaan, onko VaR-mitan ylittävien tappioiden lukumäärä linjassa 99 %:n luottamustason kanssa vertaamalla estimoituja yhden päivän VaR-lukuja viimeksi kuluneen 250 pankkipäivän aikana realisoituneisiin tappioihin, jotka perustuvat joko portfolion todellisiin tai hypoteettisiin, estimointihetken positioiden mukaisiin arvonmuutoksiin. Vyöhykemallin ”vihreällä alueella” ylitysten lukumäärä on korkeintaan neljä ja lisäkerroin  $k$  saa arvon 0. Vyöhykemallin ”keltaisella alueella” ylitysten lukumäärä on puolestaan 5–9 ja lisäkertoimen suuruus kasvaa ylitysten lukumäärän kasvaessa, ellei luottolaitos kykene osoittamaan, ettei toteumatestauksen tulos johdu sovelletun VaR-mallin puutteista tai estimointivirheistä. ”Punaisella alueella” VaR-mitan ylityksiä on vähintään kymmenen ja lisäkerroin saa automaattisesti arvon 1.

”Punaisen alueen” toteumatestaustulokset viestivät suurella todennäköisyydellä sovelletun mallin vakavista puutteista, minkä vuoksi valvontaviranomaisten tulisi vaatia luottolaitosta muuttamaan soveltamaansa riskimallia. (Basel Committee on Banking Supervision 2006, 311–321.)

Basel 2.5 -suositukseen sisällytetyistä parannuksista huolimatta markkinariskin sisäisiä malleja koskevia vakavaraisuussäännöksiä on kritisoitu erityisesti VaR-mitan rakenteellisten ongelmien vuoksi. Koska VaR-mitta ei kerro lainkaan tappiojakauman oikeanpuoleisen hännän muodosta tai häntään sijoittuvien tappioiden suuruudesta, luottolaitosten on mahdollista siirtää merkittäviä riskejä portfolion tappiojakauman oikeanpuoleiseen häntään esimerkiksi johdannaisten avulla ilman, että tappioilta suojaavan pääomavaateen perustana oleva VaR-mitta muuttuu lainkaan. Kuten aiemmin todettiin, VaR-mitta ei myöskään ole koherentti riskimitta, sillä se ei yleisesti toteuta subadditiivisuuden aksiomaa. (Danielsson, Embrechts, Goodhart, Keating, Muennich, Renault & Shin 2001; Basel Committee on Banking Supervision 2016a, 2.) Markkinariskin pääomavaateita koskevan sääntelyn ongelmakohtiin liittyvän selvitystyön tuloksena Basel-komitea julkaisi vuoden 2016 alussa uudistetut suositukset markkinariskin pääomavaateiden laskemiseksi. Uudistetuissa suosituksissa sisäisiä malleja soveltavien luottolaitosten markkinariskin pääomavaade pohjautuu VaR-mitan sijaan 12 kuukauden stressiperiodin riskifaktoriaineiston perusteella laskettuun ES-mittaan luottamustasolla 97,5 %. Uudistetut vaatimukset on tarkoitus sisällyttää luottolaitoksia koskevaan vakavaraisuussääntelyyn vuoteen 2019 mennessä. (Basel Committee on Banking Supervision 2016b, 4, 52–53.)

Vaikka ES-mittaa voidaan pitää teoreettisilta ominaisuuksiltaan VaR-mittaa parempana riskimittana, ES-mitan käyttöönottoon liittyy olennaisia käytännön haasteita. ES-mitan estimointi ja toteumatestaus on haastavaa ja edellyttää huomattavasti suurempaa aineistoa kuin VaR-mitan estimointi ja toteumatestaus. ES-mitan estimointiprosessi on tyypillisesti myös VaR-mittaa herkempi estimointiaineiston tai mallin parametrien muutoksille. (Danielsson 2002; Embrechts, Puccetti, Rüschendorf, Wang & Beleraj 2014.) ES-mitan eri estimointimenetelmien vertailuun ei myöskään ole olemassa mitään luontevaa ja tilastotieteellisesti mielekästä arviointikriteeriä, minkä vuoksi erilaisten ES-mallien suhteellisen paremmuuden arviointi on käytännössä mahdotonta (Gneiting 2011; Ziegel 2016).

Pääomavaateiden taustalla olevien riskimittojen valinnasta riippumatta vakavaraisuussääntelyä on kritisoitu myös yleisemmin siitä, että se ei huomioi taloudellisen riskin endogeenista luonnetta. Mikäli sääntely ohjaa markkinatoimijoita soveltamaan samanlaisia riskimalleja ja noudattamaan samanlaisia riskirajoja, toimijoiden käyttäytyminen ja suhtautuminen riskiin yhtenäistyvät. Yhtenäistynyt riskinsietokyky puolestaan johtaa samantapaisiin kaupankäyntistrategioihin erityisesti markkinakriisien aikana, mikä puolestaan voi voimistaa markkinahäiriöiden vaikutusta entisestään ja romahduttaa markkinalikviditee-



tin, jos esimerkiksi suuri osa markkinatoimijoista pyrkii samanaikaisesti myymään riskisijoituksiaan täyttääkseen sääntelyssä määritellyt riskirajat. (Danielsson ym. 2001; Danielsson 2002.) Luottolaitosten soveltamien riskimallien ja -mittojen sääntely voi näin ollen jopa kasvattaa rahoitusjärjestelmän systeemistä riskiä, jonka vähentämistä voidaan pitää yhtenä vakavaraisuussääntelyn olennaisimpana tavoitteena.

### 2.3 Estimointimenetelmistä

VaR-mallit voidaan jakaa ehdollisiin ja ehdollistamattomiin malleihin. Ehdollistamattomat mallit perustuvat oletukseen, että riskifaktorimuutokset ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita (independent and identically distributed, IID). Taloudellisten aikasarjojen empiiristen ominaisuuksien, kuten heteroskedastisuuden ja volatilitietin klusteroitumisen, vuoksi IID-oletus ei kuitenkaan usein ole perusteltu etenkin lyhyillä aikaväleillä. (J.P. Morgan 1996; McNeil ym. 2015, 339.) Aikasarjojen heteroskedastisuus tarkoittaa, että aikasarjojen varianssi ja siten myös volatilitietti vaihtelee ajassa, kun taas volatilitietin klusteroituminen viittaa ilmiöön, jossa itseisarvoltaan suuret tuottosokit esiintyvät tyypillisesti ryppäinä (Alexander 2008a, 131). Ehdollisissa malleissa VaR-mittan estimointi pohjautuu riskifaktorimuutosten ehdolliseen todennäköisyysjakaumaan, joka riippuu tarkasteluhetkellä käytettävissä olevasta informaatiosta ja heijastaa näin ollen markkinaolosuhteiden muutoksia ehdollistamattomia malleja paremmin. Ehdollisissa menetelmissä riskifaktorimuutosten aikasarjoihin voidaan sovittaa malleja, jotka huomioivat esimerkiksi aikasarjoissa esiintyvän autokorrelaation ja heteroskedastisuuden. (Tsay 2010, 333–334; Komunjer 2013.)

Kaavoja (2.1) ja (2.5) sekä ehdollisen kertymäfunktion määritelmää soveltamalla riskifaktorimuutosten ehdolliseen jakaumaan  $F_{\mathbf{X}_{t+1}|\Omega_t}$  perustuva portfolion ehdollinen tappiojakauma voidaan määrittellä seuraavasti

$$F_{L_{t+1}|\Omega_t}(l) = P(l_{[t]}(\mathbf{X}_{t+1}) \leq l | \Omega_t), \quad (2.10)$$

missä  $\Omega_t$  kuvaa ajanhetkellä  $t$  käytettävissä olevaa informaatiojoukkoa, joka sisältää tiedon aikaisemmista riskifaktorimuutoksista  $\{\mathbf{X}_s : s \leq t\}$ . Mikäli portfolion tappiojakauman oletetaan olevan jatkuva, voidaan ajanhetkellä  $t$  vallitsevan tiedon perusteella muodostettu ehdollinen VaR-mitta määrittää seuraavasti

$$\text{VaR}_\alpha^t = F_{L_{t+1}|\Omega_t}^{-1}(\alpha), \quad (2.11)$$

missä  $F_{L_{t+1}|\Omega_t}^{-1}$  on portfolion ehdollisen tappiojakauman käänteisfunktio. Mikäli riskifaktorimuutosten IID-oletus toteutuu, riskifaktorimuutosten ehdollinen jakauma on identti-

nen ehdollistamattoman jakauman kanssa, jolloin portfolion VaR-mitta voidaan estimoida portfolion ehdollistamattoman tappiojakauman avulla soveltamalla kaavaa (2.3). (Komunjer 2013; McNeil ym. 2015, 339.)

Riippumatta siitä, tarkastellaanko ehdollisia vai ehdollistamattomia VaR-malleja, VaR-mitan eri estimointimenetelmien keskeisimmät erot liittyvät riskifaktorimuutosten  $\mathbf{X}_{t+1}$  moniulotteisen todennäköisyysjakauman ja portfolion yksiulotteisen tappiojakauman määrittämisessä sovellettaviin menetelmiin ja oletuksiin. VaR-mallien estimointimenetelmät voidaan luokitella parametrisiin menetelmiin, historialliseen simulointiin ja Monte Carlo -menetelmään.

### 2.3.1 Parametriset menetelmät

Parametrisissa menetelmissä joko portfoliotuottojen tai portfoliotuottoja ajavien riskifaktorituottojen oletetaan noudattavan jotakin tunnettua parametrisoitua todennäköisyysjakaumaa, joka riippuu tuntemattomasta äärellisulotteisesta parametrivektorista  $\boldsymbol{\theta}$ . Käytännössä mallinnuksessa sovelletaan käytettävissä olevan aineiston perusteella laskettua estimaattoria  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , jonka avulla portfoliotuottojen todennäköisyysjakauma ja siten myös VaR-mitta saadaan määritettyä. (Dowd 2002, 77; Komunjer 2013.)

Parametristen menetelmien yksinkertaisimmassa ja tavanomaisimmassa lähestymistavassa portfoliotuottojen  $r_p$  oletetaan noudattavan normaalijakaumaa. Tällöin estimoitava parametrivektori on muotoa  $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)'$ , missä  $\mu$  on portfoliotuottojen odotusarvo ja  $\sigma^2$  on portfoliotuottojen varianssi. Koska portfolion tappio määritellään tuoton vastalukuna, voidaan jakaumaoletusta luonnollisesti soveltaa myös portfolion tappioihin. Portfoliotuottojen normaalijakaumaoletukseen perustuva VaR-mitta luottamustasolla  $\alpha$  voidaan määrittää seuraavasti

$$\text{VaR}_\alpha = -\mu - \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha), \quad (2.12)$$

missä  $\Phi^{-1}$  on standardoidun normaalijakauman käänteisfunktio (Dowd 2002, 78). Portfolion tappioita tarkasteltaessa VaR-mitan kaava voidaan puolestaan esittää muodossa

$$\text{VaR}_\alpha = \mu_L + \sigma_L \Phi^{-1}(\alpha), \quad (2.13)$$

missä  $\mu_L$  ja  $\sigma_L$  kuvaavat portfolion tappiojakauman odotusarvoa ja keskihajontaa (McNeil ym. 2015, 65). Kaavoissa (2.12) ja (2.13) esitetyt parametrit voivat viitata joko absoluuttisiin tai prosentuaalisiin tuottoihin tai tappioihin. Prosentuaalisten tuottojen tai tappioiden tapauksessa VaR-mitta tulkitaan portfolion suurimmaksi prosentuaaliseksi tappioksi luottamustasolla  $\alpha$ . Portfolion rahamääräistä riskiä mittaava VaR-luku saadaan luonnollisesti kertomalla suhteellinen VaR-mitta portfolion arvolla.

Moniulotteisissa parametrisissa menetelmissä oletukset koskevat portfoliotuottoja ajavien riskifaktorituottojen moniulotteista todennäköisyysjakaumaa sekä kaavassa (2.5) esitetyn tappio-operaattorin  $l_{[t]}$  muotoa. Tyypillisesti tappio-operaattori ja riskifaktorituottojen jakauma spesifioidaan siten, että portfolion yksiulotteinen tappiojakauma ja VaR-mitta voidaan määrittää analyttisesti. J.P. Morganin (1996) RiskMetrics-mallin mukainen varianssi-kovarianssimenetelmä on yksi tunnetuimmista VaR-mitan estimoinnissa sovellettavista parametrisista menetelmistä. Varianssi-kovarianssimenetelmässä oletetaan, että linearisoitu tappio-operaattori kuvaa riskifaktorituottojen ja portfolion tappioiden välistä yhteyttä riittävän tarkasti. Linearisoitu tappio-operaattori määritellään soveltamalla Taylorin ensimmäisen kertaluvun sarjakehitelmää kaavassa (2.4) esitettyyn kuvaukseen  $f$  pisteen  $(t, \mathbf{z}_t)$  ympäristössä. Portfolion linearisoitu tappio voidaan näin ollen esittää muodossa

$$L_{t+1}^{\Delta} = l_{[t]}^{\Delta}(\mathbf{X}_{t+1}) = -(c_t + \mathbf{b}'_t \mathbf{X}_{t+1}), \quad (2.14)$$

missä  $c_t$  on vakio ja  $\mathbf{b}_t$  on vakiovektori, joka sisältää portfolion arvofunktion  $f$  ensimmäisen kertaluvun derivaatat riskifaktorien suhteen pisteessä  $(t, \mathbf{z}_t)$ . (McNeil ym. 2015, 327, 340–341.)

Varianssi-kovarianssimenetelmässä oletetaan myös, että riskifaktorituotot noudattavat multinormaalijakaumaa odotusarvolla  $\boldsymbol{\mu}$  ja kovarianssimatriisilla  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Riskifaktorituotoille pätee siis  $\mathbf{X}_{t+1} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Koska moniulotteista normaalijakaumaa noudattavien muuttujien lineaarikombinaatio on myös normaalisti jakautunut, kaavassa (2.14) esitetylle linearisoidulle tappiolle on voimassa

$$L_{t+1}^{\Delta} = l_{[t]}^{\Delta}(\mathbf{X}_{t+1}) \sim N(-c_t - \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}, \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_t). \quad (2.15)$$

Varianssi-kovarianssimenetelmän oletusten vallitessa portfolion tappio noudattaa siis yksiulotteista normaalijakaumaa odotusarvolla  $-c_t - \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}$  ja varianssilla  $\mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_t$ , jolloin kaava (2.13) soveltamalla VaR-mitta voidaan esittää muodossa

$$\text{VaR}_{\alpha} = -c_t - \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{b}_t} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (2.16)$$

Multinormaalisuusoletusta ja lineaarista tappio-operaattoria soveltamalla portfolion VaR-mitta voidaan näin ollen esittää analyttisessä muodossa. (Alexander 2008b, 63; McNeil ym. 2015, 340–341.)

Varianssi-kovarianssimenetelmän keskeiset oletukset ovat myös menetelmän suurimpia heikkouksia. Oletus portfolion tuottojen tai tappioiden ja riskifaktorimuutosten lineaarisesta suhteesta ei välttämättä ole kovin realistinen esimerkiksi pidemmällä aikavälillä ja johdannaisportfolioiden tapauksessa (McNeil ym. 2015, 341). Normaalijakaumaole-  
tusta perustellaan useissa sovelluksissa yleensä keskeisellä raja-arvolauseella. Keskeinen

raja-arvolause soveltuu kuitenkin vain satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauman keskiosan kuvailuun eikä lausetta voida soveltaa jakaumien häntien mallintamiseen. Taloudellisten aikasarjojen jakaumat ovat usein normaalijakaumaa paksuhäntäisempiä etenkin lyhyillä aikaväleillä, mikä tarkoittaa, että jakaumien häntien ääritapahtumat ovat todennäköisempiä kuin normaalijakauman tapauksessa. Normaalijakauman soveltaminen voi näin ollen johtaa VaR-estimaatteihin, jotka aliarvioivat todennäköisyysjakaumien häntiin sisältyviä riskejä erityisesti korkeilla luottamustasoilla. (Dowd 2002, 82; Alexander 2008b, 106–107.)

Tuottoaikasarjojen paksuhäntäisyys voidaan huomioida VaR-mitan estimoinnissa soveltamalla esimerkiksi normaalijakaumaa paksuhäntäisempää Studentin t-jakaumaa. Mikäli portfolion tappioiden oletetaan noudattavan t-jakaumaa odotusarvolla  $\mu_L$ , keskihajonnalla  $\sigma_L$  ja vapausasteella  $\nu > 2$ , portfolion VaR-mitta voidaan esittää muodossa

$$\text{VaR}_\alpha = \mu_L + \sigma_L \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} t_\nu^{-1}(\alpha), \quad (2.17)$$

missä  $t_\nu^{-1}$  on standardoidun t-jakauman käänteisfunktio. Kaavaa voidaan soveltaa myös moniulotteisessa tarkastelussa, mikäli riskifaktorituottojen oletetaan noudattavan moniulotteista t-jakaumaa, sillä moniulotteinen t-jakauma on multinormaalijakauman tapaan suljettu lineaaristen muunnosten suhteen. Tappiojakauman odotusarvo ja keskihajonta voidaan tällöin määritellä kaavan (2.16) mukaisesti. (Alexander 2008b, 108–109; McNeil ym. 2015, 66.)

Koska ehdollistamattomat parametriset mallit eivät huomioi taloudellisissa aikasarjoissa esiintyvää autokorrelaatiota, heteroskedastisuutta tai volatiliteetin klusteroitumista, VaR-mitan estimoinnissa on usein perusteltua soveltaa ehdollisia parametrisia malleja, jotka heijastavat markkinaolosuhteissa tapahtuvia muutoksia ehdollistamattomia malleja paremmin. J.P. Morganin (1996) RiskMetrics-mallissa riskifaktorituottojen varianssien ja kovarianssien ajallista vaihtelua mallinnetaan soveltamalla eksponentiaalisesti painotettua liukuvan keskiarvon menetelmää. Vaikka menetelmä johtaa ajassa muuttuviin varianssi- ja kovarianssiestimaatteihin, se perustuu silti tuottoaikasarjojen IID-oletukseen, minkä vuoksi RiskMetrics-malli voidaan luokitella ehdollistamattomaksi menetelmäksi (Alexander 2008a, 123–124).

Ehdollisissa parametrisissa malleissa portfoliotuottojen  $r_t$  oletetaan tyypillisesti noudattavan dynamiikkaa

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t, \quad (2.18)$$

missä  $\mu_t = E(r_t | \Omega_{t-1})$  ja  $\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | \Omega_{t-1})$  kuvaavat portfoliotuottojen todennäköisyysjakauman ehdollista odotusarvoa ja ehdollista varianssia ajanhetkellä  $t$ , ja missä tuottoprosessia ajavalle innovaatiotermille  $z_t$  on voimassa  $z_t \sim \text{IID}(0,1)$ , missä jakaumaparametrit viittaavat odotusarvoon ja varianssiin. Mikäli innovaatiotermien  $z_t$  jakauman  $G_2$  oletetaan

olevan jatkuva, ajanhetkellä  $t$  muodostettu yhden periodin VaR-mitta luottamustasolla  $\alpha$  voidaan tällöin esittää muodossa

$$\text{VaR}_\alpha^t = -\mu_{t+1} - \sigma_{t+1} G_z^{-1}(1 - \alpha), \quad (2.19)$$

missä  $G_z^{-1}$  on innovaatioprosessin todennäköisyysjakauman käänteisfunktio. VaR-mitan määrittäminen edellyttää näin ollen ehdollisen odotusarvon ja varianssin dynamiikkaa kuvaavien mallien sekä innovaatioprosessin jakauman spesifiointia. (Kuester ym. 2006; Santos, Nogales & Ruiz 2013.)

Kaavassa (2.18) esitetyn tuotto-prosessin ehdollista odotusarvoa voidaan mallintaa soveltamalla esimerkiksi autoregressiivistä liukuvan keskiarvon mallia (Autoregressive Moving Average, ARMA), jossa ehdollinen odotusarvo on muotoa

$$\mu_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}. \quad (2.20)$$

Tuottoaikasarjoissa esiintyvä autokorrelaatio on usein varsin heikkoa, minkä vuoksi VaR-mitan estimoinnissa sovellettavat ehdollisen odotusarvon mallit rajoittuvat yleensä yksinkertaisimpiin ARMA-malleihin. Tyypillisimpiä malleja ovat ARMA(1,0)-malli sekä malli, jossa ehdollisen odotusarvon oletetaan olevan vakio. (Tsay 2010, 68; Santos ym. 2013.)

Kaavassa (2.19) esiintyvällä ehdollisella volatilitetillä ja sen spesifioinnilla on sen sijaan yleensä huomattavasti ehdollisen odotusarvon mallia suurempi merkitys VaR-mallien ennustekyvyn kannalta. Tyypillisimmät ehdollisen volatilitetin mallit perustuvat Bollerslevin (1986) esittelemään GARCH-malliin ja sen laajennuksiin. Bollerslevin (1986) yleistetty GARCH( $r,s$ )-malli voidaan esittää muodossa

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (2.21)$$

missä  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t = \sigma_t z_t$  kaavan (2.18) mukaisesti. Jotta ehdollinen varianssi olisi aina epänegatiivinen, tulee mallin parametrien toteuttaa ehdot  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  ja  $\beta_j \geq 0$ . Jotta prosessin ehdollistamaton varianssi olisi äärellinen, on lisäksi oltava voimassa  $\sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ .

Bollerslevin (1986) mallissa tuotto-prosessia ajavien innovaatiotermien  $z_t$  oletetaan lisäksi noudattavan standardoitua normaalijakaumaa, minkä vuoksi kaavan (2.18) mukaista dynamiikkaa noudattavien tuottojen ehdolliselle todennäköisyysjakaumalle pätee  $r_t | \Omega_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ . Näin ollen ajanhetken  $t$  informaatioon perustuva VaR-mitta voidaan määrittää kaavan (2.19) avulla soveltamalla standardoidun normaalijakauman käänteisfunktioita. Mallin empiirisissä sovelluksissa tarkastellaan usein vain yksinkertaisimpia GARCH-malleja, kuten GARCH(1,1)-mallia. Sijoittamalla eri ajanhetkien varianssiyhtä-

löt rekursiivisesti kaavan (2.21) oikealle puolelle GARCH(1,1)-malli voidaan esittää aikaisempien neliöityjen tuottosokkien sarjana, minkä vuoksi malli huomioi kattavasti menneiden tuottosokkien vaikutuksen ehdolliseen volatilitettiin.

Bollerslevin (1986) mallin avulla voidaan mallintaa tuottoaikasarjoissa esiintyvää ehdollista paksuhäntäisyyttä, heteroskedastisuutta ja volatilitietin klusteroitumista. Malli on kuitenkin symmetrinen, sillä ehdollinen varianssi reagoi samalla tavalla negatiivisiin ja positiivisiin tuottosokkeihin, koska tuottosokit  $\varepsilon_t$  esiintyvät varianssiyhtälössä (2.21) neliöityinä. Taloudellisten aikasarjojen volatilitetilla on usein taipumuksena reagoida erimerkkisiin tuottosokkeihin eri tavalla etenkin lyhyellä aikavälillä. Black (1976) havaitsi, että erityisesti osakkeiden tapauksessa kurssilasku kasvattaa tyypillisesti osakkeiden volatilitettä kurssinousua voimakkaammin, minkä vuoksi asymmetriset GARCH-mallit soveltuvat usein paremmin tuottoaikasarjojen ehdollisen volatilitietin mallinnukseen.

Glostenin, Jagannathanin ja Runklen (1993) GJR-GARCH-malli sekä Nelsonin (1991) eksponentiaalinen GARCH-malli (EGARCH) ovat tyypillisimpiä rahoitussovelluksissa käytettyjä asymmetrisiä GARCH-malleja. GJR-GARCH(1,1)-mallin varianssiyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \mathbf{1}[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (2.22)$$

missä  $\mathbf{1}[\varepsilon_{t-1} < 0]$  on indikaattorifunktio, joka saa arvon 1, jos  $\varepsilon_{t-1} < 0$ , ja arvon 0 muussa tapauksessa. Parametri  $\gamma$  kuvaa näin ollen erimerkkisten tuottosokkien epäsymmetristä vaikutusta ehdolliseen volatilitettiin. Mikäli parametrin  $\gamma$  arvo on positiivinen, negatiiviset tuottosokit kasvattavat volatilitettä positiivisia tuottosokkeja voimakkaammin. Negatiiviset parametriarvot viittaavat luonnollisesti päinvastaiseen vaikutukseen. EGARCH(1,1)-malli voidaan puolestaan esittää muodossa

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + g(z_{t-1}) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \quad (2.23)$$

missä ehdollisen varianssin suuruus riippuu sekä innovaatiotermien  $z_t$  suuruudesta että innovaation etumerkistä funktion  $g(z_t) = \alpha z_t + \gamma(|z_t| - E|z_t|)$  mukaisesti. Koska EGARCH-mallissa varianssiyhtälö esitetään logaritmisessa muodossa, ehdollinen varianssi on aina epänegatiivinen, minkä vuoksi mallin parametreille ei tarvitse asettaa vastaavia rajoitteita kuin esimerkiksi tavanomaisessa GARCH-mallissa.

Tuottoprosessin ehdollisen odotusarvon ja varianssin lisäksi VaR-mitan määrittäminen edellyttää innovaatiotermien  $z_t$  todennäköisyysjakauman spesifiointia. Tyypillisesti innovaatiotermien oletetaan noudattavan standardoitua normaalijakaumaa, kuten Bollerslevin (1986) mallissa. GARCH-mallien soveltaminen itsessään ei kuitenkaan usein riitä huomioimaan tuottoaikasarjojen paksuhäntäisyyttä kokonaisuudessaan, sillä myös innovaatiotermien on havaittu noudattavan normaalijakaumaa paksuhäntäisempiä jakaumia (Angelidis ym. 2007). Innovaatiotermien vaihtoehtoisista jakaumaoletuksista tyypillisin on normaalijakaumaa paksuhäntäisempi t-jakauma, jota sovelletaan esimerkiksi Bollerslevin

(1987) tutkimuksessa. Toinen GARCH-malleissa tyypillisesti sovellettu innovaatiojakauma on vino-t-jakauma, joka huomioi paksuhäntäisyyden lisäksi myös innovaatiojakauman mahdollisen vinouden (ks. esim. Lambert & Laurent 2001). Paksuhäntäisten jakaumien soveltaminen kasvattaa luonnollisesti kaavassa (2.19) esiintyvän innovaatiojakauman käänteisfunktion  $G_z^{-1}$  arvoa etenkin korkeilla luottamustasoilla, mikä puolestaan johtaa suurempiin VaR-lukuihin kuin normaalijakauman tapauksessa.

Ehdollisia parametrisia malleja voidaan soveltaa myös moniulotteisessa tarkastelussa. VaR-mitta voidaan määrittää analyttisesti kaavan (2.19) avulla, mikäli innovaatiotermien moniulotteinen jakauma on suljettu lineaaristen muunnosten suhteen. Moniulotteisissa ja ehdollisissa parametrisissa menetelmissä innovaatiotermien oletetaan tämän vuoksi usein noudattavan multinormaalijakaumaa tai moniulotteista t-jakaumaa, jolloin portfoliotuottojen ehdollinen yksiulotteinen jakauma voidaan määrittää eksplisiittisesti. Portfoliotuottojen ehdollisen odotusarvon määrittäminen edellyttää luonnollisesti riskifaktorituottojen moniulotteisen jakauman ehdollisen odotusarvon määrittämistä, kun taas portfoliotuottojen ehdollisen volatiliteetin laskeminen edellyttää riskifaktorituottojen ehdollisen kovarianssimatriisin estimointia. Riskifaktorituottojen ehdollisen odotusarvon mallinnuksessa voidaan käyttää esimerkiksi moniulotteista ARMA-mallia. Ehdollinen kovarianssimatriisi voidaan puolestaan estimoida soveltamalla moniulotteisia GARCH-malleja, joissa riskifaktorituottojen ehdollisten varianssien lisäksi myös kovarianssitermien annetaan vaihdella ajassa esimerkiksi kaavassa (2.21) kuvatun dynamiikan kaltaisesti. (Santos ym. 2013; McNeil ym. 2015, 557.)

Moniulotteisten GARCH-mallien käytännön sovellettavuutta rajoittaa etenkin mallien parametrien estimointiin liittyvä laskennallinen raskaus. Esimerkiksi ehdollisen kovarianssimatriisin dynamiikkaa mallintavissa VEC- ja BEKK-malleissa estimoitavien parametrien lukumäärä kasvaa voimakkaasti mallinnusongelman ulottuvuuden kasvaessa. Parametrien estimoinnissa sovellettavan uskottavuusfunktion maksimointia hankaloittaa myös se, että optimointiongelmaa ei voida jakaa pienempiin osiin vaan mallien parametrit pitää estimoida samanaikaisesti. (Alexander 2008a, 164–166.) Vaihtoehtoisena lähestymistapana voidaan soveltaa ehdollisen korrelaation malleja, joissa ehdollinen kovarianssimatriisi voidaan esittää riskifaktorituottojen ehdollisten volatiliteettien ja korrelaatiomatriisin avulla muodossa  $\Sigma_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t$ , missä  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(\sigma_{t,1}, \dots, \sigma_{t,d})$  on yksiulotteisten GARCH-mallien avulla estimoiduista ehdollisista volatiliteeteista muodostettu diagonaalimatriisi ja  $\mathbf{R}_t$  on riskifaktorituottojen ehdollinen korrelaatiomatriisi (McNeil ym. 2015, 546). Ehdollisen korrelaation malleista tunnetuimpia ovat Bollerslevin (1990) CCC-malli (Constant Conditional Correlation), jossa korrelaatiomatriisin oletetaan olevan vakio, ja Englen (2002) DCC-malli (Dynamic Conditional Correlation), jossa ehdollisen korrelaatiomatriisin oletetaan noudattavan GARCH-mallin kaltaista parametrisoitua dynamiikkaa.

Ehdollisen korrelaation malleissa ehdollisen kovarianssimatriisin estimointiongelma voidaan näin ollen jakaa yksiulotteisten GARCH-mallien ja riskifaktorituottojen korrelaatiomatriisin estimointiin, minkä vuoksi mallien soveltaminen ja estimointi on huomattavasti VEC- ja BEKK-malleja yksinkertaisempaa ja käytännöllisempää (Alexander 2008a, 166–167; McNeil ym. 2015, 548–549). Mallien ongelmana on kuitenkin, että ne perustuvat useimmiten innovaatiotermien multinormaalisuusoletukseen ja lineaariseen korrelaatioon, jonka soveltaminen riskifaktorituottojen riippuvuuden mittarina ei läheskään aina ole perusteltua. Lisäksi CCC- ja DCC-malli voidaan nähdä yksiulotteisiin GARCH-malleihin ja kopulafunktioihin pohjautuvan yleisemmän ja joustavamman lähestymistavan erikoistapauksina. (Berger & Missong 2014.)

Parametriset VaR-mallit hyödyntävät tehokkaasti käytettävissä olevaa aineistoa ja niiden avulla portfolion VaR-mitalle voidaan useimmiten määrittää analyyttinen suljetun muodon ratkaisu, mikä on kiistatta parametristen menetelmien suurin vahvuus. Analyytisten ratkaisujen olemassaolo edellyttää toisaalta, että portfolio- tai riskifaktorituottojen oletetaan noudattavan jotakin tunnettua parametrisoitua todennäköisyysjakaumaa, minkä vuoksi parametriset menetelmät altistuvat aina malliriskille, joka realisoituu, mikäli jakaumaoletukset osoittautuvat vääriksi.

### 2.3.2 Historiallinen simulointi

Toisin kuin parametrisissa malleissa, historiallisessa simuloinnissa portfoliotuottojen tai riskifaktorituottojen ei oleteta noudattavan jotakin parametrisoitua todennäköisyysjakaumaa. Historiallinen simulointi perustuu sen sijaan portfolion arvoprosessia ajavien riskifaktorituottojen historiallisiin realisaatioihin ja niiden perusteella määritettävään portfoliotuottojen tai -tappioiden hypoteettiseen jakaumaan, jonka oletetaan kuvaavan tulevien portfoliotuottojen tai -tappioiden jakaumaa riittävän tarkasti. (Alexander 2008b, 141–142.) Mikäli menetelmän perustana olevan historiallisten riskifaktorituottojen aikasarjan pituudeksi valitaan  $n$ , portfolion tappioiden simuloitu aikasarja saadaan soveltamalla ajanhetken  $t$  tappio-operaattoria historiallisista riskifaktorituotoista muodostettuun aineistoon  $\{\mathbf{X}_{t-n+1}, \dots, \mathbf{X}_t\}$ . Tappioiden simuloitu aikasarja

$$\{\tilde{L}_s = l_{[t]}(\mathbf{X}_s) : s = t - n + 1, \dots, t\} \quad (2.24)$$

kuvaa näin ollen ajanhetkellä  $t$  hallinnoitavan portfolion hypoteettisia tappioita, mikäli ajanhetkien  $s = t - n - 1, \dots, t$  riskifaktorituotot realisoituisivat uudelleen. (McNeil ym. 2015, 342.)

Historiallisessa simuloinnissa portfolion tappiojakaumaa  $F_L(l)$  estimoidaan kaavassa (2.24) esitetyn aikasarjan empiirisellä kertymäfunktioilla  $F_n(l)$ , jolle on voimassa



$$F_n(l) = \frac{1}{n} \sum_{s=t-n+1}^t \mathbf{1}[\tilde{L}_s \leq l] \rightarrow F_L(l), \text{ kun } n \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Portfolion VaR-mitta luottamustasolla  $\alpha$  voidaan näin ollen esittää muodossa

$$\text{VaR}_\alpha = F_n^{\leftarrow}(\alpha), \quad (2.26)$$

missä  $F_n^{\leftarrow}$  on simuloitujen tappioiden empiirisen kertymäfunktion yleistetty käänteisfunktio. (McNeil ym. 2015, 342.) Menetelmässä sovelletaan tyypillisesti liukuvaa estimointiikkunaa, mikä tarkoittaa, että VaR-mitan estimoinnissa sovellettava riskifaktoriaineisto sisältää aina  $n$  viimeisintä havaintoa (Manganelli & Engle 2004). Esimerkiksi ajanhetkellä  $t + 1$  VaR-mitan estimoinnin perustana oleva riskifaktoriaineisto koostuu havainnoista  $\{\mathbf{X}_{t-n}, \dots, \mathbf{X}_{t+1}\}$ , joihin sovelletaan ajanhetken  $t + 1$  tappio-operaattoria kaavan (2.24) mukaisesti.

Historiallisen simuloinnin keskeisin vahvuus perustuu menetelmän helppokäyttöisyyteen ja yksinkertaisuuteen. Menetelmässä VaR-mitan estimointi pelkistyy yksiulotteisen empiirisen tappiojakauman estimointiin, mikä on huomattavasti riskifaktorituottojen yhteisjakauman estimointia yksinkertaisempaa (McNeil ym. 2015, 342–343). Toisin kuin esimerkiksi varianssi-kovarianssimenetelmää, historiallista simulointia voidaan soveltaa myös portfolioihin, joissa portfolion tappio ei ole riskifaktorituottojen lineaarinen funktio. Koska menetelmässä ei tehdä riskifaktorituottojen yksiulotteisia jakaumia tai riippuvuusrakenteita koskevia yksinkertaistavia oletuksia, menetelmän avulla voidaan huomioida parametrisia menetelmiä monipuolisemmin ja realistisemmin riskifaktorituottojen empiirisiä ominaisuuksia, kuten normaalijakaumasta poikkeavia riippuvuussuhteita ja paksuhäntäisyyttä. (Jorion 2001, 223; Alexander 2008b, 141.) Menetelmän yksinkertaisuus ja todellisuutta yksinkertaistavien oletusten puute ovatkin keskeisiä syitä siihen, että menetelmä on käytetyin VaR-mitan estimointimenetelmä pankeissa. Perignonin ja Smitthin (2010) mukaan 73 % estimointimenetelmänsä paljastaneista pankeista sovelsi historiallista simulointia VaR-mitan estimoinnissa vuonna 2005.

Historiallisen simuloinnin heikkoutena on ennen kaikkea se, että mallin toimivuus riippuu hyvin vahvasti simuloinnin perustana käytettävästä riskifaktorituottojen aineistosta. Jotta menetelmään pohjautuva VaR-mitan estimaattori kuvaisi riittävän tarkasti todellisen tappiojakauman  $\alpha$ -kvantiilia, tulee historiallisten riskifaktorituottojen aikasarjan olla riittävän pitkä, kuten esityksestä (2.25) ilmenee. Käytännössä tämä saattaa asettaa mallin soveltajalle huomattavia haasteita, mikäli käytettävissä oleva historiallisten riskifaktorituottojen aikasarja on erittäin lyhyt tai puutteellinen. (Alexander 2008b, 145; McNeil ym. 2015, 343.)

Vaikka historiallinen simulointi ei sisällä eksplisiittisiä oletuksia riskifaktorituottojen tai portfolion tappioiden jakaumasta, se olettaa implisiittisesti, että liukuvan estimointiikkunan sisältämät tappiot ovat IID-jakautuneita. Tämä oletus puolestaan johtaa oletukseen, että koko aikasarja on IID-jakautunut, mikä puolestaan on ristiriidassa taloudellisten

aikasarjojen empiiristen ominaisuuksien kanssa. Menetelmään pohjautuvat VaR-estimaatit ovat mielekkäitä vain, mikäli estimoinnin perustana käytettävä aineisto kuvaa vallitsevia markkinaolosuhteita mahdollisimman hyvin. Koska menetelmä käsittelee vanhoja ja tuoreita tuottohavaintoja samalla tavalla, liian pitkien estimointi-ikkunoiden soveltaminen voi johtaa VaR-estimaatteihin, jotka eivät edusta portfolion nykyistä riskiprofiilia ja jotka reagoivat hitaasti markkinaregiimin muutoksiin. Koska empiiristen kvantiiliestimaattorien tilastollinen tarkkuus edellyttää toisaalta mahdollisimman pitkien estimointi-ikkunoiden soveltamista, menetelmää voidaan pitää loogisesti epä johdonmukaisena. (Dowd 2002, 73; Manganelli & Engle 2004.)

Koska tavanomainen historiallinen simulointi on ehdollistamaton menetelmä, sen avulla ei voida tuottaa dynaamisia ja portfolion riskiprofiilin muutoksiin nopeasti reagoivia VaR-estimaatteja (McNeil ym. 2015, 343). Mikäli menetelmän perustana oleva aineisto edustaa ajanjaksoa, jolloin markkinoiden volatilitteetti on ollut poikkeuksellisen alhainen, menetelmä tuottaa liian pieniä VaR-estimaatteja, mikäli markkinoiden volatilitteetti kohoaa voimakkaasti ennustejaksolla, sillä liukuva estimointi-ikkuna sisältää pääasiassa havaintoja alhaisen volatilitteetin jaksolta. Siirtymä poikkeuksellisen korkean volatilitteetin jaksolta alhaisen volatilitteetin jaksolle johtaa puolestaan liian korkeisiin VaR-estimaatteihin. (Manganelli & Engle 2004.)

Tavanomaisen historiallisen simuloinnin ongelmakohtia voidaan lieventää soveltamalla esimerkiksi Barone-Adesin, Bourgoinin ja Giannopoulosin (1998) sekä Barone-Adesin, Giannopoulosin ja Vosperin (1999) esittelemää ehdollista historiallista simulointia (Filtered Historical Simulation, FHS), joka ottaa huomioon esimerkiksi tuottoaikasarjojen volatilitteetin ajallisen vaihtelun ja klusteroitumisen. Yksiulotteisessa tapauksessa portfoliotuottojen aineistoon sovitetaan esimerkiksi jokin ARMA-GARCH-malli, minkä jälkeen muodostetaan standardoitujen jäännösten aikasarja ARMA-GARCH-mallin mukaisesti odotusarvo- ja volatilitteettiestimaatteihin perustuen. Standardoidut jäännökset voidaan nähdä kaavassa (2.18) esitetyn prosessin innovaatiotermien empiirisinä vastineina. VaR-mitta voidaan tämän jälkeen estimoida soveltamalla kaavaa (2.19), jossa innovaatiojakauman käänteisfunktion  $G_z^{-1}$  estimaattorina käytetään standardoitujen jäännösten empiirisen jakauman kvantiilia.

Ehdollista historiallista simulointia voidaan soveltaa myös moniulotteisessa tarkastelussa. Moniulotteisessa lähestymistavassa riskifaktorituottojen oletetaan tyypillisesti noudattavan prosessia

$$\mathbf{X}_s = \boldsymbol{\mu}_s + \mathbf{D}_s \mathbf{Z}_s, \quad (2.27)$$

missä  $\boldsymbol{\mu}_s = (\mu_{s,1}, \dots, \mu_{s,d})'$  kuvaa yksittäisten riskifaktorituottojen ajanhetken  $s$  ehdollisista odotusarvoista muodostettua vektoria,  $\mathbf{D}_s = \text{diag}(\sigma_{s,1}, \dots, \sigma_{s,d})$  on riskifaktorituottojen ajanhetken  $s$  ehdollisista volatilitteeteista muodostettu diagonaalimatriisi ja  $\mathbf{Z}_s$  on IID-ja-

kautuneista innovaatiotermeistä muodostettu vektori. Menetelmän ensimmäisessä vaiheessa riskifaktorituottojen yksiulotteisiin aikasarjoihin sovitetaan esimerkiksi ARMA-GARCH-malleja, joiden avulla saadaan estimaatit vektorille  $\boldsymbol{\mu}_s$  ja matriisille  $\mathbf{D}_s$  ajanhetkinä  $s = t - n - 1, \dots, t$ . Seuraavassa vaiheessa muodostetaan standardoitujen jäännösten moniulotteinen aikasarja soveltamalla ehdollisten odotusarvojen ja volatiliteettien estimaatteja sekä esitystä (2.27):

$$\{\hat{\mathbf{Z}}_s = \hat{\mathbf{D}}_s^{-1}(\mathbf{X}_s - \hat{\boldsymbol{\mu}}_s) : s = t - n + 1, \dots, t\}. \quad (2.28)$$

Tämän jälkeen standardoitujen jäännösten aikasarjat muunnetaan simuloituiksi riskifaktorituotoiksi soveltamalla kunkin riskifaktorituoton ajanhetken  $t + 1$  odotusarvo- ja volatiliteettiennustetta standardoitujen jäännösten aikasarjaan. Soveltamalla ajanhetken  $t$  tappio-operaattoria simuloituihin riskifaktorituottoihin saadaan tappioiden simuloitu aikasarja

$$\{\tilde{L}_s = l_{[t]}(\hat{\mathbf{X}}_s) = l_{[t]}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{t+1} + \hat{\mathbf{D}}_{t+1}\hat{\mathbf{Z}}_s) : s = t - n + 1, \dots, t\}. \quad (2.29)$$

VaR-mitta voidaan tämän jälkeen estimoida soveltamalla esimerkiksi empiiristä kvanttiliestimaattoria esityksen (2.26) mukaisesti. (Barone-Adesi ym. 1999; McNeil ym. 2015, 345–346.)

Koska moniulotteisessa ehdollisessa historiallisessa simuloinnissa tappioiden simulointi perustuu aina riskifaktorituottojen standardoitujen jäännösten vektoriin tiettyinä ajanhetkenä  $s = t - n - 1, \dots, t$ , malli sisältää riskifaktorituottojen empiirisessä aineistossa esiintyvät riskifaktorituottojen väliset riippuvuussuhteet implisiittisesti (Barone-Adesi ym. 1999). Mallin avulla riskifaktorituottojen riippuvuus rakenne voidaan näin ollen huomioida realistisemmin kuin esimerkiksi moniulotteisissa parametrisissa malleissa, joissa riippuvuus rakenteen kuvaus rajoittuu useimmiten lineaariseen korrelaatioon. Koska portfolion simuloitu tappiojakauma ja simuloitut riskifaktorituotot pohjautuvat ajanhetken  $t$  informaatioon perustuviin odotusarvo- ja volatiliteettiennusteisiin, malli heijastaa tavanomaista historiallista simulointia paremmin vallitsevia markkinaolosuhteita ja reagoi nopeammin markkinaregiimin muutoksiin. Mallin dynaamisen luonteen vuoksi mallin ennustekyky onkin useimmiten tavanomaista historiallista simulointia parempi.

### 2.3.3 Monte Carlo -menetelmä

Monte Carlo -menetelmässä riskifaktorituottojen oletetaan noudattavan jotakin parametrisoitua mallia, jonka avulla voidaan simuloida useita hypoteettisia riskifaktorituottojen

vektoreita, jotka muunnetaan portfolion simuloituiksi tappioiksi soveltamalla ennustehetken tappio-operaattoria. Portfoliotappioiden simuloitujen realisaatiot voidaan näin ollen esittää seuraavasti

$$\{\tilde{L}_{t+1}^{(i)} = l_{[t]}(\tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(i)}) : i = 1, \dots, m\}, \quad (2.30)$$

missä  $m$  on simulointien kokonaismäärä ja  $\{\tilde{\mathbf{X}}_{t+1}^{(i)} : i = 1, \dots, m\}$  kuvaa riskifaktorituottojen todennäköisyysjakauman  $\hat{F}_{\mathbf{X}_{t+1}|\Omega_t}$  avulla simuloituja riskifaktorituottojen vektoreita. (McNeil ym. 2015, 346.) Riskifaktorituottojen todennäköisyysjakauman parametrit voidaan estimoida historiallisten riskifaktorituottojen aineistosta, joka sisältää esimerkiksi  $n$  viimeisintä realisoitunutta riskifaktorituottojen vektoria  $\{\mathbf{X}_{t-n+1}, \dots, \mathbf{X}_t\}$ . Riskifaktorituottojen jakauman spesifioinnissa voidaan vaihtoehtoisesti soveltaa myös täysin hypoteettisia jakaumaparametreja, jotka heijastavat esimerkiksi jotakin äärimmäistä markkinaskaenaariota. Monte Carlo -menetelmässä portfolion VaR-mitta voidaan määrittää täysin vastaavalla tavalla kuin historiallisessa simuloinnissa soveltamalla kaavoissa (2.25) ja (2.26) esitettyjä empiirisen kertymäfunktion ja sen  $\alpha$ -kvantiilin estimaattoreita simuloitujen tappioiden aineistoon. (Jorion 2001, 224–225; Alexander 2008b, 214.)

Monte Carlo -menetelmän keskeisin etu historialliseen simulointiin nähden perustuu siihen, että simulaatioiden lukumäärä  $m$  voidaan periaatteessa asettaa kuinka suureksi tahansa, eikä menetelmän soveltaminen tyypillisesti edellytä yhtä suurta havaintoaineistoa kuin historiallinen simulointi, jossa saatavilla olevien historiallisten riskifaktorituottojen määrä on yksi keskeisimmistä menetelmää koskevista rajoitteista. Koska empiirisen kvantiiliestimaattorin tarkkuus riippuu merkittävästi simuloitujen tappioiden lukumäärästä, Monte Carlo -menetelmällä voidaan usein tuottaa tarkempia VaR-estimaatteja kuin historiallisella simuloinnilla. Monte Carlo -menetelmä soveltuu myös pidempien riskihorisonttien VaR-mittojen estimointiin huomattavasti historiallista simulointia paremmin. (Alexander 2008b, 214, 234; McNeil ym. 2015, 346.)

Monte Carlo -menetelmällä on historiallisen simuloinnin lisäksi selkeitä yhtymäkohtia VaR-mittaan parametrisiin estimointimenetelmiin. Monte Carlo -menetelmän soveltaminen edellyttää parametrusten menetelmien tapaan riskifaktorituottojen yhteisjakauman spesifiointia, minkä vuoksi menetelmän tulosten tarkkuus ja ennustekyky riippuu täysin riskifaktorituottojen parametrin mallin valinnasta. Näin ollen menetelmän soveltamiseen liittyy aina huomattavasti historiallista simulointia suurempi malliriski, mitä voidaan pitää yhtenä menetelmän keskeisistä heikkouksista. (Jorion 2001, 226; McNeil ym. 2015, 346.) Yksinkertaisimmillaan Monte Carlo -menetelmässä oletetaan, että portfoliotappiot ovat riskifaktorituottojen lineaarisia funktioita ja että riskifaktorituotot noudattavat multinormaalijakaumaa tai jotakin muuta lineaaristen muunnosten suhteen suljettua moniulotteista jakaumaa. Mikäli simulointien lukumäärä on riittävän suuri, Monte Carlo -menetelmän tulisi johtaa samoihin tuloksiin kuin vastaaviin jakaumaoletuksiin perustuvat

parametriset menetelmät. Monte Carlo -menetelmän luonteen vuoksi VaR-estimaatit ovat kuitenkin simulointivirheiden takia aina epätarkempia kuin vastaaviin oletuksiin perustuvilla parametrisilla menetelmillä lasketut VaR-estimaatit, joille on olemassa analyttinen suljetun muodon ratkaisu. Monte Carlo -menetelmän soveltaminen esimerkiksi riskifaktorituottojen multinormaalisuusoletukseen perustuen ei näin ollen ole mielekäästä. (Alexander 2008b, 44–25, 234.)

Monte Carlo -menetelmän merkittävin etu suhteessa parametrisiin estimointimenetelmiin perustuu menetelmän joustavuuteen ja monipuolisuuteen. Monte Carlo -menetelmä soveltuu lineaaristen portfolioiden lisäksi myös riskifaktorituottojen suhteen epälineaaristen portfolioiden, kuten johdannaisportfolioiden, VaR-estimointiin. Siinä missä parametriset menetelmät rajoittuvat riskifaktorituottojen jakaumaoletusten osalta yksinkertaisimpiin moniulotteisiin todennäköisyysjakaumiin, Monte Carlo -menetelmässä riskifaktorituottojen simuloinnin perustaksi voidaan valita mikä tahansa parametrisoitu malli, jonka avulla voidaan mallintaa esimerkiksi riskifaktorituottojen paksuhäntäisyyttä, autokorrelaatiota ja heteroskedastisuutta sekä elliptisistä jakaumista poikkeavia riippuvuusrakenteita. (Alexander 2008b, 44–45, 234.)

Lukuisista simuloinneista ja monimutkaisten parametrusten mallien kalibroinnista johtuva laskennallinen raskaus on malliriskin ohella yksi Monte Carlo -menetelmän olennaisimmista ongelmakohtista. Menetelmän laskennallinen raskaus korostuu erityisesti, jos tarkasteltavan portfolion ulottuvuus on korkea ja jos portfolio sisältää useita johdannaisia, joiden hinnalle ei ole olemassa suljetun muodon esitystä. Tällaisissa tapauksissa Monte Carlo -menetelmän soveltaminen voi johtaa useisiin sisäkkäisiin simulointeihin, sillä yksittäiset johdannaispositiot on myös arvoitettava simuloinnin avulla. Menetelmän soveltaminen edellyttää näin ollen, että yrityksellä on käytössään riittävän tehokkaat ohjelmistot sekä riittävän korkea asiantuntemus monimutkaisten positioiden riskienhallinnasta. Tästä syystä Monte Carlo -menetelmään pohjautuvien VaR-mallien käyttöönotto on useimmiten muihin estimointimenetelmiin perustuvia malleja kalliimpaa. (Jorion 2001, 226; McNeil ym. 2015, 60.) Selkeistä ongelmakohtistaan huolimatta Monte Carlo -menetelmää voidaan pitää VaR-mitan estimointimenetelmistä monipuolisimpana ja kattavimpana.

## 2.4 Toteumatestauksesta ja mallien ennustekyvyn vertailusta

VaR-mallit altistuvat aina jossain määrin malli- ja estimointiriskille. Malliriski viittaa väärin spesifioitun mallin soveltamiseen liittyviin riskeihin ja sen lähteitä ovat ennen kaikkea riskifaktorituottojen jakaumaa koskevat oletukset sekä portfolion tappiojakauman kvantiilimitan määrittämisessä sovellettavat menetelmät. Estimointiriski liittyy puolestaan valitun riskimallin parametrien estimoinnissa sovellettaviin menetelmiin ja

siihen, miten eri estimointimenetelmät vaikuttavat estimoitujen riskimittojen tarkkuuteen. Esimerkiksi parametrien estimoinnissa käytettävien havaintojen lukumäärä on yksi keskeisistä estimointiriskin lähteistä. Sovellettavien VaR-mallien malli- ja estimointiriskin arvioimiseksi mallien ennustekykyä tulee testata. VaR-mallien toteumatestauksen eli VaR-estimaattien ja portfolion toteutuneiden tappioiden tai tuottojen vertailun avulla voidaan selvittää, voidaanko mallien avulla tuottaa riittävän tarkkoja VaR-estimaatteja ja mitkä mallit tuottavat tarkimpia estimaatteja. (Alexander 2008b, 311 – 312, 324; McNeil ym. 2015, 351–352.)

VaR-mallien toteumatestaus perustuu sekä VaR-estimaateista että portfolion toteutuneista tappioista muodostettuihin aikasarjoihin. Toteumatestauksessa ajanhetkellä  $t$  muodostettua portfolion VaR-estimaattia verrataan seuraavalla periodilla  $t + 1$  realisoituneeseen tappioon. Tyypillisesti toteumatestauksessa sovelletaan kaksiarvoista indikaattori-funktiota  $\mathbf{1}_{t+1}$ , joka määritellään seuraavasti

$$\mathbf{1}_{t+1} = \mathbf{1}\left[L_{t+1} > \text{VaR}_\alpha^t\right] = \begin{cases} 1, & \text{kun } L_{t+1} > \text{VaR}_\alpha^t \\ 0, & \text{kun } L_{t+1} \leq \text{VaR}_\alpha^t \end{cases}. \quad (2.31)$$

VaR-mitan ylityksiin perustuvissa testeissä hyvältä VaR-mallilta edellytettävät ominaisuudet muotoillaan indikaattorifunktioiden aikasarjaa koskeviksi hypoteeseiksi. (Alexander 2008b, 333–334; McNeil ym. 2015, 353.)

Jotta VaR-mallia voitaisiin pitää oikein spesifioituna, tulee VaR-mitan ylittävien tappioiden lukumäärän ensinnäkin vastata ylitysten odotettua lukumäärää, joka puolestaan perustuu VaR-mitan luottamustasoon. Jos toteumatestausaineisto sisältää esimerkiksi 1000 VaR-estimaattia ja tappiohavaintoa, VaR-mitta 95 %:n luottamustasolla ylitetään odotusarvoisesti 50 kertaa toteumatestausjaksolla. (Dowd 2002, 181–182.) Kupiec (1995) ehdollistamattoman kattavuuden (unconditional coverage) testi on yksi yleisimmistä VaR-mallien toteumatestauksessa sovelletuista tilastollisista testeistä, joka voidaan nähdä myös Basel-säännöksissä sovelletun vyöhykemallin yleistyksenä (Alexander 2008b, 337). Kupiec (1995) testissä testataan, poikkeako ylitysten suhteellinen frekvenssi sovelletun VaR-mitan riskitasosta tilastollisesti merkitsevästi. Testin nollahypoteesi on näin ollen muotoa  $E(\mathbf{1}_{t+1}) = P(\mathbf{1}_{t+1} = 1) = 1 - \alpha$ . Mikäli nollahypoteesi hylätään, VaR-mallia voidaan pitää väärin spesifioituna, sillä se joko ali- tai yliarvioi portfolion riskiä.

VaR-mitan ylitysten tulisi myös olla toisistaan riippumattomia, mikä tarkoittaa sitä, että ylityksen todennäköisyys ajanhetkellä  $t + 1$  on riippumaton aikaisempien periodien ylityksistä. Mikäli riippumattomuusoletus ei toteudu, ylitykset voivat esiintyä ryppäinä, mikä puolestaan saattaa aiheuttaa malleja soveltaville rahoituslaitoksille vakavampia ongelmia kuin ylitykset, jotka tapahtuvat toisistaan riippumattomasti ja suhteellisen tasaisin välein. Kupiec (1995) testi ei kuitenkaan huomioi ylityksiltä edellytettävää riippumat-

tomuusominaisuutta. Christoffersenin (1998) esittelemä riippumattomuudesta sekä ehdollisen kattavuuden (conditional coverage) testi sen sijaan huomioivat indikaattorifunktioiden aikasarjassa esiintyvän autokorrelaation, minkä vuoksi niiden avulla voidaan tunnistaa ja hylätä VaR-malli, joka johtaa klusteroituneisiin ja toisistaan riippuvaisiin ylityksiin. Ehdollisen kattavuuden testi on ylitysten riippumattomuuden ja ehdollistamattoman kattavuuden yhteistesti, jonka avulla voidaan tunnistaa mallit, jotka joko rikkovat ylitysten riippumattomuusoletusta tai johtavat odotuksista poikkeaviin ylitysmääriin. Ehdollisen kattavuuden testissä nollahypoteesi on muotoa  $E(\mathbf{1}_{t+1} | \Omega_t) = 1 - \alpha$ . Nollahypoteesin toteutuessa indikaattorifunktioiden aikasarja koostuu riippumattomista ja Bernoulli-jakautuneista muuttujista, joiden onnistumistodennäköisyys on  $1 - \alpha$ . Toisin sanoen ehdollisen kattavuuden testin nollahypoteesi on yhtäpitävä ehdon  $\{\mathbf{1}_t\} \stackrel{iid}{\sim} B(1 - \alpha), \forall t$  kanssa.

Kupiecien (1995) ja Christoffersenin (1998) testit ovat esimerkkejä absoluuttisen ennustekyvyn testeistä. Ennustemallien absoluuttisten arviointikriteerien avulla voidaan tutkia, onko malli oikein spesifioitu tai täyttääkö ennusteiden aikasarja tietyt optimaalisuusehdot. Absoluuttisten ennustekyvyn testien avulla voidaan näin ollen tunnistaa hyväksyttävästi toimivat mallit, mutta niiden avulla ei voida tehdä johtopäätöksiä ennustemallien suhteellisesta ennustekyvystä, minkä vuoksi absoluuttiset arviointikriteerit eivät sovellu eri mallien vertailuun. (Giacomini & Komunjer 2005.) Ylitysten lukumäärän lisäksi VaR-mallien ennustekykyä arvioitaessa on olennaista tutkia, kuinka suuria VaR-mitan ylitykset ovat. Ylitysten suuruuteen perustuvassa arvioinnissa sovelletaan usein tappiofunktioita, jotka mittaavat VaR-estimaattien ja toteutuneiden tappioiden välistä eroa ja joiden avulla eri mallit voidaan pisteyttää ja asettaa paremmuusjärjestykseen. (Lopez 1998.)

Tappiofunktioit liittyvät läheisesti optimaalisten ennusteiden teoriaan. Mikäli ennuste  $y_t$  on jokin satunnaismuuttujan  $L_{t+1}$  jakaumaa kuvaileva tilastollinen funktionaali, kuten esimerkiksi keskiarvo tai mediaani, ennusteen sanotaan olevan optimaalinen, mikäli se minimoi odotusarvon  $E(S(y_t, L_{t+1}) | \Omega_t)$  jollakin tappiofunktiolla  $S: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Tällöin eri ennustemallien suorituskykyä voidaan vertailla luontevasti empiirisen tappiofunktion arvojen summan tai keskiarvon avulla. (Giacomini & Komunjer 2005; McNeil ym. 2015, 355–356.) Tappiofunktioita voidaan myös hyödyntää mallien suhteellista ennustekykyä mittaavissa tilastollisissa testeissä, kuten esimerkiksi Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testissä.

Tappiofunktion tyyppi riippuu luonnollisesti tarkasteltavasta tilastollisesta funktionaalista. VaR-mittaa vastaava tilastollinen funktionaali on ehdollisen tappiojakauman  $\alpha$ -kvantiili, jonka kanssa johdonmukainen tappiofunktio on muotoa

$$S_\alpha(e_{t+1}) = (\alpha - \mathbf{1}[e_{t+1} < 0])e_{t+1}, \quad (2.32)$$

missä  $e_{t+1} = L_{t+1} - \text{VaR}_\alpha^t$ . Optimaalinen VaR-malli minimoi näin ollen kaavassa (2.32) esitetyn tappiofunktion odotusarvon. Käytännössä VaR-mallien vertailu perustuu esimer-

kiksi toteumatestausjakson tappioiden ja VaR-estimaattien avulla laskettujen tappiofunktion arvojen keskiarvoon. Kuten tappiofunktion muodosta ilmenee, VaR-mitan ylittävät tappiot kasvattavat tappiofunktion arvoa voimakkaammin kuin yhtä suuret VaR-mitan alitukset, minkä vuoksi kaavassa esitettyä tappiofunktiota kutsutaan asymmetriseksi tappiofunktioiksi. ES-mitalle ei sen sijaan ole olemassa johdonmukaista tappiofunktiota, minkä vuoksi ES-estimaattien vertailu tilastotieteellisesti mielekkäällä tavalla ei ole mahdollista. (Gneiting 2011; Ziegel 2016.)



### 3 KOPULAFUNKTIOT RIIPPUVUUSRAKENTEIDEN MAL- LINNUKSESSA

#### 3.1 Kopuloiden teoriasta ja riippuvuuden mittareista

##### 3.1.1 Kopulafunktion määritelmä ja keskeiset ominaisuudet

Satunnaismuuttujan todennäköisyys- ja kvantiilimuunnokset ovat merkittävässä asemassa kopulafunktioiden teoriassa ja käytännön sovelluksissa, kuten simuloinnissa. Olkoon  $U \sim U(0, 1)$  tasajakautunut satunnaismuuttuja ja  $X \sim F$  satunnaismuuttuja, jonka kertymäfunktio on  $F$ . Mikäli  $F^{\leftarrow}$  on kertymäfunktion  $F$  yleistetty käänteisfunktio, tällöin tasajakautuneen muuttujan  $U$  kvantiilimuunnokselle pätee  $F^{\leftarrow}(U) \sim F$ . Kvantiilimuunnoksen avulla voidaan näin ollen simuloida jakaumaa  $F$  noudattavia satunnaismuuttujia soveltamalla kertymäfunktion käänteisfunktia tasajakautuneeseen muuttujaan  $U$ . Mikäli  $F$  on jatkuva, tällöin muuttujan  $X$  todennäköisyysmuunnokselle on puolestaan voimassa  $F(X) \sim U(0, 1)$ . (Embrechts ym. 2002.)

Kopulafunktio määritellään kuvauksena  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , joka toteuttaa ehdot  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ , jos  $u_i = 0$  jollakin  $i \in \{1, \dots, d\}$  ja  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, d\}$  ja mikäli kaikilla  $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ ,  $a_i \leq b_i$ , on voimassa

$$\sum_{i_1=1}^2 \cdots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0, \quad (3.1)$$

missä  $u_{j1} = a_j$  ja  $u_{j2} = b_j$  kaikilla  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Kopulafunktio  $C$  voidaan näin ollen tulkita satunnaisvektorin  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)'$  moniulotteiseksi kertymäfunktioiksi

$$C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d), \quad (3.2)$$

missä satunnaisvektorin  $(U_1, \dots, U_d)'$  yksiulotteiset reunajakaumat ovat tasajakaumia välillä  $[0, 1]$ . (Nelsen 2006, 45; McNeil ym. 2015, 221.)

Satunnaismuuttujan yhteisjakauman ja kopulafunktion määritelmiä sekä kvantiili- ja todennäköisyysmuunnoksia soveltamalla satunnaismuuttujien yhteis- ja reunajakaumien sekä kopulafunktioiden yhteys voidaan tiivistää Sklarin (1959) lauseeseen, joka on yksi kopuloiden teorian keskeisimmistä tuloksista. Mikäli  $F$  on satunnaisvektorin  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)'$  moniulotteinen kertymäfunktio ja mikäli  $F_1, \dots, F_d$  ovat yksittäisten satunnaismuuttujien reunajakaumia, tällöin on olemassa kopulafunktio  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  siten, että

$$F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)). \quad (3.3)$$

Kopulafunktion määritelmän (3.2) ja Sklarin (1959) lauseen nojalla satunnaisvektorin  $\mathbf{X}$  kopula on näin ollen satunnaisvektorin  $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))'$  moniulotteinen kertymäfunktio. Mikäli reunajakaumat ovat jatkuvia, tällöin kopulafunktio  $C$  on yksikäsitteinen. Toisaalta, mikäli  $C$  on kopula ja  $F_1, \dots, F_d$  ovat yksiulotteisia kertymäfunktioita, tällöin esityksen (3.3) mukaan määritelty funktio  $F$  on satunnaisvektorin  $\mathbf{X}$   $d$ -ulotteinen kertymäfunktio, jonka reunajakaumat ovat  $F_1, \dots, F_d$ . Sklarin (1959) lauseen seurauksena satunnaisvektorin  $\mathbf{X}$  kopulafunktio voidaan myös ilmaista satunnaisvektorin yhteisjakauman ja reunajakaumien avulla seuraavasti

$$C(\mathbf{u}) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)). \quad (3.4)$$

Esityksen (3.4) mukaan kopulafunktion arvo  $C(u_1, \dots, u_d)$  ilmaisee siis yhteistodennäköisyyden sille, että  $X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u_1) \cap X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u_2) \cap \dots \cap X_d \leq F_d^{\leftarrow}(u_d)$ .

Kopulafunktioiden invarianssiominaisuus on Sklarin (1959) lauseen ohella yksi keskeisistä kopulafunktioiden ominaisuuksista. Olkoon  $(X_1, \dots, X_d)'$  satunnaisvektori, jonka kopulafunktio on  $C$  ja jonka reunajakaumat ovat jatkuvia. Mikäli  $T_1, \dots, T_d$  ovat aidosti kasvavia kuvauksia, tällöin satunnaisvektorin  $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))'$  kopulafunktio on myös  $C$ . (McNeil ym. 2015, 224.) Invarianssiominaisuuden mukaan satunnaisvektorin kopulafunktio pysyy siis muuttumattomana, vaikka yksittäiset satunnaismuuttujat muunnettaisiin uusiksi muuttujiksi soveltamalla aidosti kasvavia funktioita. Esimerkiksi riskifaktorituottojen kopulafunktio ei muutu, vaikka riskifaktorituotot muunnettaisiin prosentuaalisista tuotoista logaritmisiksi tuotoiksi (Embrechts ym. 2002).

Sklarin (1959) lauseen ja kopulafunktioiden invarianssiominaisuuden nojalla satunnaismuuttujien moniulotteinen yhteisjakauma voidaan jakaa yksittäisten muuttujien ominaisuuksia kuvaaviin reunajakaumiin sekä kopulafunktioon, joka sisältää kaiken informaation muuttujien välisestä riippuvuusrakenteesta (Malevergne & Sornette 2006, 105). Koska kopulafunktiot mahdollistavat muuttujien riippuvuusrakenteen ja reunajakaumien eriyttämisen, portfolion kokonaisriskin tarkastelu voidaan näin ollen myös jakaa yksittäisten riskifaktorituottojen jakaumaominaisuuksien sekä riskifaktorituottojen välisten riippuvuussuhteiden analysointiin, mikä antaa täsmällisemmän ja syvällisemmän kuvan portfolion riskiprofiilista (Jouanin, Riboulet & Roncalli 2004). Huomionarvoista on myös se, että kaavassa (3.3) esiintyvä kuvauserhe  $(F_1, \dots, F_d, C)$  on mielivaltainen. Mielivaltaisia reunajakaumia ja kopulafunktioita yhdistelemällä voidaan näin ollen teoriassa rakentaa rajaton määrä erilaisia yhteisjakaumia, mikä tekee kopulafunktioihin nojaavasta mallinnustavasta hyvin joustavan ja monipuolisen (Cherubini ym. 2004, 60–61).

Kaikille kopulafunktioille voidaan määrittää ala- ja yläraja, jotka voidaan tulkita muuttujien välisen riippuvuuden ääritapauksiksi. Kopulafunktioiden rajoja kutsutaan Fréchet-Hoeffding-rajoiksi. Mikäli  $C$  on jokin kopulafunktio, tällöin kaikilla  $u_1, \dots, u_d \in [0, 1]$  on voimassa

$$W^d(\mathbf{u}) = \max\left(\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right) \leq C(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \dots, u_d) = M^d(\mathbf{u}), \quad (3.5)$$

missä funktio  $W^d$  on alempi Fréchet-Hoeffding-rajaja ja funktio  $M^d$  on ylempi Fréchet-Hoeffding-rajaja.  $M^d$  on itsessään kopulafunktio kaikilla  $d \geq 2$ , kun taas  $W^d$  on kopulafunktio vain, mikäli  $d = 2$ . Satunnaismuuttujien täydellinen positiivinen riippuvuus voidaan määrittellä ylempään Fréchet-Hoeffding-rajan avulla, minkä vuoksi rajaa kutsutaan myös komonotonisuuskopulaksi. Satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_d$  ovat lähes varmasti toistensa aidosti kasvavia funktioita eli täydellisesti positiivisesti riippuvaisia, jos ja vain jos satunnaisvektorin  $(X_1, \dots, X_d)'$  kopulafunktio on  $M^d$ . Portfolion tappiojakaumaa tarkasteltaessa riskifaktorituottojen täydellinen positiivinen riippuvuus viittaa siis tilanteeseen, jossa riskifaktorituotot ovat jonkin yksittäisen satunnaismuuttujan deterministisiä ja aidosti kasvavia funktioita. Tällöin portfolion VaR-mitta vastaa riskifaktorituottojen yksiulotteisille jakaumille laskettujen VaR-mittojen summaa. (Nelsen 2006, 47–48; McNeil ym. 2015, 236–237.)

Satunnaismuuttujien täydellinen negatiivinen riippuvaisuus voidaan sen sijaan määrittellä vain kaksiulotteisessa tapauksessa. Satunnaismuuttujat  $X_1$  ja  $X_2$  ovat täydellisesti negatiivisesti riippuvaisia, jos ja vain jos satunnaisvektorin  $(X_1, X_2)'$  kopula on  $W^2$ . Fréchet-Hoeffding-rajajen lisäksi myös tulokopulalla on keskeinen tulkinta satunnaismuuttujien välisen riippuvuuden erityistapauksena. Tulokopula määritellään seuraavasti

$$\Pi^d(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^d u_i. \quad (3.6)$$

Satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_d$  ovat riippumattomia, jos ja vain jos satunnaisvektorin  $(X_1, \dots, X_d)'$  kopulafunktio on tulokopula. (Nelsen 2006, 47–48; McNeil ym. 2015, 237.)

### 3.1.2 Simuloinnista ja kopulafunktioiden estimoinnista

Kuten Sklarin (1959) lauseesta ilmenee, kopulafunktioita ja yksiulotteisia reunajakaumia yhdistelemällä voidaan simuloida moniulotteista jakaumaa  $F$  noudattavia satunnaismuuttujia, joilla on reunajakaumat  $F_1, \dots, F_d$  ja joiden riippuvuusrakente määrytyy kopulafunktion  $C$  perusteella. Kopulafunktioihin pohjautuvaa simulointia voidaan soveltaa esimerkiksi riskifaktorituottojen Monte Carlo -simuloinnissa. Moniulotteista jakaumaa  $F$  noudattavan satunnaisvektorin  $(X_1, \dots, X_d)'$  simulointi voidaan jakaa kahteen vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa simuloidaan  $d$  tasajakautunutta satunnaismuuttujaa  $U_1, \dots, U_d$ , joiden moniulotteinen kertymäfunktio on  $C$ . Toisessa vaiheessa kuhunkin tasajakautuneeseen satunnaismuuttujaan sovelletaan satunnaisvektorin  $(X_1, \dots, X_d)'$  reunajakaumien käänteisfunktiota. Sklarin (1959) lauseen mukaisesti simuloitu satunnaisvektori

$(F_1^{\leftarrow}(U_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(U_d))'$  noudattaa moniulotteista jakaumaa  $F(\mathbf{x}) = C(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$  reunajakaumilla  $F_1, \dots, F_d$ . (Malevergne & Sornette 2006, 120; McNeil ym. 2015, 230.)

Simulointimenetelmän suurimpana haasteena on kopulafunktion  $C$  mukaista riippuvuusrakennetta noudattavien tasajakautuneiden muuttujien simulointi menetelmän ensimmäisessä vaiheessa. Käytännössä satunnaisvektorin  $\mathbf{U}$  simuloinnissa sovellettu menetelmä riippuu kopulafunktion  $C$  tyypistä. Elliptisten kopulafunktioiden, kuten Gaussin kopulan ja t-kopulan, tapauksessa satunnaisvektorin  $\mathbf{U}$  simulointi on varsin yksinkertaista, sillä menetelmässä voidaan hyödyntää multinormaalijakaumaa tai moniulotteista t-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien simuloinnissa sovellettuja menetelmiä. Haastavammissa tapauksissa joudutaan soveltamaan kopulafunktioiden ehdollisiin jakaumiin perustuvaa yleistettyä simulointimenetelmää, joka soveltuu erityisen hyvin esimerkiksi Arkhimedeeseen kopulafunktioiden simulointiin. (Cherubini ym. 2004, 180–181; Malevergne & Sornette 2006, 122–123.)

Risikifaktorituottojen reunajakaumien empiirisiä ominaisuuksia sekä riippuvuusrakennetta kuvaavan yhteisjakauman estimointi on usein varsin haastavaa. Estimointiongelmia voidaan kuitenkin helpottaa huomattavasti soveltamalla kopulafunktioita, sillä Sklarin (1959) lauseen mukaisesti myös moniulotteisen kertymäfunktion estimointiongelmia voidaan jakaa reunajakaumien ja kopulafunktion estimointiin. (McNeil ym. 2015, 266.) Määrittelemällä kopulatiheys  $c$  seuraavasti

$$c(\mathbf{u}) = \frac{\partial^d C(\mathbf{u})}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \quad (3.7)$$

ja derivoimalla kaavan (3.3) oikean puolen yhteisjakauman esitys kunkin muuttujan suhteen satunnaisvektorin  $\mathbf{X}$  tiheysfunktio  $f$  voidaan esittää muodossa

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \cdot \prod_{j=1}^d f_j(x_j), \quad (3.8)$$

missä  $f_j$  on satunnaismuuttujan  $X_j$  reunajakauman tiheysfunktio. Tiheysfunktion esitystä voidaan soveltaa suurimman uskottavuuden menetelmässä (Maximum Likelihood Estimation, MLE). Mikäli  $\{x_{1t}, \dots, x_{dt}\}_{t=1}^T$  on satunnaismuuttujien realisaatioista koostuva estimointiaineisto, voidaan MLE-menetelmän perustana oleva logaritminen uskottavuusfunktio esittää muodossa

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_d(x_{dt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{jt}), \quad (3.9)$$

missä  $\boldsymbol{\theta}$  on sekä reunajakaumien että kopulafunktion parametreista koostuva parametrivektori. (Cherubini ym. 2004, 145, 154.)

Parametrivektori  $\theta$  voidaan estimoida suoraan maksimoimalla kaavassa (3.9) esitetty logaritminen uskottavuusfunktio mallin parametrien suhteen. Parametrivektorin MLE-estimaattori

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \arg \max_{\theta} l(\theta) \quad (3.10)$$

on tiettyjen oletusten vallitessa tarkentuva ja tehokas, minkä lisäksi estimaattorin jakauma on asympotoottisesti normaali. (Cherubini ym. 2004, 154.) Tyypillisesti maksimointiongelma joudutaan ratkaisemaan soveltamalla jotakin numeerista optimointimenetelmää.

Tavanomainen MLE-menetelmä on kuitenkin laskennallisesti erittäin raskas etenkin, jos estimointiongelman ulottuvuus on korkea, sillä menetelmässä reunajakaumien ja kopulafunktioiden parametrit joudutaan estimoimaan samanaikaisesti (Cherubini ym. 2004, 156). Reunajakaumien ja kopulafunktion parametrien estimointi voidaan kuitenkin eriyttää toisistaan soveltamalla Joen ja Xun (1996) esittämää IFM-menetelmää (Inference Functions for Margins) tai Genestin, Ghoudin ja Rivestin (1995) ehdottamaa kanonista suurimman uskottavuuden menetelmää (Canonical Maximum Likelihood, CML).

IFM-menetelmässä logaritmissen uskottavuusfunktion maksimointiongelma ratkaistaan vaiheittain estimoimalla reunajakaumien parametrivektori  $\theta_1 = (\mathbf{a}_1', \dots, \mathbf{a}_d')$  ja kopulafunktion parametrit sisältävä parametrivektori  $\theta_2$  erikseen. Reunajakauman  $F_j$  parametrivektorin  $\mathbf{a}_j$  estimaattori määritellään seuraavasti

$$\hat{\mathbf{a}}_j = \arg \max_{\mathbf{a}_j} \sum_{t=1}^T \ln f_j(x_{jt}; \mathbf{a}_j), \quad (3.11)$$

missä  $j = 1, \dots, d$ . Kun kunkin reunajakauman parametrit on estimoitu, kopulafunktion parametrit estimoidaan reunajakaumien parametriestimaatteihin perustuen seuraavasti

$$\hat{\theta}_2 = \arg \max_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}), \dots, F_d(x_{dt}); \theta_2, \hat{\theta}_1). \quad (3.12)$$

Joe ja Xu (1996) osoittavat, että reunajakaumien ja kopulafunktion parametrivektoreista muodostettu IFM-estimaattori on tarkentuva ja asympotoottisesti normaalijakautunut. IFM-menetelmän keskeisenä etuna on se, että menetelmä alentaa logaritmissen uskottavuusfunktion maksimointiongelman ulottuvuutta ja tekee näin ollen parametrien estimoinnista laskennallisesti helpompaa.

Toisin kuin IFM-menetelmässä, Genestin ym. (1995) esittelemässä CML-menetelmässä reunajakaumia ei estimoida parametrissin menetelmin. Menetelmän ensimmäisessä vaiheessa satunnaismuuttujien havaintoaineisto muunnetaan tasajakautuneiden muuttujien pseudo-aineistoksi soveltamalla satunnaismuuttujien empiirisiä kertymäfunktioita. Tämän jälkeen kopulafunktion parametrit sisältävä parametrivektori  $\theta_2$  voidaan estimoida seuraavasti

$$\hat{\theta}_2 = \arg \max_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{F}_1(x_{1t}), \dots, \hat{F}_d(x_{dt}); \theta_2), \quad (3.13)$$

missä  $\hat{F}_j$  on muuttujan  $X_j$  empiirinen kertymäfunktio. Genest ym. (1995) osoittavat, että kopulaparametrien CML-estimaattori on myös tarkentuva ja asymptoottisesti normaali-jakautunut. CML-menetelmän keskeisenä etuna on, että menetelmän soveltaminen ei edellytä reunajakaumien muotoa tai tyyppiä koskevien oletusten tekemistä, minkä vuoksi menetelmä tuottaa esimerkiksi IFM-menetelmää luotettavampia estimaatteja etenkin, jos mallien soveltajalla ei ole riittävän varmaa tietoa reunajakaumien tyypistä (Kim, Silvapulle & Silvapulle 2007). Näin ollen CML-menetelmän avulla voidaan alentaa väärin spesifioiduista reunajakaumista aiheutuvaa malliriskiä.

Kopulafunktiot tarjoavat erittäin joustavan ja monipuolisen lähestymistavan moniulotteisten jakaumien estimointiin ja simulointiin. Toisaalta kopulafunktioihin nojaavan mallinnuksen monipuolisuus on myös yksi lähestymistavan ongelmakohdista, sillä kopuloiden teoria ei esimerkiksi kerro, minkälaista kopulafunktiota kussakin mallinnusongelmassa tulisi soveltaa. Teoriassa erilaisia reunajakaumia ja kopulafunktioita yhdistelemällä voidaan rakentaa ääretön määrä erilaisia yhteisjakaumia. (Cherubini ym. 2004, 153.) Näin ollen kopulafunktioihin perustavassa mallinnuksessa on keskeistä arvioida, miten sovelletut kopulafunktiot sopivat tarkasteltavaan aineistoon ja kuinka hyvin ne kuvaavat empiirisessä aineistossa esiintyviä riippuvuusrakenteita. Kopulafunktioiden ja empiirisen aineiston yhteensopivuutta mittaavia testejä esitellään ja arvioidaan kattavasti esimerkiksi Genestin, Rémillardin ja Beaudoinin (2009) tutkimuksessa.

### 3.1.3 Riippuvuuden mittareista

Riippuvuuden mittari voidaan määritellä mitaksi  $\delta$ , joka tiivistää satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  välisen riippuvuuden voimakkuuden yhteen reaalilukuun. Riippuvuuden mittari mittaa näin ollen satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  kopulafunktion sekä riippumattomuutta kuvaavan tulokopulan välistä etäisyyttä. Riippuvuuden mittarille voidaan asettaa useita vaatimuksia, jotka sen tulisi ideaalitalanteessa täyttää. Ensinnäkin riippuvuuden mittarin tulee olla symmetrinen, mikä tarkoittaa, että mittarille on voimassa  $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ , minkä lisäksi mittarille tulee päteä  $\delta(X, Y) \in [-1, 1]$ . Riippuvuuden mittari saa arvon 1, jos ja vain jos satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  välillä vallitsee täydellinen positiivinen riippuvuus. Vastaavasti riippuvuuden mittari saa arvon -1, jos ja vain jos satunnaismuuttujat ovat täydellisesti negatiivisesti riippuvaisia. Riippuvuuden mittarin tulee myös pysyä muuttumattomana, mikäli tarkasteltaviin satunnaismuuttujiin sovelletaan jotakin aidosti kasvavaa kuvausta  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Lisäksi riippuvuuden mittari saa arvon 0, jos ja vain jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomia. (Embrechts ym. 2002; Nelsen 2006, 207–208.)

Satunnaismuuttujien välistä lineaarista riippuvuutta mittaava lineaarinen korrelaatio  $\rho(X, Y)$  on yksi tunnetuimmista ja käytetyimmistä riippuvuuden mittareista erityisesti rahoituksen teoriassa. Lineaarinen korrelaatio on symmetrinen riippuvuuden mittari, minkä lisäksi sille on voimassa  $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$ . Lineaarisen korrelaation yleisyyttä selittää erityisesti mittarin estimoinnin yksinkertaisuus ja taloudellisiin muuttujiin usein sovellettava multinormaalisuusoletus, jonka vallitessa lineaarinen korrelaatio on luonnollinen ja täydellinen riippuvuuden mittari. Lineaarisen korrelaation käyttöön liittyy kuitenkin useita rajoitteita ja ongelmakohtia, joiden huomiotta jättäminen voi johtaa virheellisiin ja riskienhallinnan kannalta vaarallisiin johtopäätöksiin. (Embrechts ym. 2002.)

Lineaarinen korrelaatio on määritelty vain, jos satunnaismuuttujien varianssit ovat äärellisiä, mikä voidaan nähdä yhtenä korrelaatiokertoimen rajoitteena, mikäli tarkastelu kohdistuu erityisen paksuhäntäisiä jakaumia noudattavien satunnaismuuttujien väliseen riippuvuuteen. Mikäli satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, niiden välinen korrelaatiokerroin saa arvon 0. Sen sijaan lineaarisen korrelaatiokertoimen arvo 0 ei yleisesti tarkoita, että satunnaismuuttujat olisivat riippumattomia. Korreloimattomuuden ja riippumattomuuden välinen ekvivalenssi on voimassa vain, mikäli satunnaismuuttujat noudattavat moniulotteista normaalijakaumaa. Lineaarinen korrelaatio ei myöskään ole invariantti aidosti kasvavien epälineaaristen muunnosten suhteen, mikä johtuu siitä, että lineaarinen korrelaatio riippuu satunnaismuuttujien riippuvuusrakennetta kuvaavan kopulafunktion lisäksi myös satunnaismuuttujien reunajakaumista. (Embrechts ym. 2002; Malavergne & Sornette 2006, 151.)

Korrelaation ja reunajakaumien yhteyden vuoksi korrelaatiokertoimen reuna-arvojen  $-1$  ja  $1$  saavuttaminen ei ole aina mahdollista. Mikäli satunnaismuuttujilla  $X$  ja  $Y$  on reunajakaumat  $F_X$  ja  $F_Y$ , satunnaismuuttujien välisen korrelaatiokertoimen  $\rho(X, Y)$  saavutettavissa olevat arvot ovat välillä  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , missä  $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$ . Minimikorrelaatio  $\rho_{\min}$  saavutetaan, jos ja vain jos satunnaismuuttujat ovat täydellisesti negatiivisesti riippuvaisia. Vastaavasti maksimikorrelaatio  $\rho_{\max}$  saavutetaan, jos ja vain jos muuttujien välillä vallitsee täydellinen positiivinen riippuvuus. Minimikorrelaatio saa arvon  $-1$ , jos ja vain jos satunnaismuuttujien  $X$  ja  $-Y$  reunajakaumat ovat samaa tyyppiä. Vastaavasti korrelaatiokertoimen arvo  $1$  saavutetaan, jos ja vain jos satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumat ovat samaa tyyppiä. Lineaarisen korrelaation itseisarvoltaan pienet arvot eivät siis välttämättä kerro muuttujien heikosta riippuvuudesta, sillä myös täydellisesti negatiivisesti tai positiivisesti riippuvien muuttujien väliset korrelaatiot voivat olla hyvin lähellä nollaa. Näin ollen lineaarinen korrelaatio ei yleisesti toteuta riippuvuuden mittarien vaatimuksia, jotka koskevat muuttujien täydellisen positiivisen ja negatiivisen riippuvuuden käsittelyä. (Embrechts ym. 2002; Cherubini ym. 2004, 104–105.)

Yhteenvedona voidaan todeta, että lineaarinen korrelaatio on täydellinen ja luonteva riippuvuuden mittari vain, mikäli tarkasteltavat satunnaismuuttujat noudattavat multi-

normaalijakaumaa. Lineaarinen korrelaatio on kuitenkin epätäydellinen ja harhaanjohdava riippuvuuden mittari, mikäli satunnaismuuttujien yhteisjakauma poikkeaa multinormaalijakaumasta. Vaikka lineaarinen korrelaatio on luonnollinen riippuvuuden mittari myös muiden elliptisten jakaumien kuin multinormaalijakauman tapauksessa, mittaa ei kuitenkaan voida pitää täydellisenä riippuvuuden mittarina muiden kuin multinormaalijakauman tapauksessa, sillä esimerkiksi moniulotteisen  $t$ -jakauman tapauksessa muuttujien riippuvuusrakenteen määrittäminen korrelaatiokertoimien lisäksi myös jakauman vapausasteparametrin perusteella. (Embrechts ym. 2002; Malavergne & Sornette 2006, 99.)

Näin ollen satunnaismuuttujien yhteisjakaumaa ei voida yleisesti määrittää ennalta tunnettujen reunajakaumien ja satunnaismuuttujien parittaisten korrelaatiokertoimien avulla. Mikäli satunnaismuuttujien reunajakaumat ovat  $F_X$  ja  $F_Y$ , on siis mahdollista löytää vaihtoehtoiset kopulafunktiot  $C$  ja  $C_2$ , joiden avulla voidaan Sklarin (1959) lauseen mukaisesti muodostaa kaksi vaihtoehtoista yhteisjakaumaa siten, että molemmissa tapauksissa muuttujien välinen lineaarinen korrelaatio on yhtä suuri, vaikka yhteisjakaumien riippuvuusrakenteet poikkeaisivat huomattavastikin toisistaan. (Embrechts ym. 2002.) Koska portfolion VaR-mitta pohjautuu portfolion tuottoprosessia ajavien riskifaktorituottojen yhteisjakaumaan, on selvää, ettei portfolion VaR-mittaa voida myöskään yleisesti määrittää riskifaktorituottojen reunajakaumia ja korrelaatiokertoimia koskevan informaation avulla.

Satunnaismuuttujien riippuvuuden mittareina voidaan myös käyttää järjestyskorrelaatiokertoimia, joista tunnetuimpia ovat Kendallin tau ja Spearmanin rho. Järjestyskorrelaatiokertoimet perustuvat lineaarisesta korrelaatiosta poiketen ainoastaan satunnaismuuttujien suuruusjärjestykseen ja niiden avulla voidaan välttää useita lineaarisen korrelaation ongelmakohtia. Toisin kuin lineaarinen korrelaatio, Kendallin tau ja Spearmanin rho riippuvat ainoastaan satunnaismuuttujien kopulafunktiosta, minkä vuoksi ne ovat invariantteja aidosti kasvavien epälineaaristen muunnosten suhteen. Kendallin tau ja Spearmanin rho saavat arvon 1, jos ja vain jos satunnaismuuttujat ovat täydellisesti positiivisesti riippuvaisia ja arvon -1, jos ja vain jos muuttujat ovat täydellisesti negatiivisesti riippuvaisia. Näin ollen järjestyskorrelaatiokertoimet käsittelevät muuttujien välistä täydellistä riippuvuutta lineaarista korrelaatiokerrointa loogisemmin. Toisaalta järjestyskorrelaatiokertoimen arvo 0 ei lineaarisen korrelaation tavoin automaattisesti tarkoita, että muuttujat olisivat riippumattomia. (Embechts ym. 2002; Ané & Kharoubi 2003.)

Riskienhallinnan kannalta on usein olennaista arvioida, kuinka todennäköisesti eri varallisuuskohteet tuottavat merkittäviä tappioita samanaikaisesti. Satunnaismuuttujien ääriarvojen välistä riippuvuutta voidaan mitata häntäriippuvuuskerroimilla (coefficients of tail dependence), jotka kuvaavat samanaikaisten, jakaumien häntiin sijoittuvien ääritapahtumien todennäköisyyttä. Muuttujien  $X$  ja  $Y$  välinen ylempi häntäriippuvuuskerroin määritellään todennäköisyydeksi, että muuttuja  $Y$  ylittää reunajakaumansa  $q$ -kvantiilin,



mikäli muuttuja  $X$  ylittää reunajakaumansa  $q$ -kvantiilin, kun  $q \rightarrow 1$ . Ylempi häntäriippuvuuskerroin  $\lambda_U \in [0, 1]$  voidaan näin ollen ilmaista raja-arvona

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{\leftarrow}(q) \mid X > F_X^{\leftarrow}(q)), \quad (3.14)$$

mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa. Mikäli  $\lambda_U = 0$ , muuttujien sanotaan olevan asymptoottisesti riippumattomia jakaumien oikeanpuoleisissa hännissä. Muussa tapauksessa muuttujat ovat asymptoottisesti riippuvaisia jakaumien oikeanpuoleisissa hännissä. Vastaavasti alempi häntäriippuvuuskerroin  $\lambda_L$  voidaan määrittellä seuraavasti

$$\lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} P(Y \leq F_Y^{\leftarrow}(q) \mid X \leq F_X^{\leftarrow}(q)), \quad (3.15)$$

mikäli raja-arvo  $\lambda_L \in [0, 1]$  on olemassa. (McNeil ym. 2015, 247.)

Järjestyskorrelaatiokerrointen tapaan häntäriippuvuuskerroimet riippuvat ainoastaan satunnaismuuttujien kopulafunktiosta. Häntäriippuvuuskerroimille on voimassa

$$\lambda_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q} \quad \wedge \quad \lambda_L = \lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{C(q, q)}{q}, \quad (3.16)$$

missä  $C$  on satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  kopulafunktio. (Nelsen 2006, 214.) Näin ollen voidaan todeta, että portfoliotuottoja ajavien riskifaktorituottojen ääriarvojen välinen riippuvuus määrittyy yksinomaan riskifaktorituottojen yhteisjakauman kopulafunktion perusteella.

Vaikka satunnaismuuttujien riippuvuutta mittaavat riippuvuuden mittarit antavat oikein käytettyinä mielenkiintoista tietoa muuttujien riippuvuudesta, on kuitenkin syytä huomioida, että yksinkertaiset reaaliarvoiset riippuvuuden mittarit eivät riitä muuttujien riippuvuusrakenteen täsmälliseen mallintamiseen. Vaikka järjestyskorrelaatiokerroimet kuvaavat monissa tapauksissa muuttujien riippuvuussuhteita lineaarista korrelaatiota kattavammin, muuttujien reunajakaumia ja järjestyskorrelaatioita koskevan informaation avulla ei voida yksiselitteisesti spesifioida satunnaismuuttujien yhteisjakaumaa (Ané & Kharoubi 2003). Näin ollen voidaan todeta, että muuttujien riippuvuusrakenteen täsmällinen ja kattava mallinnus edellyttää kopulafunktioiden soveltamista.

## 3.2 Yleisimmät kopulaperheet ominaisuuksineen

### 3.2.1 Elliptiset kopulafunktiot

Elliptiset kopulafunktiot ovat implisiittisiä kopulafunktioita, joille ei ole olemassa eksplisiittistä suljetun muodon esitystä. Gaussin kopula ja t-kopula ovat yleisimpiä rahoitussovelluksissa hyödynnettäviä elliptisiä kopulafunktioita. Gaussin kopulafunktion ja t-kopulafunktion esitykset voidaan johtaa moniulotteisen normaalijakauman ja Studentin t-jakauman kertymäfunktioiden sekä Sklarin (1959) lauseen avulla (Malevergne & Sornette 2006, 107).

Olkoon  $\mathbf{X}$   $d$ -ulotteinen standardoitua multinormaalijakaumaa noudattava satunnaisvektori, jonka korrelaatiomatriisi on  $\mathbf{R}$ . Tällöin satunnaisvektorin kopulafunktio on Gaussin kopula, joka voidaan määrittellä esityksiä (3.3) ja (3.4) soveltamalla seuraavasti

$$C_{\mathbf{R}}^{Ga}(\mathbf{u}) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d) = \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \quad (3.17)$$

missä  $\Phi_{\mathbf{R}}$  on standardoidun  $d$ -ulotteisen multinormaalijakauman kertymäfunktio korrelaatiomatriisilla  $\mathbf{R}$ . Gaussin kopulalle voidaan johtaa myös vaihtoehtoinen integraaliesitys integroimalla standardoidun multinormaalijakauman tiheysfunktioita. Mikäli  $|\rho| < 1$ , kaksiulotteinen Gaussin kopula voidaan esittää muodossa

$$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{2\rho st - s^2 - t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt, \quad (3.18)$$

missä  $\rho$  on satunnaismuuttujien  $X_1$  ja  $X_2$  lineaarinen korrelaatiokerroin. (McNeil ym. 2015, 226–227.) Mikäli Gaussin kopula yhdistetään Sklarin (1959) lauseen mukaisesti standardoituihin yksiulotteisiin normaalijakaumiin, tuloksena on standardoitu moniulotteinen normaalijakauma. Mikäli reunajakaumat eivät ole normaaleja, Gaussin kopulan ja reunajakaumien yhdistelmä ei muodosta standardoitua multinormaalijakaumaa. Mielivaltaisten reunajakaumien ja Gaussin kopulan yhdistelmän muodostamaa yhteisjakaumaa kutsutaan sen sijaan meta-normaalijakaumaksi. (Cherubini ym. 2004, 113–114; Malevergne & Sornette 2006, 108.)

Kuten esityksestä (3.17) ilmenee, satunnaismuuttujien riippuvuus rakenne määrittyy yksinomaan korrelaatiomatriisin  $\mathbf{R}$  perusteella, mikäli satunnaismuuttujien kopulafunktio on Gaussin kopula. Mikäli korrelaatiomatriisin kaikki parittaiset korrelaatiokertoimet saavat arvon 1, Gaussin kopula vastaa kaavassa (3.5) esitettyä täydellistä positiivista riippuvuutta kuvaavaa komonotonisuuskopulaa  $M^d$ . Kaksiulotteisessa tapauksessa satunnaismuuttujien korrelaatiokertoimen arvo -1 puolestaan johtaa täydellistä negatiivista riippuvuutta kuvaavaan kopulaan  $W^2$ . Jos taas  $\mathbf{R}$  on identiteettimatriisi, eli jos muuttujien välillä

ei ole lineaarista korrelaatiota, Gaussin kopula vastaa riippumattomien muuttujien tulokopulaa  $\Pi^d$ . (McNeil ym. 2015, 227.)

Mikäli satunnaisvektori  $\mathbf{X}$  noudattaa standardoitua moniulotteista t-jakaumaa korrelaatiomatriisilla  $\mathbf{R}$  ja vapausasteella  $\nu > 2$ , voidaan t-kopula määritellä seuraavasti

$$C_{\nu, \mathbf{R}}^t(\mathbf{u}) = P(t_\nu(X_1) \leq u_1, \dots, t_\nu(X_d) \leq u_d) = \mathbf{t}_{\nu, \mathbf{R}}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)), \quad (3.19)$$

missä  $\mathbf{t}_{\nu, \mathbf{R}}$  on standardoidun  $d$ -ulotteisen t-jakauman kertymäfunktio korrelaatiomatriisilla  $\mathbf{R}$  ja vapausasteella  $\nu$ . Myös t-kopulalle voidaan johtaa integraaliesitys integroimalla moniulotteisen t-jakauman tiheysfunktioita. Kaksiulotteisessa tapauksessa t-kopulan integraaliesitys on muotoa

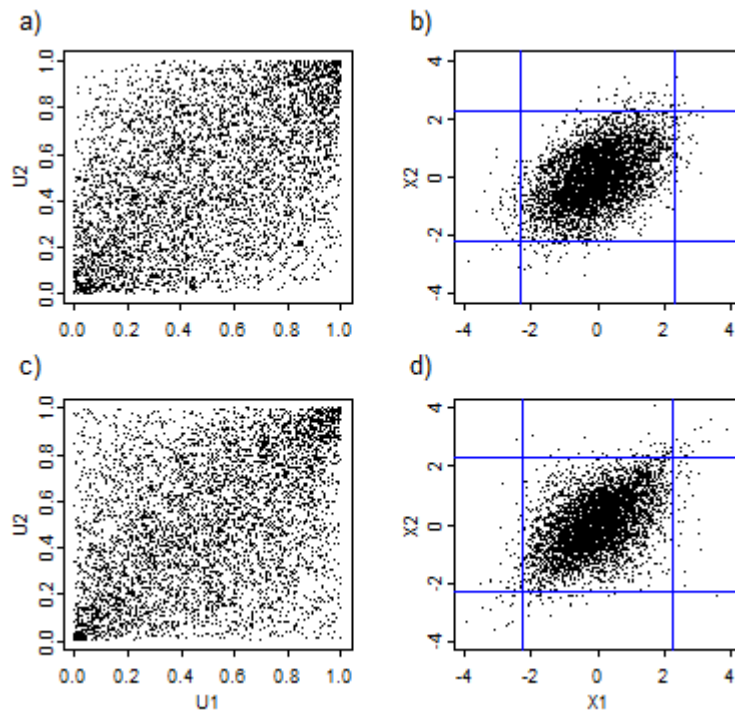
$$C_{\nu, \rho}^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left( 1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-(\nu+2)/2} ds dt, \quad (3.20)$$

missä  $\rho$  on satunnaismuuttujien  $X_1$  ja  $X_2$  lineaarinen korrelaatiokerroin. (Cherubini ym. 2004, 116; McNeil ym. 2015, 228.) Yksiulotteisten standardoitujen t-jakaumien ja t-kopulan yhdistelmä muodostaa moniulotteisen standardoidun t-jakauman, mikäli yksiulotteisten t-jakaumien ja t-kopulan vapausasteet ovat yhtä suuret. Mielivaltaisten reunajakaumien ja t-kopulan yhdistelmään perustuvaa yhteisjakaumaa kutsutaan puolestaan meta-t-jakaumaksi. (Malevergne & Sornette 2006, 109.)

Gaussin kopulan tapaisesti t-kopula yhtyy komonotonisuuskopulaan, mikäli matriisin  $\mathbf{R}$  kaikki alkiot saavat arvon 1. Vastaavasti t-kopula vastaa kaksiulotteisessa tapauksessa täydellistä negatiivista riippuvuutta kuvaavaa kopulaa  $W^2$ , jos satunnaismuuttujien lineaarinen korrelaatiokerroin saa arvon -1. Mikäli  $\mathbf{R}$  on identiteettimatriisi, t-kopula ei sen sijaan yhdy tulokopulaan, sillä korreloimattomat moniulotteista t-jakaumaa noudattavat satunnaismuuttujat eivät ole riippumattomia. (McNeil ym. 2015, 228.)

Toisin kuin Gaussin kopula, t-kopula riippuu korrelaatiomatriisin  $\mathbf{R}$  lisäksi myös vapausasteparametrilla  $\nu$ , joka kuvaa, kuinka paljon t-kopula poikkeaa Gaussin kopulasta. Mitä suurempi vapausasteparametri on, sitä pienempi on t-kopulan ja Gaussin kopulan välinen ero. Gaussin kopula voidaankin ilmaista t-kopulan raja-arvona, kun  $\nu \rightarrow \infty$ . (Malevergne & Sornette 2006, 109.) Vapausasteparametri vaikuttaa toisaalta jakaumien häntien ääritapahtumien esiintymistodennäköisyyksiin. Mitä pienempi t-kopulan vapausaste on, sitä todennäköisempiä samanaikaiset, jakaumien häntiin sijoittuvat ääritapahtumat ovat. (McNeil ym. 2015, 250.) Gaussin kopulan ja t-kopulan sekä niihin perustuvien kaksiulotteisten yhteisjakaumien eroja on havainnollistettu kuviossa 1. Kuviossa on esitetty 5000 simuloitua havaintoparia Gaussin kopulasta, t-kopulasta sekä niiden avulla rakennetuista yhteisjakaumista. Kopulafunktioiden korrelaatiokertoimen arvoksi on valittu 0,5 ja t-kopulan vapausasteeksi 4. Osa a) esittää Gaussin kopulasta simuloituja havaintoja, kun taas osa b) esittää kaksiulotteisesta standardoidusta normaalijakaumasta simuloituja

havaintopareja. Vastaavasti osa c) kuvaa t-kopulasta simuloituja havaintoja ja osa d) esittää t-kopulasta ja standardinormaaleista reunajakaumista koostuvasta meta-t-jakaumasta simuloituja havaintopareja. Osien b) ja d) pysty- ja vaakaviivat kuvaavat reunajakaumien 1 %:n ja 99 %:n kvantiileja.



**Kuvio 1** Simuloituja havaintopareja Gaussin kopulasta ja t-kopulasta sekä niihin perustuvista yhteisjakaumista

Kuviossa on esitetty 5000 simuloitua havaintoparia a) Gaussin kopulasta, b) kaksiluotteisesta standardoidusta normaalijakaumasta, c) t-kopulasta ja d) t-kopulasta ja standardinormaaleista reunajakaumista muodostetusta meta-t-jakaumasta. Kopulafunktioiden korrelaatiokerroin on 0,5 kaikissa tapauksissa. T-kopulan vapausaste on 4. Osissa b) ja d) esitetyt vaak- ja pystyviivat kuvaavat reunajakaumien 1 %:n ja 99 %:n kvantiileja.

Kuten kuviosta 1 ilmenee, Gaussin kopulan ja t-kopulan merkittävin ero riskienhallintasoventusten kannalta liittyy jakaumien häntien ääritapahtumien väliseen riippuvuusrakenteeseen. Kuvion 1 osassa d) reunajakaumien 1 %:n kvantiilien alapuolelle ja 99 %:n kvantiilien yläpuolelle jäävien havaintojen lukumäärä on selvästi suurempi kuin osassa b). Näin ollen t-kopulan mukaista riippuvuusrakennetta noudattavassa meta-t-jakaumassa samanaikaisten erittäin suurten tai erittäin pienten havaintojen todennäköisyys on selvästi suurempi kuin kaksiluotteisessa normaalijakaumassa. Koska kuvion 1 osissa b) ja d) esitettyjen simuloitujen havaintoparien reunajakaumat ovat samat, jakaumien erot johtuvat yksinomaan erilaisista riippuvuusrakennetta kuvaavista kopulafunktioista. Huomionarvoista on myös se, että sekä jakauman b) että jakauman d) tapauksessa satunnaismuuttu-

jien lineaarinen korrelaatio on noin 0,5. Vaikka molemmissa tapauksissa simuloitujen havaintojen korrelaatio ja reunajakaumat ovat samat, jakaumien riippuvuusrakenteet ovat kuitenkin varsin erilaiset. Kuvio havainnollistaa näin ollen myös lineaarisen korrelaation epätäydellisyyttä riippuvuutta kuvaavana mittarina.

Kuvion 1 osassa d) havaittava ääritapahtumien välinen riippuvuus johtuu t-kopulan häntäriippuvuudesta. T-kopulan säteittäisen symmetrian vuoksi t-kopulan ylempi ja alempi häntäriippuvuus on yhtä suurta, minkä vuoksi kuvion 1 osassa d) ääritapahtumia esiintyy sekä vasemmassa alakulmassa että oikeassa yläkulmassa. T-kopulan häntäriippuvuuskertoimelle voidaan johtaa esitys

$$\lambda = 2t_{v+1} \left( -\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right). \quad (3.21)$$

T-kopulan häntäriippuvuus on positiivista kaikilla  $\rho > -1$ . Mitä suurempi korrelaatiokerroin  $\rho$  arvo on, sitä todennäköisempää samanaikaisten, itseisarvoltaan suurten havaintojen esiintyminen on. Vapausasteparametrin  $v$  vaikutus on sen sijaan päinvastainen. T-kopulan häntäriippuvuus kasvaa vapausasteen laskiessa, mikäli korrelaatiokerroin pysyy muuttumattomana. Huomionarvoista on myös se, että t-kopulan häntäriippuvuus on positiivista myös tilanteissa, joissa korrelaatiokerroin on negatiivinen tai nolla. Gaussin kopula on sen sijaan asympotoottisesti riippumaton jakaumien molemmissa hännissä, mikäli  $\rho < 1$ . Ääritapahtumat esiintyvät näin ollen toisistaan riippumattomasti korrelaatiokerroimen arvosta riippumatta. (Embrechts ym. 2002; McNeil ym. 2015, 250.)

Taloudellisten aikasarjojen empiiristen ominaisuuksien perusteella itseisarvoltaan suurilla arvonmuutoksilla on usein taipumuksena esiintyä samanaikaisesti etenkin markkinakriisien aikana, jolloin useiden eri varallisuuskohteiden arvot voivat laskea hyvinkin voimakkaasti ja samanaikaisesti. Asympotoottisesti riippumaton Gaussin kopula voi aliarvioida itseisarvoltaan suurten riskifaktorituottojen esiintymistodennäköisyyttä ja sen soveltaminen voi näin ollen johtaa VaR-estimaatteihin, jotka aliarvioivat portfolion riskiä huomattavasti (Ané & Kharoubi 2003; Kole, Koedijk & Verbeek 2007). Tämän vuoksi häntäriippuvuutta sisältävien kopulafunktioiden, kuten t-kopulan, käyttäminen on usein perustellumpaa etenkin riskienhallintasovelluksissa, joissa tarkastelu kohdistuu juuri jakaumien häntien ääritapahtumiin.

### 3.2.2 *Arkhimedeen kopulafunktiot*

Arkhimedeen kopulafunktiot ovat kopulafunktioita, joille on olemassa eksplisiittinen suljetun muodon esitys. Arkhimedeen kopulafunktiot perustuvat tunnettujen moniulotteisten todennäköisyysjakaumien sijaan niin kutsuttuihin generaattorifunktioihin, joiden muotoa muuttamalla voidaan rakentaa useita erilaisia kopulafunktioita. Yleisimmät Arkhimedeen

kopulafunktiot ovat yhden parametrin funktioita mallinnusongelman ulottuvuudesta riippumatta, mikä yksinkertaistaa huomattavasti moniulotteisten mallien riippuvuusrakenteen kalibrointia etenkin, jos mallinnusongelman ulottuvuus on korkea. (Malevergne & Sornette 2006, 112; Alexander 2008a, 271.)

Olkoon  $\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  jatkuva, konvekksi ja aidosti vähenevä funktio, jolle on voimassa  $\Psi(1) = 0$  ja  $\Psi(t) \rightarrow \infty$ , kun  $t \rightarrow 0$ . Tällöin kaksiulotteinen Arkhimedeen kopula on muotoa

$$C(u_1, u_2) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \Psi(u_2)), \quad (3.22)$$

missä funktiota  $\Psi$  kutsutaan Arkhimedeen kopulan generaattorifunktioksi. Esitys voidaan yleistää myös  $d$ -ulotteisille Arkhimedeen kopulafunktioille, jotka voidaan esittää muodossa

$$C(\mathbf{u}) = \Psi^{-1}(\Psi(u_1) + \dots + \Psi(u_d)). \quad (3.23)$$

Jotta esityksen (3.23) funktio  $C$  olisi kopulafunktio, on generaattorifunktion käänteisfunktion  $\Psi^{-1}$  oltava myös täydellisesti monotoninen välillä  $[0, \infty)$ . (Nelsen 2006, 110–112, 151–152.)

Claytonin (1978) kopulafunktio on yksi suosituimmista rahoitussovelluksissa käytävistä Arkhimedeen kopulafunktioista. Claytonin kopulan generaattorifunktio on muotoa

$$\Psi_{\vartheta}(t) = \frac{1}{\vartheta}(t^{-\vartheta} - 1), \quad (3.24)$$

missä kopulaparametrille  $\vartheta$  pätee  $\vartheta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Arkhimedeen kopulafunktion yleistä määritelmää ja kaavan (3.24) mukaista generaattorifunktiota soveltamalla Claytonin kaksiulotteiselle kopulafunktiolle saadaan esitys

$$C_{\vartheta}^{Cl}(u_1, u_2) = \max \left[ (u_1^{-\vartheta} + u_2^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta}, 0 \right]. \quad (3.25)$$

Kopulaparametri  $\vartheta$  kuvaa muuttujien välisen riippuvuuden voimakkuutta. Mikäli  $\vartheta = -1$ , kaksiulotteinen Claytonin kopula yhtyy muuttujien täydellistä negatiivista riippuvuutta kuvaavaan kopulaan  $W^2$ . Claytonin kopula lähestyy puolestaan täydellistä positiivista riippuvuutta kuvaavaa komonotonisuuskopulaa  $M^2$ , kun  $\vartheta \rightarrow \infty$ . Kun  $\vartheta \rightarrow 0$ , Claytonin kopulafunktio lähestyy tulokopulaa, joka viittaa satunnaismuuttujien riippumattomuuteen. (Nelsen 2006, 116–117.) Claytonin kopulan esitys voidaan myös yleistää  $d$ -ulotteiseen tapaukseen. Tällöin kuitenkin kopulaparametrin  $\vartheta$  tulee olla epänegatiivinen. (McNeil ym. 2015, 262.) Moniulotteisella Claytonin kopulalla voidaan näin ollen kuvata ainoastaan muuttujien välistä positiivista riippuvuutta.

Toinen yleinen rahoitussovelluksissa hyödynnettävä Arkhimedeen kopulafunktio on Gumbelin (1960) kopula, jonka generaattorifunktio on muotoa

$$\Psi_{\delta}(t) = (-\ln t)^{\delta}, \quad (3.26)$$

missä kopulaparametri  $\delta$  toteuttaa ehdon  $\delta \in [1, \infty)$ . Näin ollen kaksiulotteinen Gumbelin kopulafunktio on muotoa

$$C_{\delta}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left(-((- \ln u_1)^{\delta} + (- \ln u_2)^{\delta})^{1/\delta}\right). \quad (3.27)$$

Kun  $\delta = 1$ , Gumbelin kopula yhtyy riippumattomuutta kuvaavaan tulokopulaan. Gumbelin kopula lähestyy puolestaan komonotonisuuskopulaa, kun  $\delta \rightarrow \infty$ . Gumbelin kopulalla ei voida näin ollen kuvata lainkaan muuttujien välistä negatiivista riippuvuutta. (Nelsen 2006, 116–117.) Gumbelin kopulan esitys voidaan Claytonin kopulan tapaan yleistää koskemaan  $d$ -ulotteista satunnaisvektoria. Gumbelin kopulan yleistäminen moniulotteiseksi ei kuitenkaan edellytä kopulaparametria koskevien lisärajoitusten tekemistä. (Cherubini ym. 2004, 150.)

Riskienhallintasovellusten kannalta Claytonin ja Gumbelin kopulafunktioiden mielenkiintoisin ominaisuus liittyy niiden sisältämään häntäriippuvuuden kuvaukseen. Arkhimedeen kopulafunktioiden häntäriippuvuus määrittyy yksinomaan niiden generaattorifunktioiden ominaisuuksien perusteella. Toisin kuin t-kopulan tapauksessa, Claytonin ja Gumbelin kopulan sisältämä häntäriippuvuus on epäsymmetristä. Claytonin kopula on asymptoottisesti riippumaton äärimmäisten, jakaumien oikeisiin häntiin sijoittuvien havaintojen suhteen. Sen sijaan äärimmäisten, jakaumien vasemmanpuolisiin häntiin sijoittuvien tapahtumien välillä vallitsee positiivinen riippuvuussuhde, kun  $\vartheta > 0$ . Claytonin kopulan alempi häntäriippuvuuskerroin on muotoa

$$\lambda_L = 2^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta > 0. \quad (3.28)$$

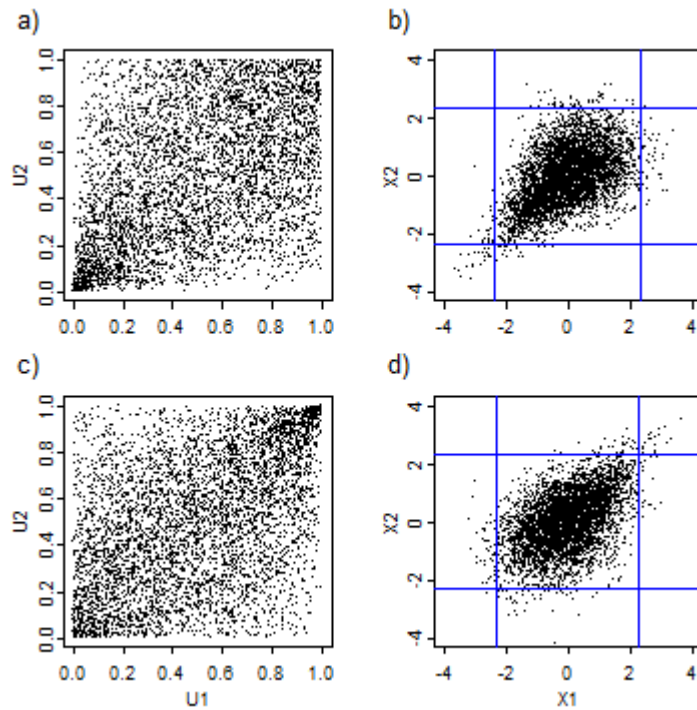
Gumbelin kopula on puolestaan asymptoottisesti riippumaton jakaumien vasemmassa hännässä. Mikäli satunnaisvektorin kopula on Gumbelin kopula, äärimmäiset samanlaiset tapahtumat jakaumien oikeanpuoleisissa hännissä ovat sen sijaan asymptoottisesti riippuvia, mikäli  $\delta > 1$ . Gumbelin kopulan ylempi häntäriippuvuuskerroin on muotoa

$$\lambda_U = 2 - 2^{1/\delta}. \quad (3.29)$$

(Malavergne & Sornette 2006, 170–171.) Häntäriippuvuuskertoimien esitysten perusteella on selvää, että häntäriippuvuus on kummankin kopulafunktion tapauksessa sitä voimakkaampaa, mitä suurempi kopulaparametrin arvo on.

Claytonin ja Gumbelin kopuloiden asymmetrinen häntäriippuvuus voidaan havaita kuviossa 2 esitetyistä sirontakuvioista. Kuviossa on esitetty 5000 simuloitua havaintoparia Claytonin kopulasta (osa a), Gumbelin kopulasta (osa c), standardinormaaleista reunajakaumista ja Claytonin kopulasta muodostetusta meta-Clayton-jakaumasta (osa b) sekä standardinormaaleista reunajakaumista ja Gumbelin kopulasta muodostetusta meta-Gumbel-jakaumasta (osa d). Osien b) ja d) pysty- ja vaakaviivat kuvaavat reunajakaumien

1 %:n ja 99 %:n kvantiileja. Claytonin kopulan kopulaparametrin arvoksi on valittu 1 ja Gumbelin kopulan kopulaparametrin arvoksi 1,5. Parametrien arvot on valittu niin, että osien b) ja d) jakaumissa satunnaismuuttujien lineaarinen korrelaatio on noin 0,5.



**Kuvio 2** Simuloituja havaintopareja Claytonin ja Gumbelin kopulasta sekä niihin perustuvista yhteisjakaumista

Kuviossa on esitetty 5000 simuloitua havaintoparia a) Claytonin kopulasta, b) Claytonin kopulasta ja standardinormaaleista reunajakaumista muodostetusta meta-Clayton-jakaumasta, c) Gumbelin kopulasta ja d) Gumbelin kopulasta ja standardinormaaleista reunajakaumista muodostetusta meta-Gumbel-jakaumasta. Claytonin kopulassa  $\theta = 1$  ja Gumbelin kopulassa  $\delta = 1,5$ . Osissa b) ja d) esitetyt vaaka- ja pystyviivat kuvaavat reunajakaumien 1 %:n ja 99 %:n kvantiileja.

Kuten kuvion 2 osasta b) voidaan havaita, Claytonin kopula tuottaa useita samanaikaisia äärihavaintoja satunnaismuuttujien vasemmanpuoleisiin häntiin, mikä kuvastaa Claytonin kopulan alemmaa häntäriippuvuutta. Gumbelin kopula puolestaan johtaa useisiin samanaikaisiin reunajakaumien 99 %:n kvantiilit ylittäviin ääriarvoihin. Mikäli riskifaktorituottojen riippuvuus rakenne määrittyy esimerkiksi Claytonin kopulan perusteella, tällöin poikkeuksellisen voimakkailla negatiivisilla riskifaktorituotoilla on taipumuksena esiintyä samanaikaisesti. Gumbelin kopulan tapauksessa riskifaktorituottojen asymptoottinen riippuvuus on puolestaan päinvastaista. Kuvio 2 ilmentää kuvion 1 tapaisesti myös lineaarisen korrelaation riittämättömyyttä satunnaismuuttujien välisen riippuvuuden mittarina. Kuvion 2 osissa b) ja d) satunnaismuuttujien välinen lineaarinen korrelaatio on noin 0,5. Sirontakuvioiden b) ja d) perusteella on kuitenkin varsin ilmeistä,



että meta-Clayton- ja meta-Gumbel-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien jakaumat ovat hyvin erilaiset. Koska reunajakaumat ovat samat, erot selittyvät yksinomaan riippuvuusrakennetta kuvaavien kopulafunktioiden eroilla.

### 3.3 Kopulafunktiot Value at Risk -mitan estimoinnissa

Riskimittojen estimointi on yksi keskeisistä kopulafunktioiden sovelluskohteista. Kopulafunktioihin pohjautuvan lähestymistavan keskeisin vahvuus perustuu siihen, että kopulafunktioiden avulla riskifaktorituottojen yhteisjakauman perusteella määrittyvä portfolion kokonaisriski voidaan Sklarin (1959) lauseen mukaisesti jakaa yksittäisistä riskifaktoreista aiheutuviin riskeihin ja riskifaktorioiden yhteisvaihtelusta johtuvaan riskiin (Jouanin ym. 2004). Yksittäisistä riskifaktoreista syntyvien riskien mallinnus edellyttää luonnollisesti tietoa riskifaktorituottojen reunajakaumista, joiden spesifiointi voi perustua esimerkiksi historiallisten riskifaktorituottojen yksilolotteisten aikasarjojen empiirisiin ominaisuuksiin. Riskifaktorituottojen yhteisvaihtelusta aiheutuvan riskin mallinnus kulminoituu puolestaan riskifaktorituottojen riippuvuusrakenteen määrittävän kopulafunktion spesifiointiin. Kopulafunktiot tarjoavat näin ollen hyvin monipuolisen ja joustavan lähestymistavan riskifaktorituottojen yhteisjakauman spesifiointiin ja siten myös portfolion VaR-mitan estimointiin.

Kopulafunktioihin pohjautuvissa estimointimenetelmissä VaR-mitalle ei yleisesti ole olemassa analyttistä suljetun muodon ratkaisua, vaan menetelmät perustuvat tyypillisesti riskifaktorituottojen Monte Carlo -simulointiin (Jouanin ym. 2004). Kopulafunktioihin perustuvan Monte Carlo -menetelmän lähtökohtana on spesifioidun kopulafunktion mukaista riippuvuusrakennetta noudattavien tasajakautuneiden muuttujien simulointi. Tasajakautuneet muuttujat voidaan muuntaa simuloituiksi riskifaktorituotoiksi estimoitujen tai oletettujen reunajakaumien kvantiilifunktioiden avulla, minkä jälkeen simuloitujen riskifaktorituottojen voidaan muuntaa portfolion tappioiksi soveltamalla portfolion tappio-operaattoria. (Alexander 2008b, 229–230.) Huomionarvoista on, että menetelmässä reunajakaumien tyyppille ei aseteta minkäänlaisia rajoitteita, minkä vuoksi reunajakaumat voidaan spesifioida niin, että ne heijastavat kunkin riskifaktorin empiirisiä ominaisuuksia mahdollisimman kattavasti. Menetelmä ei myöskään poissulje dynaamisia malleja, kuten riskifaktorituottojen heteroskedastisuutta ja volatilitietin klusteroitumista mallintavia GARCH-malleja tai ehdollisia kopulamalleja, joissa esimerkiksi kopulafunktion parametrit noudattavat jotakin parametrisoitua dynamiikkaa (ks. esim. Junker & May 2005; Fantazzini 2008; Lai 2008; Huang ym. 2009; Aloui ym. 2011; Weiß 2011).

Aikaisempien tutkimusten perusteella kopulafunktioihin perustuvat estimointimenetelmät johtavat usein huomattavasti tarkempiin VaR-estimaatteihin kuin tavanomaiset estimointimenetelmät, kuten varianssi-kovarianssimenetelmä ja historiallinen simulointi.

Weißin (2011) tutkimuksessa vertailtiin eri estimointimenetelmiin pohjautuvien VaR-mallien ennustekykyä ajanjaksolla 3.11.1998–2.6.2008. Tutkimusaineistona käytettiin saksalaisia, yhdysvaltalaisia ja aasialaisia osakkeita ja osakeindeksejä sekä valuuttafutuu-reita, joista muodostettiin yhteensä 12000 kaksiulotteista portfoliota. Tutkimustulosten mukaan kopulafunktioihin ja GARCH(1,1)-malliin perustuva estimointimenetelmä johti varianssi-kovarianssimenetelmää tarkempaan VaR-estimaatteihin yli 85 %:ssa tapauksista. Vastaaviin tuloksiin päädyttiin myös Alouin ym. (2011) sekä Razakin ja Ismailin (2016) tutkimuksissa, joissa kopulafunktioihin ja GARCH-malleihin sekä varianssi-kovarianssimenetelmään ja historialliseen simulointiin pohjautuvien VaR-mallien ennustekykyä testattiin osakeindekseistä muodostetuilla kaksiulotteisilla portfolioilla. Tutkimustulosten mukaan kopula-GARCH-menetelmän avulla voidaan tuottaa huomattavasti tarkempia VaR-estimaatteja kuin varianssi-kovarianssimenetelmällä ja historiallisella simuloinnilla, jotka aliarvioivat portfolioiden riskiä merkittävästi etenkin korkeilla luottamustasoilla.

Myös Skoglundin ym. (2010) mukaan kopulafunktioiden ja ehdollisen volatilitietin mallien yhdistelmään perustuvien VaR-mallien ennustekyky on selkeästi varianssi-kovarianssimenetelmää ja historiallista simulointia parempi sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden että Christoffersenin (1998) riippumattomuustestin perusteella. Tutkimustulosten mukaan varianssi-kovarianssimenetelmä ja historiallinen simulointi johtavat liian pieniin ja klusteroituneisiin VaR-estimaatteihin, mikä puolestaan voi johtaa vakaviin ongelmiin esimerkiksi VaR-malleja soveltavan luottolaitoksen vakavaraisuuden kannalta. Huangin ym. (2009) mukaan kopulafunktioihin ja asymmetriseen GJR-GARCH-malliin pohjautuvalla menetelmällä voidaan tuottaa myös GARCH-malleihin perustuvia yksiulotteisia parametrisia VaR-malleja tarkempia VaR-estimaatteja.

Kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien käytännön sovellettavuuden kannalta on myös keskeistä arvioida, mitkä kopulafunktiot kuvaavat portfolion tuottoa ajavien riskifaktorien riippuvuusrakennetta parhaiten. Kolen ym. (2007) tutkimuksessa S&P 500 -indeksin, Yhdysvaltojen valtion velkakirjojen tuottoja kuvaavan indeksin sekä yhdysvaltalaisen kiinteistörahastojen tuottoja kuvaavan indeksin riippuvuusrakennetta mallinnettiin Gaussin ja Gumbelin kopulalla sekä t-kopulalla. Tutkimustulosten mukaan Gaussin kopula aliarvioi samanaikaisten merkittävien tappioiden riskiä merkittävästi, mikä johtuu Gaussin kopulan asymptoottisesta riippumattomuudesta. Kolen ym. (2007) mukaan sekä ylempää että alempaa häntäriippuvuutta mallintava t-kopula estimoii samanaikaisten äärimmäisten tappioiden todennäköisyyttä tarkimmin. Vastaaviin tuloksiin päädyttiin myös Braunin ja Hackethalin (2013) tutkimuksessa, jonka mukaan t-kopula sopi osakeindekseistä, hyödykkeistä ja Saksan valtion velkakirjoista muodostettuun tuottoaineistoon Gaussin, Claytonin, Frankin ja Gumbelin kopulafunktioita paremmin. Asymmetriseen EGARCH-malliin sekä t-kopulaan perustuva VaR-malli johti tarkkoihin VaR-

estimaatteihin portfolion sisältämien varallisuuskohteiden suhteellisista portfoliopainoista riippumatta. Myös Huangin ym. (2009) mukaan t-kopula soveltuu osaketuottojen riippuvuusrakenteen mallinnukseen parhaiten.

Malevergne ja Sornette (2003) tutkivat puolestaan, voidaanko Gaussin kopulalla mallintaa kuudesta eri valuutasta ja metallista sekä 22 eri osakkeesta muodostettujen kaksikulotteisten aikasarjojen riippuvuusrakenteita riittävän tarkasti. Gaussin kopulan sopivuutta arvioivien testien perusteella Gaussin kopulalla voitiin kuvata riittävän tarkasti valuutta- ja osakeparien riippuvuusrakenteita, kun taas metallien osalta Gaussin kopulaa ei voitu pitää hyväksyttävänä kopulafunktiona. Malevergnen ja Sornetten (2003) mukaan Gaussin kopula kuitenkin aliarvioi asymptoottisen riippumattomuutensa vuoksi samanaikaisten ääriarvojen riskiä, minkä vuoksi Gaussin kopulan soveltaminen etenkin turbulenteilla ajanjaksoilla ei ole mielekäästä. Toisaalta Malevergne ja Sornette (2003) toteavat, ettei t-kopulan soveltaminen tuo juurikaan lisäarvoa osakkeiden riippuvuusrakenteiden mallinnukseen, sillä myös t-kopula aliarvioi osaketuottojen häntäriippuvuutta.

Anén ja Kharoubin (2003), Junkerin ja Mayn (2005), Alouin ym. (2011) sekä Razakin ja Ismailin (2016) mukaan osaketuottojen riippuvuusrakenteita voidaan puolestaan mallintaa parhaiten asymmetristä häntäriippuvuutta sisältävillä Arkhimedeen kopulafunktioidella tai niiden muunnoksilla. Ané ja Kharoubi (2003) analysoivat kuudesta eri osakeindeksistä muodostettujen kaksikulotteisten portfolioiden riippuvuusrakenteita aikavälillä 1987–2000 Gaussin, Gumbelin ja Claytonin kopulan sekä t-kopulan avulla. Tutkimustulosten mukaan alempaa häntäriippuvuutta mallintava Claytonin kopula kuvasi osakeindeksituottojen riippuvuusrakenteita parhaiten vähintään 80 %:ssa tarkasteltavista osakeindeksipareista kaikkien kopulafunktioiden sopivuutta arvioivien testien ja arviointikriteerien perusteella. Myös Razakin ja Ismailin (2016) mukaan Claytonin kopula soveltuu osaketuottojen riippuvuusrakenteen mallinnukseen parhaiten. Näin ollen samanaikaisten, itseisarvoltaan suurten negatiivisten tuottohavaintojen riippuvuuden mallintamista voidaan pitää osakeportfolioiden riskienhallinnan kannalta keskeisenä. Anén ja Kharoubin (2003) mukaan Gaussin kopulaan pohjautuvien VaR-mallien soveltaminen aliarvioi osakeportfolioon riskiä etenkin korkeilla luottamustasoilla. Ané ja Kharoubi (2003) arvioivat myös virheellisesti spesifioitujen reunajakaumien ja kopulafunktioiden vaikutusta VaR-estimaatteihin. Tulosten mukaan virheellisesti spesifioitu kopulafunktio selittää noin 20 % VaR-mitan estimointivirheestä.

Junkerin ja Mayn (2005) mukaan Frankin kopulan muunnokseen perustuva ja epäsymmetristä häntäriippuvuutta sisältävä kopulafunktio soveltui parhaiten yhdysvaltalaisista ja saksalaisista osakkeista sekä valuutanvaihtosopimuksista muodostettujen kaksikulotteisten aikasarjojen riippuvuusrakenteiden kuvaukseen. Tutkimustulosten mukaan tarkkojen VaR-mallien estimointi edellyttää sekä paksuhäntäisten reunajakaumien että epäsymmetristä häntäriippuvuutta sisältävien kopulafunktioiden soveltamista. Junkerin ja

Mayn (2005) mukaan Gaussin kopula aliarvioi samanaikaisten tappioiden riskiä sovelletuista reunajakaumista riippumatta.

Useissa tutkimuksissa eri kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien vertailu perustuu kopulafunktioiden ja empiirisen aineiston yhteensopivuutta arvioiviin testeihin ja mittareihin (ks. esim. Ané & Kharoubi 2003; Junker & May 2005; Aloui ym. 2011; Braun & Hackethal 2013; Razak & Ismail 2016). Kopulafunktioiden sopivuutta arvioivien testien soveltamista kopulafunktioiden vertailuun ja optimaalisen kopulafunktion valintaan voidaan kuitenkin pitää kyseenalaisena, sillä kopulafunktioiden ja estimointiaineiston yhteensopivuus ei välttämättä kerro mitään eri kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekyvystä. Weißin (2011) mukaan kopulafunktioiden sopivuutta arvioivien testien avulla ei voida identifioida VaR-mallin ennustekyvyn kannalta optimaalista kopulafunktiota johdonmukaisesti. Weißin (2011) tutkimuksen empiiristen tulosten mukaan yli 20 %:ssa tarkasteltavista portfolioista kaikki kopulafunktioiden sopivuutta arvioivat tilastolliset testit hylkäsivät VaR-mallin ennustekyvyn näkökulmasta optimaalisen kopulafunktion. Samankaltaisiin havaintoihin päädyttiin myös Palaron ja Hottan (2006) tutkimuksessa, jonka mukaan estimointiaineiston riippuvuusrakenteita parhaiten kuvaavaan kopulafunktioon pohjautuva VaR-malli ei johtanut tarkimpiin VaR-estimaatteihin. Näin ollen eri kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien vertailun sekä riskifaktorituottojen riippuvuusrakenteen mallinnuksessa sovellettavan kopulafunktion valinnan tulisi ensisijaisesti perustua VaR-mallien ennustekykyä arvioiviin testeihin ja mittareihin.

Huangin ym. (2009) mukaan t-kopulaan perustuvilla VaR-malleilla voitiin tuottaa Gaussin kopulaan ja Arkhimedeen kopulafunktioihin pohjautuvia VaR-malleja tarkempia VaR-estimaatteja. Myös Weißin (2011) tutkimuksen mukaan elliptisten kopulafunktioiden soveltaminen johti tarkimpiin VaR-estimaatteihin. Weißin (2011) tulosten mukaan t-kopulaan ja Gaussin kopulaan perustuvien VaR-mallien välillä ei kuitenkaan ollut merkittäviä eroja.

Lain (2008) mukaan VaR-mallien ennustekykyä voidaan puolestaan parantaa soveltamalla asymmetristä häntäriippuvuutta mallintavia Arkhimedeen kopulafunktioita. Lai (2008) vertasi GJR-GARCH-malliin sekä eri kopulafunktioihin perustuvia VaR-malleja toisiinsa sekä Englen (2002) DCC-malliin pohjautuvaan parametriseen menetelmään. Tutkimusaineistona käytettiin S&P 500-, FTSE 100- ja DAX-indekseistä muodostettujen indeksiparien tuottoaikasarjoja aikavälillä 1996–2006. Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin perusteella DCC-malliin ja Arkhimedeen kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien välillä ei ollut merkittäviä eroja. Mikäli arviointikriteerinä käytettiin myös VaR-mallien tuottamia pääomasäästöjä DCC-malliin verrattuna, epäsymmetristä häntäriippuvuutta mallintavat Arkhimedeen kopulafunktiot johtivat huomattaviin pääomasäästöihin DCC-malliin verrattuna. Kokonaisarviointin perusteella alemmaa häntäriippuvuutta sisältävä Claytonin kopula johti tarkimpiin VaR-estimaatteihin pitkissä po-

sitioissa, kun taas ylempää häntäriippuvuutta mallintava Gumbelin kopula estimoii lyhyiden positioiden riskiä parhaiten. Samankaltaisiin tuloksiin päädyttiin myös Fantazzinin (2009b) tutkimuksessa, jonka mukaan paksuhäntäiseen innovaatiojakaumaan perustuvan GARCH-mallin ja Claytonin kopulan yhdistelmään pohjautuva VaR-malli johti tarkimpiin VaR-estimaatteihin pitkissä positioissa Kupiecien (1995) ja Christoffersenin (1998) testien sekä epäsymmetriseen tappiofunktioon pohjautuvan suhteellisen ennustekyvyn testin perusteella. Tutkimusaineistona käytettiin New Yorkin pörssiin listatuista osakkeista muodostettuja kolmen osakkeen portfolioita.

Fantazzinin (2008; 2009a) sekä Bergerin ja Missongin (2014) mukaan kopulafunktion valinnalla ei puolestaan ole vaikutusta VaR-mallien ennustekyvyyneen, mikäli reunajakaumat heijastavat riskifaktorituottojen yksiulotteisten aikasarjojen empiirisiä ominaisuuksia riittävän tarkasti. Fantazzinin (2008; 2009a) mukaan Gaussin kopula johtaa riittävän tarkkoihin VaR-estimaatteihin, mikäli VaR-mitan estimoinnissa sovelletaan paksuhäntäisiin reunajakaumiin pohjautuvia ehdollisen volatiliteetin malleja.

Myös Bergerin ja Missongin (2014) mukaan paksuhäntäisten reunajakaumien soveltaminen parantaa osake- ja valuuttaportfolioiden riskiä mittaavien VaR-mallien ennustekyvyyneen etenkin kriisiperiodien aikana. Tutkimustulosten mukaan kopulafunktioiden ja yksiulotteisten GARCH-mallien yhdistelmään perustuva estimointimenetelmä johti moniulotteisia GARCH-malleja tarkempaan VaR-estimaatteihin vuosina 2005–2009, mikäli yksiulotteisten GARCH-mallien innovaatiojakaumina käytettiin ääriarvoteorian mukaisia paksuhäntäisiä jakaumia. Portfolioiden sisältämien osakkeiden tai valuuttojen riippuvuusrakennetta mallintavan kopulafunktion valinta ei sen sijaan vaikuttanut mallien ennustekyvyyneen merkittävästi, sillä sekä Gaussin kopulaan että t-kopulaan perustuvat mallit johtivat lähes samankaltaisiin tuloksiin. Tutkimustulokset korostavat näin ollen reunajakaumien spesifioinnin merkitystä VaR-mallien ennustekyvyyneen kannalta. Vastaaviin tuloksiin päädyttiin myös Skoglundin ym. (2010) tutkimuksessa, jonka mukaan kopulamallit johtavat hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin vain, mikäli riskifaktorituottojen reunajakaumat on oikein spesifioitu. Fantazzinin (2008; 2009a), Skoglundin ym. (2010) sekä Bergerin ja Missongin (2014) tutkimuksissa riskifaktorituottojen riippuvuusrakennetta mallinnetaan kuitenkin vain elliptisillä kopulafunktioilla, mikä voidaan nähdä tutkimusten keskeisimpänä ongelma-kohtana.

Yhteenvedona voidaan todeta, että kopulafunktioihin perustuvat VaR-mallit johtavat aikaisempien tutkimusten valossa lähes poikkeuksetta varianssi-kovarianssimenetelmää ja historiallista simulointia tarkempaan VaR-estimaatteihin. Aikaisempien tutkimusten perusteella optimaalisen kopulafunktion tyyppi vaihtelee kuitenkin huomattavasti tutkimusaineiston sisällöstä, vertailtavien mallien joukosta sekä arviointikriteereistä riippuen. Tutkimustulosten perusteella riskifaktorituottojen asympotoottista riippuvuutta mallintavat kopulafunktiot vaikuttaisivat kuitenkin soveltuvan etenkin osakeportfolioiden VaR-estimointiin asympotoottisesti riippumatonta Gaussin kopulaa paremmin.

Aikaisemmat tutkimukset korostavat myös, että ennustekyvyltään tarkkojen VaR-mallien rakentaminen edellyttää sekä paksuhäntäisten reunajakaumien soveltamista että riskifaktorituottojen heteroskedastisuuden ja volatilitietin klusteroitumisen mallintamista. Vaikka reunajakaumien spesifioinnilla on useiden tutkimusten mukaan kopulafunktion valintaa suurempi vaikutus VaR-mallien ennustekyvyyneen, on kuitenkin syytä huomioida, että kopulafunktioihin pohjautuva estimointimenetelmä on ainoa keino tarkastella riskifaktorituottojen reunajakaumia ja riippuvuusrakennetta erikseen. Tavanomaisimmista jakaumista, kuten normaali- tai t-jakaumasta, poikkeavien reunajakaumaspesifikaatioiden tai toisistaan poikkeavien reunajakaumien soveltaminen moniulotteisessa VaR-mallinnuksessa edellyttää useimmiten juuri kopulafunktioihin pohjautuvaan lähestymistapaan nojautumista.

Useissa aikaisemmissa kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekyvyyä arvioivissa tutkimuksissa tarkastelujakso ei sisällä lainkaan globaalia finanssikriisiä (ks. esim. Ané & Kharoubi 2003; Junker & May 2005; Lai 2008; Huang ym. 2009; Weiß 2011). Lisäksi tutkimuksissa, joiden tutkimusaineisto kattaa finanssikriisin, tarkastelujakso ei juurikaan ulotu vuotta 2009 pidemmälle. Tarkastelujaksojen rajallisuuden vuoksi useat tutkimukset antavat näin ollen puutteellisen kuvan kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekyvystä ja käyttökelpoisuudesta, sillä markkinakriisien aikana realisoituvat voimakkaat kurssiheilahtelut ovat juuri niitä riskejä, joihin VaR-mallien kaltaisilla riskienhallintamalleilla varaudutaan. Tarkastelujakson rajallisuuden vuoksi aiemmat tutkimukset eivät myöskään anna kattavaa kuvaa siitä, miten kopulafunktioihin perustuvat VaR-mallit ovat toimineet finanssikriisin jälkeisinä vuosina. Useimmissa aikaisemmissa tutkimuksissa ei myöskään ole vertailtu kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekyvyyä eri ajanjaksoilla. Kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien ennustekyvyn tarkastelu osaperiodeittain on kuitenkin perusteltua, sillä esimerkiksi Weißin (2011) tutkimuksen mukaan optimaalisen kopulafunktion muoto vaihtelee ajassa ja riippuu VaR-mallien kalibroinnissa käytettävästä estimointiaineistosta sekä VaR-mallien toteumatestaustajaksosta.

## 4 TUTKIMUSAINIESTO JA -MENETELMÄT

### 4.1 Tutkimusaineiston kuvaus

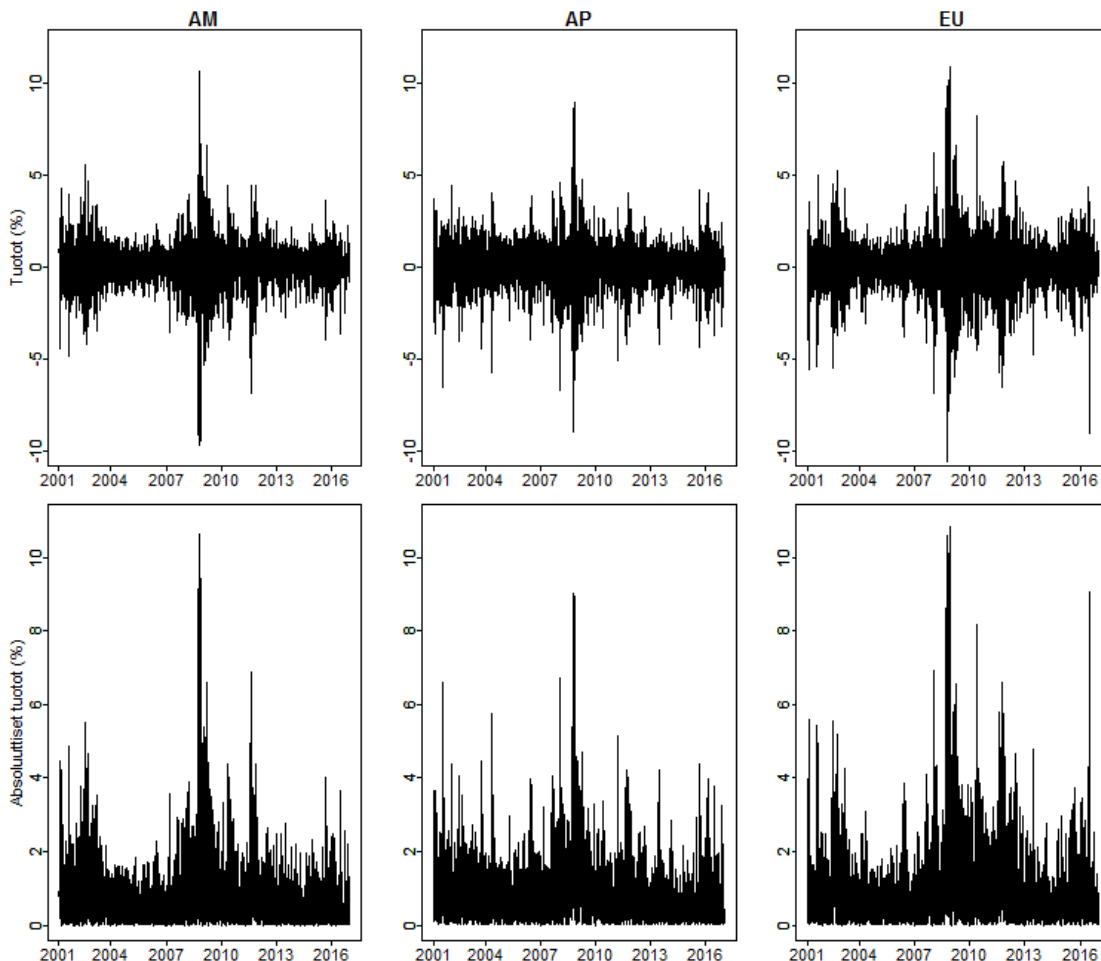
Tutkielman empiirisessä osiossa arvioidaan ja vertaillaan erilaisten VaR-mallien ennustekykyä laskemalla eri menetelmiin perustuvat VaR-mitat kolmelle eri portfoliolle ja vertailemalla VaR-estimaatteja portfolioiden toteutuneisiin tappioihin. VaR-mallien estimoinnissa ja toteumatestauksessa käytettävä tutkimusaineisto koostuu MSCI AC Americas-, MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -kokonaistuottoindeksien logaritmisista päivätuotoista aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016. Kunkin indeksin tuottohavaintojen kokonaismäärä on 4129. Päivätason tuottojen soveltaminen on perusteltua, sillä mallien kalibroinnissa ja tilastollisessa testauksessa sovellettavan havaintoaineiston tulee olla riittävän suuri, jotta estimointimenetelmät ja mallien ennustekykyä mittaavat testit tuottaisivat luotettavia tuloksia. Osakeindekseistä muodostetaan kolme kahden indeksin portfolioa, joiden tuottoja laskettaessa indeksien suhteelliset portfoliopainot oletetaan yhtä suuriksi. Portfolion sisältämien osakeindeksien oletetaan myös olevan ainoita portfolion tuottoihin vaikuttavia riskifaktoreita. Vastaavia oletuksia sovelletaan myös useimmissa aikaisemmissa tutkimuksissa (ks. esim. Junker & May 2005; Huang ym. 2009; Weiß 2011).

MSCI AC Americas -indeksi edustaa Pohjois- ja Etelä-Amerikan kehittyneiden ja kehittyvien markkinoiden osaketuottoja. indeksi koostuu 840 suuren tai keskisuuren yrityksen osakkeista, joiden indeksipainot vastaavat yhtiöiden suhteellisia markkina-arvoja. Indeksien sisältämien yhtiöiden maantieteellisen sijainnin ja markkina-arvojen perusteella kolme suurinta maata ovat Yhdysvallat (92,11 %), Kanada (5,37 %) ja Brasilia (1,51 %). MSCI AC Asia Pacific -indeksi koostuu puolestaan 1023 osakkeesta, joilla käydään kauppaa Aasian ja Tyynenmeren alueen maiden pörseissä. Suurimmat indeksipainot ovat Japanilla (40,01 %), Kiinalla (14,97 %) ja Australialla (12,59 %). MSCI AC Europe -indeksi kuvastaa puolestaan eurooppalaisten kehittyneiden ja kehittyvien markkinoiden osaketuottoja. Indeksien sisältämien 529 yrityksen markkina-arvojen ja sijaintivaltion perusteella kolme merkittävintä maata ovat Iso-Britannia (27,81 %), Ranska (15,15 %) ja Saksa (14,26 %). Tutkielman kaavoissa, kuvioissa ja taulukoissa MSCI AC Americas-, MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -indeksien tuottoaikasarjoihin viitataan lyhenteillä AM, AP ja EU. Vastaavasti tuottoaikasarjoista muodostettuihin portfolioihin viitataan termein AM-AP, AM-EU ja AP-EU.

Kattavien ja maantieteellisesti hajautettujen osakeindeksien soveltaminen vähentää luonnollisesti yritys-, toimiala- ja maakohtaisten tekijöiden vaikutusta portfoliotuottoihin. Tutkimusaineistona käytettävien osakeindeksien voidaankin tulkita kuvastavan maailman merkittävimpien talousalueiden osakemarkkinoiden yleiskehitystä. Osakeindeksien

riippuvuusrakenteen mallinnus ja tarkasteltaville portfolioille lasketut VaR-mitat antavat näin ollen mielenkiintoista tietoa eri osakemarkkinoiden riskien yhteisvaikutuksesta.

Kuviossa 3 on esitetty osakeindeksien logaritmiset päivätuotot sekä tuottojen itseisarvot aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016. Kuvion perusteella tuottoaikasarjoissa ei ole havaittavissa selkeitä trendejä, vaan tuotot vaihtelevat tarkastelujaksolla tietyn vakiotason ympärillä, mikä viestii tuottoaikasarjojen stationaarisuudesta. Kuvioista ilmenee myös, että tarkastelujaksolla esiintyy ajanjaksoja, jolloin tuottoaikasarjojen varianssi on selvästi keskimääräistä suurempi sekä ajanjaksoja, jolloin tuottoaikasarjat heilahtelevat keskimääräistä vähemmän. Erityisesti absoluuttisia tuottoja kuvaavista kuvioista voidaan havaita, että itseisarvoltaan suuret tuotot esiintyvät usein ryppäinä. Kuvioissa havaittavat ilmiöt viestivät näin ollen tuottoaikasarjojen heteroskedastisuudesta ja volatiliiteetin klusteroitumisesta.



**Kuvio 3** Osakeindeksien logaritmiset päivätuotot ja absoluuttiset tuotot aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016

Kuviossa on esitetty MSCI AC Americas-, MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -kokonaistuottoindekseistä lasketut logaritmiset päivätuotot sekä logaritmisten päivätuottojen itseisarvot aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016.



Tuottoaikasarjojen kuvailevat tunnusluvut on esitetty taulukossa 1. Taulukossa on esitetty myös tuottoaikasarjojen jakaumien normaalisuutta mittaavan Jarque-Bera-testisuureen arvo sekä testin p-arvo. Testin nollahypoteesin mukaan tarkasteltavan muuttujan jakauma on normaali. Taulukossa esitetyn Ljung-Box-testin nollahypoteesina on puolestaan, että tuottoaikasarjojen autokorrelaatiot viipeillä 1, ..., 10 eivät poikkea tilastollisesti merkitsevästi nolasta. Taulukossa on myös esitetty neliöityihin tuottoihin sovelletun Ljung-Box-testisuureen arvo ja testin p-arvo. Neliöityihin tuottoihin sovellettu Ljung-Box-testi mittaa tuottoaikasarjoissa esiintyvän heteroskedastisuuden merkittävyyttä.

### Taulukko 1 Tuottoaikasarjojen kuvailevat tunnusluvut

Taulukossa on esitetty kokonaistuottoindeksien MSCI AC Americas, MSCI AC Asia Pacific ja MSCI AC Europe aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 logaritmisten päivätuottojen kuvailevat tunnusluvut. Kunkin indeksin tuottohavaintojen lukumäärä on 4129. JB viittaa Jarque-Bera-testiin, jonka nollahypoteesina on, että tuotot ovat normaalijakautuneita. LB(10) viittaa Ljung-Box-testiin, joka mittaa aikasarjoissa esiintyvän autokorrelaation merkittävyyttä viipeillä 1, ..., 10. LB<sup>2</sup> tarkoittaa neliöityihin tuottoihin sovellettua Ljung-Box-testiä. Tilastollisten testien p-arvot on esitetty suluissa.

	AM	AP	EU
Keskiarvo (%)	0,022	0,021	0,016
Keskihajonta (%)	1,204	1,186	1,403
Vinous	-0,307	-0,407	-0,207
Huipukkuus	12,279	8,341	10,032
JB	14878 ( $< 0,001$ )	5023 ( $< 0,001$ )	8536 ( $< 0,001$ )
LB(10)	38,56 ( $< 0,001$ )	11,60 (0,313)	66,69 ( $< 0,001$ )
LB <sup>2</sup> (10)	3690,4 ( $< 0,001$ )	3356,5 ( $< 0,001$ )	2446,4 ( $< 0,001$ )

Taulukosta 1 ilmenee, että kaikkien tuottoaikasarjojen keskiarvot ovat hyvin lähellä nolaa. Tuottoaikasarjojen jakaumien vinoutta kuvaavien tunnuslukujen negatiivisuus puolestaan kuvastaa, että suurten negatiivisten tuottojen todennäköisyys on suurempi kuin normaalijakauman tapauksessa. Selvästi normaalijakauman mukaista viitearvoa (3) suuremmat huipukkuusluvut puolestaan viestivät tuottojakaumien paksuhäntäisyydestä, mikä kyseenalaistaa tuottojakaumien normalisuusoletuksen. Jarque-Bera-testien mukaan tuottoaikasarjojen normalisuusoletus voidaankin hylätä kaikilla yleisesti käytetyillä merkitsevyystasoilla.

Taulukossa 1 esitettyjen Ljung-Box-testien p-arvojen mukaan MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -indeksien tuottoaikasarjoissa esiintyy tilastollisesti merkitsevää autokorrelaatiota. MSCI AC Asia Pacific -indeksin tuottojen autokorrelaatiot viipeillä 1, ..., 10 eivät sen sijaan poikkea tilastollisesti merkitsevästi nolasta. Neliöityihin tuottoihin sovelletun Ljung-Box-testin mukaan nollahypoteesi neliöityjen tuottojen autokorrelaatiomattomuudesta voidaan sen sijaan hylätä kaikkien tuottoaikasarjojen osalta, mikä viestii tuottoaikasarjojen heteroskedastisuudesta. Aineistossa havaittavan autokorrelaation ja

heteroskedastisuuden vuoksi tuottoaikasarjojen IID-oletus ei ole perusteltu, mikä puoltaa ehdollisten VaR-mallien soveltamista.

## 4.2 Reunajakaumien ja riippuvuusrakenteiden mallinnus

### 4.2.1 AR-GARCH-mallien estimointi ja mallin valinta

Aineistossa esiintyvän autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vuoksi tuottoaikasarjoihin sovitetaan ehdollisen odotusarvon ja volatiliteetin malleja, joiden avulla tuottoaikasarjat pyritään standardoimaan havainnoiksi, jotka ovat IID-jakautuneita. Tutkielmassa sovellettavissa ehdollisissa malleissa tuottoaikasarjojen  $\mathbf{R}_s = (r_{s,AM}, r_{s,AP}, r_{s,EU})'$  oletetaan noudattavan dynamiikkaa

$$\mathbf{R}_s = \boldsymbol{\mu}_s + \mathbf{D}_s \mathbf{Z}_s, \quad (4.1)$$

missä  $\boldsymbol{\mu}_s = (\mu_{s,AM}, \mu_{s,AP}, \mu_{s,EU})'$  on indeksituottojen ajanhetken  $s$  ehdollisista odotusarvoista muodostettu vektori ja  $\mathbf{D}_s = \text{diag}(\sigma_{s,AM}, \sigma_{s,AP}, \sigma_{s,EU})$  on ehdollisista volatiliteeteista muodostettu diagonaalimatriisi. Innovaatiovektorin  $\mathbf{Z}_s = (z_{s,AM}, z_{s,AP}, z_{s,EU})'$  yksittäisten komponenttien oletetaan olevan IID-jakautuneita.

Kunkin tuottoaikasarjan ehdollista odotusarvoa mallinnetaan yksinkertaisuuden vuoksi AR(1)-mallilla. Ehdollisen odotusarvon mallinnuksen rajaamista AR(1)-malliin voidaan myös perustella sillä, että ehdollisen odotusarvon mallien vaikutus VaR-mallien ennustekykyyneen on aikaisempien tutkimusten valossa huomattavasti ehdollisen volatiliteetin malleja vähäisempi. Kunkin tuottoaikasarjan ehdollista volatiliteettia mallinnetaan puolestaan GARCH-malleilla, joiden innovaatiotermien oletetaan noudattavan joko standardoitua normaalijakaumaa tai standardoitua t-jakaumaa<sup>1</sup>.

Alustavissa tarkasteluissa kunkin tuottoaikasarjan ehdollista volatiliteettia mallinnetaan sekä tavanomaisella Bollerslevin (1986) GARCH(1,1)-mallilla että Glostenin ym. (1993) GJR-GARCH(1,1)-mallilla ja Nelsonin (1991) EGARCH(1,1)-mallilla, jotka huomioivat myös ehdollisen volatiliteetin mahdollisen asymmetrian. Sovellettavien GARCH-mallien varianssiyhtälöt on esitetty kaavoissa (2.21), (2.22) ja (2.23). Alustavissa tarkasteluissa GARCH-mallit sovitetaan tuottoaikasarjojen aineistoon aikavälillä 6.3.2001–30.12.2016. Estimointiaineiston koko on näin ollen  $T = 4129$ . Kaikki mallit sovitetaan käyttämällä R-ohjelmistoa.

AR-GARCH-mallien estimointi perustuu suurimman uskottavuuden menetelmään, jossa parametriestimaatit ratkaistaan maksimoimalla uskottavuusfunktio parametrien

<sup>1</sup> Tässä tutkielmassa standardoidulla t-jakaumalla viitataan t-jakaumaan, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi 1. Koska tavanomaista Studentin t-jakaumaa vapausasteella  $\nu$  noudattavan muuttujan  $x_\nu$  varianssi on  $\nu/(\nu - 2)$ , standardoitua t-jakaumaa noudattava muuttuja on muotoa  $y_\nu = x_\nu \sqrt{(\nu - 2)/\nu}$ .

suhteen. Merkitään kunkin tuottoaikasarjan ajanhetkeen  $t = 1, \dots, T$  ulottuvaa havaintoaineistoa notaatiolla  $\mathbf{Y}_t = (\mathbf{Y}_0, y_1, \dots, y_t)$ , missä  $\mathbf{Y}_0 = (y_0, \sigma_0)$  sisältää ajanhetken 1 ehdollisen odotusarvon ja volatilitietin laskennassa tarvittavat alkuarvot. Olkoon  $\mathbf{a}$  AR-mallin ja GARCH-mallin parametreista koostuvaa parametrivektori, jonka suhteen uskottavuusfunktio maksimoidaan. Uskottavuusfunktion johtaminen perustuu havaintoaineiston  $\mathbf{Y}_t$  tiheysfunktion esitykseen. Koska tiheysfunktio voidaan esittää ehdollisten tiheyksien tulona, uskottavuusfunktio saadaan muotoon

$$f_{\mathbf{Y}_T} = \prod_{t=1}^T f_{y_t | \mathbf{Y}_{t-1}} \cdot f_{\mathbf{Y}_0}. \quad (4.2)$$

Koska alkuarvojen  $\mathbf{Y}_0$  tiheysfunktiolle ei ole olemassa eksaktia suljetun muodon esitystä, uskottavuusfunktio esitetään usein alkuarvojen suhteen ehdollistettuna. Etenkin suurten aineistojen tapauksessa alkuarvojen vaikutus estimointituloksiin on erittäin pieni. (Tsay 2010, 120; McNeil ym. 2015, 123–124.) Alkuarvoksi  $y_0$  on valittu aikasarjan ehdollistamaton odotusarvo  $\mu$ . Volatiliteettiprosessin alkuarvoksi  $\sigma_0$  on puolestaan valittu tuottoaikasarjan neliöityjen jäännösten keskiarvon neliöjuuri. (Ghalanos 2015.)

Uskottavuusfunktio esitetään useimmiten logaritmisessa muodossa, sillä logaritmien laskusääntöjen nojalla kaavassa (4.2) esitetty tulo voidaan esittää ehdollisten tiheyksien summana, mikä helpottaa maksimointiongelman ratkaisua. Logaritmisesta uskottavuusfunktion eksaktin muodon johtaminen edellyttää näin ollen ajanhetken  $t$  havainnon  $y_t$  ehdollisen tiheysfunktion määrittämistä. Havainnon  $y_t$  ehdollisen tiheysfunktion muoto riippuu puolestaan GARCH-mallia ajavien innovaatiotermien oletetusta jakaumasta. Mikäli innovaatiotermien oletetaan noudattavan jakaumaa  $G_z$ , voidaan logaritminen uskottavuusfunktio esittää muodossa

$$l(\mathbf{a}) = -\sum_{t=1}^T \ln \sigma_t + \sum_{t=1}^T \ln g_z \left( \frac{y_t - \mu_t}{\sigma_t} \right), \quad (4.3)$$

missä  $g_z$  on innovaatiojakauman tiheysfunktio ja missä  $\mu_t$  ja  $\sigma_t$  noudattavat AR(1)-mallin ja tarkasteltavan GARCH-mallin mukaista dynamiikkaa. Tutkielmassa tarkasteltavien logaritmisten uskottavuusfunktioiden eksakti muoto saadaan näin ollen korvaamalla  $g_z$  joko standardoidun normaali- tai t-jakauman tiheysfunktion lausekkeella. Parametrivektorin  $\mathbf{a}$  estimaatti saadaan maksimoimalla kaavassa esitetty log-uskottavuusfunktio kunkin parametrin suhteen. Käytännössä maksimointiongelman ratkaiseminen edellyttää numeeristen optimointimenetelmien soveltamista. (Tsay 2010, 120–121; McNeil ym. 2015, 124–125.)

Estimoitujen AR-GARCH-mallien logaritmisten uskottavuusfunktioiden arvot sekä mallien vertailussa sovellettavien informaatiokriteerien ja tilastollisten testien arvot on esitetty taulukossa 2. Taulukossa annetut mallien nimet viittaavat sovelletun GARCH-mallin nimeen sekä innovaatiotermien jakaumaoletukseen. Esimerkiksi GJR-t viittaa

Glostenin ym. (1993) asymmetriseen GJR-GARCH(1,1)-malliin, jossa innovaatiotermien oletetaan noudattavan standardoitua t-jakaumaa. Mallien vertailussa sovelletaan sekä Akaiken (AIC) että Bayesian (BIC) informaatiokriteereitä, jotka ovat logaritmisen uskottavuusfunktion arvon väheneviä ja estimoitujen parametrien lukumäärän kasvavia funktioita. Mallia voidaan pitää sitä parempana, mitä pienemmän arvon informaatiokriteeri saa. Informaatiokriteerit suosivat näin ollen malleja, jotka maksimoivat log-uskottavuusfunktion arvon mahdollisimman pienellä parametrien lukumäärällä. (Alexander 2008a, 283.)

Mallien sopivuutta arvioidaan myös tutkimalla, esiintyykö innovaatiotermien  $z_t$  reaalisuusia kuvastavassa standardoitujen jäännösten aikasarjassa autokorrelaatiota tai heteroskedastisuutta. Mallien oletusten mukaisesti innovaatiotermien tulisi olla IID-jakautuneita. Näin ollen standardoitujen jäännösten aikasarjassa ei tulisi esiintyä merkittävää autokorrelaatiota tai heteroskedastisuutta. Standardoitujen jäännösten aikasarjoissa esiintyvän autokorrelaation merkittävyyttä testataan Ljung-Box-testillä viipeillä 1, ..., 5. Neliöityjen standardoitujen jäännösten heteroskedastisuuden merkittävyyttä arvioidaan puolestaan Lagrangen kerroin -testillä (Lagrange Multiplier, LM) viipeillä 1, ..., 7. Testin nollahypoteesin mukaan standardoitujen jäännösten aikasarjassa ei esiinny merkittävää heteroskedastisuutta, jolloin valittua GARCH-mallia voidaan pitää riittävänä. Taulukossa esitetyt testisuureet LB(5) ja LM(7) sekä niiden p-arvot viittaavat Fisherin ja Gallagherin (2012) esittelemiin Ljung-Box- ja Lagrangen kerroin -testien painotettuihin versioihin, joita voidaan pitää tavanomaisia testejä tehokkaampina.

Taulukossa 2 esitettyjen Ljung-Box-testien p-arvojen perusteella nollahypoteesi standardoitujen jäännösten autokorrelaatiomuudesta voidaan hyväksyä kaikkien mallien ja tuottoaikasarjojen osalta. Mallit huomioivat näin ollen aineistossa esiintyvän autokorrelaation riittävän hyvin. LM-testien mukaan kaikki mallit pystyvät myös huomioimaan aineistossa esiintyvän heteroskedastisuuden riittävän hyvin lukuun ottamatta MSCI AC Asia Pacific -indeksin tuottoaikasarjaan sovitettuja EGARCH-malleja, joiden osalta nollahypoteesi standardoitujen jäännösten homoskedastisuudesta hylätään 1 %:n merkitsevyystasolla. Log-uskottavuusfunktion sekä AIC- ja BIC-kriteerien arvojen perusteella t-jakaumaan perustuvat mallit sopivat aineistoon normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvia malleja paremmin kaikissa tapauksissa. Normaalijakaumaa paksuhäntäisempään t-jakaumaan perustuvien mallien soveltaminen vaikuttaa näin ollen perustellulta.

**Taulukko 2** Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaineistoon sovitettujen AR-GARCH-mallien vertailu

Taulukossa on esitetty estimoitujen AR-GARCH-mallien log-uskottavuusfunktion arvo, Akaiken (AIC) ja Bayesin (BIC) informaatiokriteerien arvot, standardoitujen jäännösten autokorrelaation merkittävyyttä mittaavan Ljung-Box-testisuureen (LB) arvo viipeillä 1,..., 5 sekä standardoitujen jäännösten heteroskedastisuutta mittaavan Lagrangen kerroin -testin (LM) arvo viipeillä 1,..., 7. Testien p-arvot on esitetty suluissa. Ehdollinen odotusarvo perustuu kaikissa malleissa AR(1)-malliin. Kunkin tuottoaikasarjan suurin log-uskottavuusfunktion arvo sekä pienimmät AIC- ja BIC-arvot on lihavoitu.

	$l(\hat{\alpha})$	AIC	BIC	LB(5)	LM(7)
<b>AM</b>					
GARCH-n	13383	-6,480	-6,472	2,201 (0,653)	1,285 (0,863)
GARCH-t	13469	-6,521	-6,512	2,433 (0,586)	0,863 (0,935)
GJR-n	13470	-6,522	-6,513	2,078 (0,689)	1,790 (0,762)
GJR-t	13540	-6,555	-6,544	2,590 (0,541)	3,241 (0,469)
EGARCH-n	13472	-6,522	-6,513	2,409 (0,593)	3,118 (0,492)
EGARCH-t	<b>13549</b>	<b>-6,560</b>	<b>-6,549</b>	3,246 (0,372)	2,757 (0,561)
<b>AP</b>					
GARCH-n	13011	-6,300	-6,292	1,607 (0,820)	4,614 (0,267)
GARCH-t	13057	-6,322	-6,313	2,047 (0,698)	6,985 (0,088)
GJR-n	13051	-6,319	-6,310	1,495 (0,848)	5,417 (0,186)
GJR-t	13087	-6,336	-6,325	1,750 (0,782)	6,109 (0,134)
EGARCH-n	13063	-6,324	-6,315	1,682 (0,800)	13,030 (0,003)
EGARCH-t	<b>13098</b>	<b>-6,341</b>	<b>-6,331</b>	1,832 (0,759)	14,400 (0,002)
<b>EU</b>					
GARCH-n	12593	-6,098	-6,090	2,428 (0,587)	6,094 (0,135)
GARCH-t	12641	-6,120	-6,111	2,682 (0,515)	7,209 (0,078)
GJR-n	12648	-6,124	-6,114	1,637 (0,812)	1,781 (0,764)
GJR-t	12690	-6,143	-6,133	1,781 (0,773)	1,868 (0,745)
EGARCH-n	12652	-6,125	-6,116	1,847 (0,755)	2,097 (0,697)
EGARCH-t	<b>12695</b>	<b>-6,146</b>	<b>-6,135</b>	1,884 (0,745)	2,046 (0,708)

Taulukosta 2 voidaan havaita, että asymmetristen GARCH-mallien AIC- ja BIC-arvot ovat kaikissa tapauksissa symmetristä GARCH(1,1)-mallia pienempiä. Asymmetriset

GARCH-mallit kuvaavat näin ollen tuottoaikasarjojen ehdollisen volatilitietin dynamiikkaa tavanomaista GARCH-mallia paremmin. GJR- ja EGARCH-mallien väliset erot ovat sen sijaan varsin pienet log-uskottavuusfunktion ja informaatiokriteerien arvojen perusteella. Informaatiokriteerien arvojen perusteella EGARCH-mallien voidaan kuitenkin todeta sopivan aineistoon hieman GJR-malleja paremmin. EGARCH-t-malli tuottaa kaikkien tuottoaikasarjojen osalta suurimmat log-uskottavuusfunktion arvot sekä pienimmät AIC- ja BIC-kriteerien arvot, minkä vuoksi EGARCH-t-mallia voidaan pitää parhaiten toimivana mallina.

Vaikka EGARCH-malli ei kykene huomioimaan MSCI AC Asia Pacific -tuottoaikasarjassa esiintyvää heteroskedastisuutta riittävän kattavasti LM-testien mukaan, ehdollisten VaR-mallien perustaksi valitaan sekä normaali- että t-jakaumaan perustuva AR(1)-EGARCH(1,1)-malli, joka sopii aineistoon parhaiten informaatiokriteerien arvojen perusteella. Lisäksi EGARCH-mallien varianssiyhtälön kaikki parametrit ovat kaikissa tapauksissa tilastollisesti merkitseviä vähintään 1 %:n merkitsevyystasolla. Sen sijaan GJR-malleissa varianssiyhtälön parametri  $\alpha$  ei ole tilastollisesti merkitsevä yhdessäkään tapauksessa, minkä lisäksi volatilitietin asymmetriaa kuvastava parametri  $\gamma$  on merkitsevä ainoastaan t-jakaumaan perustuvissa malleissa.

On myös syytä huomioida, että taulukossa 2 esitetyt tulokset koskevat tuottoaineistoa koko tarkastelujaksolla. VaR-mitan estimoinnissa sovellettavien mallien parametrit estimoidaan puolestaan liukuvan estimointi-ikkunan avulla, jolloin mallien sopivuus aineistoon vaihtelee luonnollisesti estimointiaineiston muuttuessa. MSCI AC Asia Pacific -tuottoaikasarjaan sovitettut EGARCH-mallit läpäisevät LM-testin esimerkiksi, jos estimointiaineisto sisältää aikasarjan ensimmäiset 1000 havaintoa, joihin myös ensimmäinen VaR-ennuste perustuu. EGARCH-mallin soveltamista puoltaa myös se, että mallin logaritmisuuden muodoksi varianssiyhtälön parametreille ei tarvitse asettaa vastaavia rajoitteita kuin GJR-mallissa.

Kunkin tuottoaikasarjan oletetaan näin ollen noudattavan seuraavaa dynamiikkaa

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t = \mu + \phi_1 (r_{t-1} - \mu) + \sigma_t z_t \\ \ln(\sigma_t^2) &= \omega + \alpha z_{t-1} + \gamma (|z_{t-1}| - E|z_{t-1}|) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

missä  $\mu = \phi_0 / (1 - \phi_1)$  kuvaa tuottoaikasarjan ehdollistamatonta odotusarvoa ja missä innovaatiotermien  $z_t$  oletetaan noudattavan joko standardoitua normaali- tai t-jakaumaa. Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaikasarjoihin sovitettujen mallien parametriestimaatit ja estimaattien p-arvot on esitetty liitteessä 1. Parametriestimaattien keskivirheet ja p-arvot perustuvat Whiten (1982) robusteihin keskivirheisiin.

Tuottosokkien  $\varepsilon_t$  ja siten myös innovaatiotermien  $z_t$  suuruus heijastuu ehdolliseen varianssiin ennen kaikkea parametrin  $\gamma$  kautta. Parametri  $\alpha$  kuvaa puolestaan tuottosokin etumerkin vaikutusta ehdolliseen varianssiin. Positiiviset tuottosokit heijastuvat ehdolliseen volatilitiettiin kertoimen  $(\gamma + \alpha)$  kautta, kun taas negatiiviset tuottosokit vaikuttavat

ehdolliseen volatiliteettiin kertoimen  $(\gamma - \alpha)$  mukaisesti. Koska parametri  $\gamma$  on positiivinen ja parametri  $\alpha$  on negatiivinen kaikissa tapauksissa liitteen 1 mukaan, negatiiviset tuottosokit kasvattavat tuottoaikasarjojen ehdollista volatiliteettia positiivisia tuottosokkeja voimakkaammin. Tuottoaikasarjoissa havaittava ehdollisen volatiliteetin asymmetria on näin ollen linjassa esimerkiksi Blackin (1976) havaintojen kanssa.

Huomionarvoista on myös, että t-jakaumaan perustuvissa malleissa vapausasteparametri  $\nu$  on tilastollisesti merkitsevä ja arvoltaan melko alhainen kaikkien tuottoaikasarjojen osalta, mikä puolestaan viestii innovaatiojakauman paksuhäntäisyydestä. Normaali-jakaumaan perustuva malli pidetään kuitenkin tarkasteluissa mukana, jotta voidaan tutkia, vaikuttaako innovaatiotermien jakaumaoletus VaR-mallien ennustekykyyneen. Vaikka innovaatioiden jakaumaoletus ei pitäisi paikkaansa, väärään jakaumaoletukseen pohjaavat estimaatit ovat silti tarkentuvia. Tällöin parametrien tilastollista merkitsevyyttä arvioitaessa tulee soveltaa robusteja keskivirheitä, jotka huomioivat, että malli on mahdollisesti väärin spesifioitu. Estimaatteja kutsutaan tällöin suurimman kvasi-uskottavuuden estimaateiksi (Quasi-Maximum Likelihood Estimate, QMLE). (White 1982.)

#### 4.2.2 *Kopulafunktioiden estimointi*

Tutkielmassa tarkasteltavien tuottoaikasarjojen paksuhäntäisyyden vuoksi tuottoaikasarjojen multinormaalisuusoletuksen soveltaminen ei ole perusteltua. Näin ollen indeksituottojen riippuvuuden mittaaminen lineaarisilla korrelaatiokertoimilla voi antaa vääristyneen kuvan tuottojen välisistä riippuvuussuhteista, minkä vuoksi tuottoaikasarjojen riippuvuusrakennetta mallinnetaan kopulafunktioilla, joiden avulla reunajakaumien ja riippuvuusrakenteen estimointi voidaan eriyttää toisistaan. Koska kopulafunktioiden estimointimenetelmien taustaoletuksena on, että estimointiaineiston sisältämät yksiuotteiset aikasarjat ovat IID-jakautuneita, kopulafunktioita ei soviteta suoraan tuottoaikasarjoihin niissä esiintyvän autokorrelaation ja heteroskedastisuuden vuoksi (ks. esim. Weiß 2011). Sen sijaan kopulafunktiot sovitetaan AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien standardoiduista jäännöksistä muodostettuihin kaksiuotteisiin aikasarjoihin, joista aineistossa esiintyvä autokorrelaatio ja heteroskedastisuus on poistettu.

Kunkin tuottoaikasarjan standardoidut jäännökset saadaan laskettua esitystä (4.4) soveltamalla seuraavasti

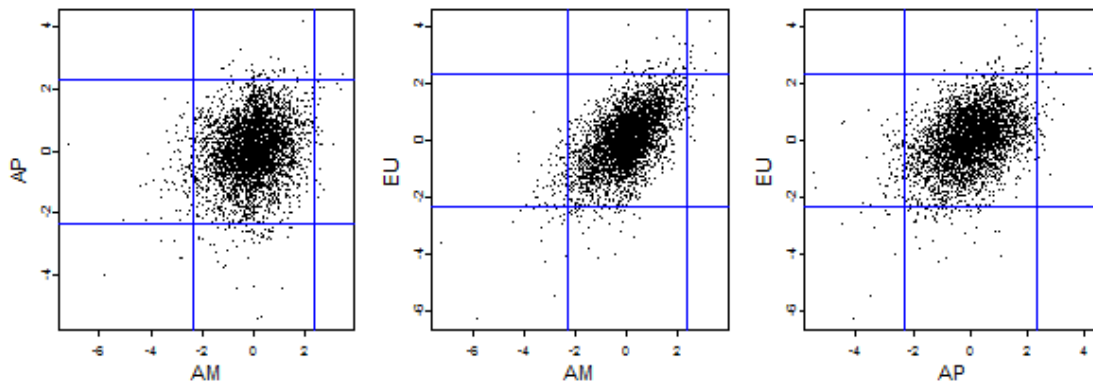
$$\hat{z}_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t}, \quad (4.5)$$

missä ajanhetkien  $t = 1, \dots, T$  ehdollisen odotusarvon ja volatiliteetin estimaattorit saadaan määritettyä soveltamalla rekursiivisesti kaavan (4.4) ehdollisen odotusarvon ja varianssin esitystä. Tämän jälkeen standardoitujen jäännösten aikasarjoista muodostetaan kolme

kaksiulotteista aikasarjaa. Esimerkiksi MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -tuottoaikasarjojen standardoiduista jäännöksistä muodostettu kaksiulotteinen aikasarja on muotoa

$$\{\hat{\mathbf{z}}_{AM-AP,t} = (\hat{z}_{AM,t}, \hat{z}_{AP,t})' : t = 1, \dots, T\}. \quad (4.6)$$

Kunkin indeksiparin standardoiduista jäännöksistä muodostetut sirontakuviot on esitetty kuviossa 4. Standardoidut jäännökset on laskettu koko tarkastelujakson aineistoon sovitettujen normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvien mallien ja niiden parametriestimaattien avulla. Kuviossa esitetyt vaaka- ja pystyviivat kuvaavat standardoidun normaalijakauman 1 %:n ja 99 %:n kvantiileja.



**Kuvio 4** Tuottoaikasarjoihin sovitettujen normaalijakaumaan perustuvien AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien standardoitujen jäännösten sirontakuviot

Kuviossa on esitetty aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 indeksituottoihin sovitettujen AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien standardoiduista jäännöksistä muodostetut sirontakuviot. Standardoidut jäännökset on laskettu normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvista malleista. Pysty- ja vaakaviivat kuvaavat standardoidun normaalijakauman 1 %:n ja 99 %:n kvantiileja.

Kuviosta 4 voidaan havaita silmämääräisesti, että kunkin indeksiparin standardoitujen jäännösten välillä vallitsee positiivinen riippuvuussuhde. Positiivinen riippuvuussuhde vaikuttaa olevan voimakkainta MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -indeksien jäännösten välillä. Kuvioden vertailu esimerkiksi luvussa 3.2.1 esitettyihin sirontakuvioiden ilmentää myös, että erityisesti MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -indeksien sekä MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -indeksien tuottojen standardoitujen jäännösten välinen riippuvuusrakenteesta vaikuttaa poikkeavan Gaussin kopulan mukaisesta riippuvuusrakenteesta kuviossa 4 havaittavien samanaikaisten ääriarvojen vuoksi. Samanaikaiset ääriarvot viestivät innovaatioiden välisestä häntäriippuvuudesta. Riskienhallinnan kannalta huomionarvoista on ennen kaikkea se, että samanaikaiset ääriarvot painottuvat kuvioden vasempaan alareunaan, minkä vuoksi häntäriippuvuus vaikuttaisi koskevan ainakin negatiivisia havaintoja.



Standardoitujen jäännösten välistä riippuvuusrakennetta mallinnetaan Gaussin, Claytonin ja Gumbelin kopulalla sekä t-kopulalla. Väärin spesifioiduista reunajakaumista aiheutuva malliriski pyritään minimoimaan soveltamalla kopulafunktioiden estimoinnissa Genestin ym. (1995) esittelemää CML-menetelmää. Menetelmässä standardoitujen jäännösten kaksiulotteisten aikasarjojen komponentit muunnetaan tasajakautuneiksi pseudo-havainnoiksi todennäköisyysmuunnosten avulla. Parametristen jakaumien sijaan todennäköisyysmuunnoksissa sovelletaan standardoitujen jäännösten empiiristä kertymäfunktioita. Esimerkiksi MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -tuottoaikasarjojen standardoiduista jäännöksistä muodostetut pseudo-havainnot ovat muotoa

$$\{\hat{\mathbf{U}}_{AM-AP,t} = (\hat{U}_{AM,t}, \hat{U}_{AP,t})' = (\hat{F}_{AM}(\hat{z}_{AM,t}), \hat{F}_{AP}(\hat{z}_{AP,t}))' : t = 1, \dots, T\}, \quad (4.7)$$

missä  $\hat{F}$  viittaa kaavan (2.25) mukaiseen tuottoaikasarjan standardoitujen jäännösten empiiriseen kertymäfunktioon, joka on kerrottu tekijällä  $T/(T-1)$ . Tekijällä  $T/(T-1)$  kertomisen tarkoituksena on varmistaa, että pseudo-havainnot eivät saa arvoa 0 tai 1, mikä helpottaa uskottavuusfunktion maksimointiongelman ratkaisemista (McNeil ym. 2015, 270).

Kopulafunktion parametrit sisältävä parametrivektori  $\boldsymbol{\theta}$  estimoidaan maksimoimalla pseudo-havainnoista muodostettu logaritminen uskottavuusfunktio, joka esimerkiksi MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -tuottoaikasarjojen osalta on muotoa

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{U}_{AM,t}, \hat{U}_{AP,t}; \boldsymbol{\theta}), \quad (4.8)$$

missä kopulatiheyden  $c$  yleinen muoto on esitetty kaavassa (3.7). Kopulatiheyden ja siten myös kaavassa (4.8) esitetyn logaritmissen uskottavuusfunktion täsmällinen muoto riippuu luonnollisesti estimoitavan kopulafunktion tyypistä.

Taulukossa 3 on esitetty aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 standardoitujen jäännösten kaksiulotteisiin aikasarjoihin sovitettujen kopulafunktioiden parametriestimaatit, logaritmissen uskottavuusfunktion sekä AIC- ja BIC-kriteerien arvot. Taulukossa on myös esitetty parametrisen kopulafunktion sopivuutta arvioivan Cramér-von Mises -testisuureen ( $S_n$ ) arvo sekä testin p-arvo. Testin nollahypoteesina on, että aineistossa esiintyvät riippuvuusrakenteet vastaavat estimoidun kopulafunktion mukaista riippuvuusrakenteen kuvausta. Testisuureen arvo on laskettu aineiston ei-parametrisen empiirisen kopulafunktion ja estimoidun kopulafunktion arvojen erotuksen neliöiden summana. Mitä pienempi testisuureen arvo on, sitä paremmin malli sopii aineistoon. Testin p-arvo on laskettu soveltamalla parametrista bootstrap-menetelmää. (Genest ym. 2009.)

**Taulukko 3** Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottojen standardoitujen jäännösten kaksiosuotteisiin aikasarjoihin sovitettujen kopulafunktioiden vertailu

Taulukossa on esitetty kunkin indeksiparin aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottojen standardoitujen jäännösten aikasarjoihin sovitettujen kopulafunktioiden parametrit, log-uskottavuusfunktion arvo sekä Akaiken (AIC) ja Bayesian (BIC) informaatiokriteerien arvot. Tulokset on esitetty sekä normaalijakaumaan että t-jakaumaan perustuvien AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien jäännöksille. Suurin log-uskottavuusfunktion arvo sekä pienimmät AIC- ja BIC-arvot on lihavoitu kunkin indeksiparin ja reunajakaumaoletuksen osalta.  $S_n$  on Cramér-von Mises -testisuure, joka mittaa estimoidun kopulafunktion sopivuutta aineistoon. Testin nollahypoteesina on, että estimoitu kopulafunktio kuvaa aineistossa esiintyviä riippuvuusrakenteita riittävän hyvin. Testin p-arvo on esitetty suluissa.

	AM-AP		AM-EU		AP-EU	
	n	t	n	t	n	t
<b>Gaussin kopula</b>						
$\rho$	0,203	0,200	0,586	0,584	0,415	0,414
$l(\theta)$	86,6	84,1	865,3	856,2	387,9	386,8
AIC	-171,2	-166,2	-1728,6	-1710,5	-773,8	-771,6
BIC	<b>-164,9</b>	<b>-159,9</b>	-1722,2	-1704,2	<b>-767,4</b>	<b>-765,3</b>
$S_n$	0,028 (0,999)	0,025 (1,000)	0,047 (0,968)	0,046 (0,952)	0,035 (0,991)	0,033 (1,000)
<b>t-kopula</b>						
$\rho$	0,202	0,199	0,584	0,582	0,414	0,413
$\nu$	24,12	25,02	8,06	7,95	23,77	24,20
$l(\theta)$	<b>89,7</b>	<b>87,0</b>	<b>892,8</b>	<b>885,9</b>	<b>391,6</b>	<b>390,4</b>
AIC	<b>-175,4</b>	<b>-170,0</b>	<b>-1781,6</b>	<b>-1767,8</b>	<b>-779,3</b>	<b>-776,8</b>
BIC	-162,8	-157,3	<b>-1769,0</b>	<b>-1755,2</b>	-766,6	-764,2
$S_n$	0,026 (1,000)	0,023 (1,000)	0,024 (1,000)	0,023 (1,000)	0,032 (0,994)	0,030 (0,997)
<b>Claytonin kopula</b>						
$\theta$	0,225	0,219	0,903	0,895	0,538	0,536
$l(\theta)$	73,3	69,9	674,4	664,3	313,8	311,7
AIC	-144,7	-137,8	-1346,9	-1326,7	-625,5	-621,4
BIC	-138,3	-131,4	-1340,5	-1320,3	-619,2	-615,1
$S_n$	0,114 (0,534)	0,116 (0,505)	1,202 (0,003)	1,221 (0,001)	0,453 (0,039)	0,458 (0,039)
<b>Gumbelin kopula</b>						
$\delta$	1,119	1,117	1,603	1,600	1,314	1,314
$l(\theta)$	70,0	68,3	828,4	824,4	328,1	327,2
AIC	-138,0	-134,7	-1654,8	-1646,8	-654,2	-652,5
BIC	-131,7	-128,3	-1648,5	-1640,5	-647,8	-646,2
$S_n$	0,134 (0,367)	0,123 (0,446)	0,226 (0,173)	0,221 (0,206)	0,309 (0,072)	0,303 (0,082)

Taulukossa 3 esitetyt estimointitulokset vahvistavat kuviossa 4 havaittavat ilmiöt. Kunkin indeksiparin jäännösten välillä vallitsee positiivinen riippuvuussuhde, mikä voidaan havaita kopulaparametrien estimoiduista arvoista. Lisäksi positiivinen riippuvuus on voimakkainta MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -indeksien välillä ja heikointa

MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -indeksien välillä. Log-uskottavuusfunktion sekä AIC-kriteerin arvojen perusteella t-kopula kuvaa koko tarkastelujakson aineistossa esiintyviä riippuvuussuhteita parhaiten kaikkien indeksiparien ja reunajakaumaoleusten osalta. BIC-kriteerin perusteella Gaussin kopula kuvaa parhaiten MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -indeksien sekä MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -indeksien välisiä riippuvuusrakenteita, kun taas t-kopula sopii parhaiten MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -tuottoaikasarjojen standardoitujen jäännösten aineistoon.

Informaatiokriteerien perusteella Gumbelin kopula toimii heikoiten MSCI AC Americas- ja MSCI AC Asia Pacific -indeksien välisen riippuvuussuhteen kuvaamisessa. Kaikissa muissa tapauksissa Claytonin kopula sopii aineistoon huonoiten AIC- ja BIC-kriteerien perusteella. Mallien sopivuutta arvioivien Cramér-von Mises -testien perusteella kaikki kopulafunktiot voidaan hyväksyä kaikkien indeksiparien osalta lukuun ottamatta Claytonin kopulaa, joka voidaan hylätä vähintään 5 %:n merkitsevyytasolla sekä MSCI AC Americas- ja MSCI AC Europe -indeksien että MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -indeksien osalta. Cramér-von Mises -testit eivät näin ollen anna yksiselitteistä vastausta siihen, mikä kopula sopii aineistoon parhaiten.

Taulukon 3 tulosten perusteella häntäriippuvuutta sisältävä t-kopula vaikuttaisi sopivan koko tarkastelujakson aineistoon parhaiten. Weißin (2011) ja Weißin (2013) tutkimuksissa kuitenkin todetaan, että kopulafunktioiden sopivuutta arvioivien testien tulokset ovat varsin usein ristiriidassa kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien estimointiaineiston ulkopuolisen ennustekyvyn kanssa. Tutkimustulosten mukaan mallien sopivuutta arvioivat testit johtivat hyvin usein kaikkien estimoitujen kopulamallien hyväksymiseen, vaikka osa malleista hylättiin VaR-mitan toteumatestauksen perusteella. Weißin (2011) mukaan myös noin 20 %:ssa kaikista tapauksista kopulafunktioiden sopivuutta arvioivat testit johtivat VaR-mallien ennustekyvyn näkökulmasta optimaalisen kopulafunktion hylkäämiseen.

Koska tutkielmassa kopulamallien ensisijaisena arviointikriteerinä pidetään niihin perustuvien VaR-mallien ennustekykyä, kopulafunktioiden sopivuutta arvioivia testejä ja mittareita ei sovelleta kopulafunktioiden hylkäämiseen tai valitsemiseen. Toisaalta on myös mielenkiintoista tarkastella, ovatko taulukossa 3 esitetyt kopuloiden sopivuutta arvioivat tulokset johdonmukaisia Gaussin, Claytonin ja Gumbelin kopulaan sekä t-kopulaan perustuvien VaR-mallien ennustekykyä arvioivien testien kanssa. On myös syytä huomioida, että eri kopulafunktioiden sopivuus voi vaihdella ajassa tarkastelujakson aikana riippuen VaR-mallien estimoinnissa sovellettavan liukuvan estimointi-ikkunan sisältämästä havaintoaineistosta.

### 4.3 Value at Risk -mitan estimointi ja mallien vertailu

#### 4.3.1 Sovellettujen estimointimenetelmien kuvaus

Kullekin tarkasteltavalle portfoliolle lasketaan 95 %:n ja 99 %:n VaR-mitat yhteensä 15 eri menetelmällä. VaR-mitan ehdollistamattomat estimointimenetelmät perustuvat varianssi-kovarianssimenetelmään (VC) sekä tavanomaiseen historialliseen simulointiin (HS). Ehdollisissa menetelmissä VaR-mitta estimoidaan AR(1)-EGARCH(1,1)-malliin perustuvalla ehdollisella historiallisella simuloinnilla (FHS) sekä AR(1)-EGARCH(1,1)-mallin ja neljän eri kopulafunktion yhdistelmään pohjautuvalla Monte Carlo -menetelmällä. Historiallisen simuloinnin ehdollisen version perustana olevan AR-EGARCH-mallin estimoinnissa innovaatiotermien oletetaan noudattavan normaalijakaumaa, jolloin mallin parametriestimaatit voidaan tulkita QMLE-estimaateiksi, vaikka jakaumaoletus ei olisikaan perusteltu. Monte Carlo -menetelmässä AR-EGARCH-malli puolestaan estimoidaan sekä normaali- että t-jakaumaan perustuen. Monte Carlo -menetelmään perustuvassa VaR-estimoinnissa sovelletaan normaali- ja t-jakauman lisäksi standardoitujen jäännösten empiirisiä kertymäfunktioita ja kvantiiliestimaattoreita. Standardoitujen jäännösten empiirisiä reunajakaumia sovellettaessa AR-EGARCH-malli estimoidaan ehdollisen historiallisen simuloinnin tapaan normaalijakaumaoletukseen perustuen. Monte Carlo -menetelmällä estimoituihin VaR-malleihin viitataan tutkielman taulukoissa lyhenteillä Gauss-n, Gauss-t, Gauss-e, Clayton-n, Clayton-t, Clayton-e, Gumbel-n, Gumbel-t, Gumbel-e, t-n, t-t ja t-e, joissa lyhenteen ensimmäinen osa viittaa sovellettuun kopulafunktion ja jälkimmäinen osa standardoitujen jäännösten reunajakaumaoletukseen.

Kopulafunktioihin ja AR-EGARCH-malliin pohjautuvassa Monte Carlo -menetelmässä kunkin portfolion VaR-mitta estimoidaan liukuvaan 1000 havainnon estimointiikkunaan perustuen. Ajanhetkellä  $t$  estimoitavan VaR-mitan perustana olevat parametriset mallit estimoidaan näin ollen portfolion sisältämien osakeindeksien logaritmistien tuottojen aineistosta  $\{\mathbf{R}_s: s = t - n + 1, \dots, t\}$ , missä  $n = 1000$ . Tutkielmassa sovellettavan Monte Carlo -menetelmän peruseriaatteet perustuvat muun muassa Alouin ym. (2011), Braunin ja Hackethalin (2013), Junkerin ja Mayn (2005), Lain (2008) sekä Weißin (2011; 2013) tutkimuksissa sovellettuihin menetelmiin. Menetelmän ensimmäisessä vaiheessa estimointi-ikkunan sisältämiin yksiuolotteisiin tuottoaikasarjoihin sovitetaan AR(1)-EGARCH(1,1)-malleja, joiden odotusarvo- ja volatilitteettiestimaattien avulla muodostetaan standardoitujen jäännösten aikasarjat kaavan (4.5) mukaisesti. Seuraavassa vaiheessa standardoitujen jäännösten kaksiuolotteisiin aikasarjoihin sovitetaan erilaisia kopulafunktioita, joiden parametrit estimoidaan CML-menetelmällä soveltamalla esityksiä (4.7) ja

(4.8), minkä jälkeen kustakin estimoidusta kopulafunktiosta simuloidaan kaksi tasajakautunutta satunnaismuuttujaa. Simulointi toistetaan yhteensä 10000 kertaa, minkä tuloksena saadaan 10000 tasajakautuneista muuttujista koostuvaa satunnaisvektoria

$$\left\{ \tilde{\mathbf{U}}_{t+1}^{(i)} = (\tilde{U}_{1,t+1}^{(i)}, \tilde{U}_{2,t+1}^{(i)})' : i = 1, \dots, 10000 \right\}, \quad (4.9)$$

missä kunkin simuloidun satunnaisvektorin yhteisjakauma vastaa estimoitua kopulafunktiota. Tasajakautuneiden muuttujien simuloinnissa sovelletut menetelmät on kuvattu tarkemmin liitteessä 2.

Menetelmän neljännessä vaiheessa kaavassa (4.9) esitetyt tasajakautuneet muuttujat muunnetaan osakeindeksituottojen simuloiduiksi standardoiduiksi jäännöksiksi käyttämällä standardoitujen jäännösten reunajakaumaoletuksen mukaista kvantiilifunktiota. Tuloksena saadaan 10000 simuloitua standardoitujen jäännösten vektoria, jotka voidaan esittää muodossa

$$\left\{ \tilde{\mathbf{Z}}_{t+1}^{(i)} = (\tilde{Z}_{1,t+1}^{(i)}, \tilde{Z}_{2,t+1}^{(i)})' = (F_1^{\leftarrow}(\tilde{U}_{1,t+1}^{(i)}), F_2^{\leftarrow}(\tilde{U}_{2,t+1}^{(i)}))' : i = 1, \dots, 10000 \right\}, \quad (4.10)$$

missä  $F_1^{\leftarrow}$  ja  $F_2^{\leftarrow}$  ovat joko standardoidun normaali- tai t-jakauman käänteisfunktioita tai menetelmän ensimmäisessä vaiheessa muodostettujen standardoitujen jäännösten empiirisiä kvantiiliestimaattoreita. Standardoidun t-jakauman vapausasteparametri vastaa menetelmän ensimmäisessä vaiheessa AR-EGARCH-mallien kalibroinnin yhteydessä estimoitua vapausasteparametria. Standardoitujen jäännösten empiirinen kvantiiliestimaattori muodostetaan käyttämällä R-ohjelmiston oletusarvoista jatkuvaa kvantiilifunktiota, joka interpoloi peräkkäisten havaintojen välillä. Sklarin (1959) lauseen nojalla kaavassa (4.10) esitetyt standardoitujen jäännösten vektorit noudattavat yhteisjakaumaa, jonka reunajakaumat ovat  $F_1$  ja  $F_2$  ja jonka riippuvuusrakenteen määrittänyt yksinomaan menetelmän toisessa vaiheessa estimoidun kopulafunktion perusteella.

Viidennessä vaiheessa standardoitujen jäännösten simuloidut realisaatiot muunnetaan simuloiduiksi osakeindeksituotoiksi kunkin tuottoaikasarjan ajanhetken  $t + 1$  odotusarvo- ja volatiliteettiennusteiden avulla seuraavasti

$$\left\{ \tilde{\mathbf{R}}_{t+1}^{(i)} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{t+1} + \hat{\mathbf{D}}_{t+1} \tilde{\mathbf{Z}}_{t+1}^{(i)} : i = 1, \dots, 10000 \right\}. \quad (4.11)$$

Koska ajanhetken  $t + 1$  ehdollinen odotusarvo ja volatiliteetti riippuvat ainoastaan ennustehetkellä  $t$  saatavilla olevasta informaatiosta, odotusarvo- ja volatiliteettiennusteet voidaan laskea suoraan esityksestä (4.4) käyttämällä estimointiaineistoon sovitettujen AR-EGARCH-mallien parametriestimaatteja. Menetelmän viimeisessä vaiheessa simuloidut osakeindeksituotot muunnetaan portfolion ajanhetken  $t + 1$  simuloiduiksi tappioiksi

$$\left\{ \tilde{L}_{t+1}^{(i)} = -\mathbf{w}' \tilde{\mathbf{R}}_{t+1}^{(i)} : i = 1, \dots, 10000 \right\}, \quad (4.12)$$

missä  $\mathbf{w} = (1/2, 1/2)'$  on suhteellisten portfoliopainojen vektori. Portfolion VaR-mitta luottamustasolla  $\alpha$  saadaan määrittämällä simuloidun tappiojakauman  $\alpha$ -kvantiili tappiojakauman empiirisen kvantiiliestimaattorin avulla. Ensimmäinen VaR-estimaatti muodostetaan ajanhetkellä  $t = 1000$ , joka vastaa päivämäärää 3.1.2005. Ensimmäinen VaR-luku estimoii näin ollen portfolion seuraavan kaupankäyntipäivän 4.1.2005 suurinta odotettua tappiota luottamustasolla  $\alpha$ . Menetelmä toistetaan liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen ajanhetkillä  $t = 1001, \dots, 4128$ . Näin ollen estimoitujen VaR-lukujen kokonaismäärä on 3129.

Esitysten (4.11) ja (4.12) perusteella on selvää, että estimoidun VaR-mitan suuruus määräytyy ennustehetkellä muodostettujen odotusarvo- ja volatiliteettiestimaattien sekä simuloitujen innovaatioiden reunajakaumien perusteella. Koska ehdollista volatiliteettia mallinnetaan epäsymmetrisellä EGARCH-mallilla, osakeindeksituottojen ehdollinen volatiliteetti voi reagoida eri tavalla negatiivisiin ja positiivisiin innovaatioihin. VaR-mitan tasoon vaikuttaa luonnollisesti myös simuloitujen innovaatioiden välinen riippuvuus rakenne, joka perustuu estimoituihin kopulafunktioihin. Mitä voimakkaampi positiivinen riippuvuus rakenne innovaatiotermien välillä vallitsee ja mitä korkeampi samanaikaisten ja itseisarvoltaan suurten negatiivisten innovaatioiden todennäköisyys on sovelletun kopulafunktion perusteella, sitä suurempia VaR-estimaatteja menetelmä tuottaa muiden tekijöiden pysyessä muuttumattomina.

Tavanomainen historiallinen simulointi ja ehdollinen historiallinen simulointi poikkeavat Monte Carlo -menetelmästä osakeindeksituottojen simuloinnissa sovellettujen menetelmien osalta. Historiallisen simuloinnin ehdollistamattomassa versiossa portfolion simuloidut tappiot muodostetaan suoraan estimointi-ikkunan sisältämien osakeindeksituottojen realisaatioiden  $\{\mathbf{R}_s; s = t - n + 1, \dots, t\}$  ja suhteellisten portfoliopainojen avulla. Ehdollisessa historiallisessa simuloinnissa estimointiaineistoon sovitetaan Monte Carlo -menetelmän tavoin AR-EGARCH-malleja, mutta osakeindeksituottojen simuloinnissa käytetään estimoitujen AR-EGARCH-mallien avulla esityksen (2.28) mukaisesti laskettuja standardoitujen jäännösten aikasarjoja. Historiallisen simuloinnin molemmissa versioissa VaR-mitan perustana olevien simuloitujen tappioiden lukumäärä vastaa näin ollen sovelletun estimointi-ikkunan pituutta  $n = 1000$ . Portfolion VaR-mitta lasketaan molemmissa menetelmissä simuloidun tappiojakauman empiirisen kvantiiliestimaattorin avulla vastaavalla tavalla kuin Monte Carlo -menetelmässä.

Tutkielmassa sovellettu indeksituottojen multinormaalisuusoletukseen pohjautuva varianssi-kovarianssimenetelmä perustuu J.P. Morganin (1996) RiskMetrics-mallin mukaiseen eksponentiaalisesti painotettuun liukuvan keskiarvon menetelmään (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA), jossa indeksituottojen viimeisimpien havaintojen vaikutus varianssi-kovarianssimatriisiestimaatteihin on tavanomaista painottamatonta estimointimenetelmää voimakkaampi. VaR-mitan laskenta perustuu suoraan esityksen

(2.16) mukaiseen analyttiseen kaavaan, jossa vakiotermi ja riskifaktorituottojen odotusarvoa kuvaava komponentti oletetaan RiskMetrics-mallin mukaisesti nolliksi. Varianssi-kovarianssimenetelmään perustuva VaR-mitta ja varianssi-kovarianssimatriisiestimaattien päivitysprosessi voidaan näin ollen esittää seuraavasti

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha^t &= \sqrt{\mathbf{w}'\hat{\Sigma}_{t+1}\mathbf{w}} \Phi^{-1}(\alpha) \\ \hat{\Sigma}_{t+1} &= \lambda\hat{\Sigma}_t + (1-\lambda)\mathbf{R}_t\mathbf{R}_t', \end{aligned} \quad (4.13)$$

missä painotuskerroin  $\lambda$  määrittää, kuinka voimakkaasti viimeisimmät tuottosokit heijastuvat varianssi- ja kovarianssiestimaatteihin. Painotuskertoimen arvoksi asetetaan 0,94 RiskMetrics-mallin mukaisesti. Ajanhetkellä  $t = 1000$  estimoitavan VaR-mitan laskennassa tarvittavan varianssi-kovarianssimatriisin alkuarvona  $\hat{\Sigma}_{1000}$  käytetään estimointi-ikkunan sisältämistä indeksituotoista  $\{\mathbf{R}_s: s = 1000 - n + 1, \dots, 1000\}$  laskettua otoskovarianssimatriisia. Estimointi-ikkunan pituudeksi  $n$  asetetaan muiden menetelmien tavoin 1000 havaintoa.

#### 4.3.2 VaR-mallien toteumatestaus ja mallien suhteellisen ennustekyvyn arviointi

Eri estimointimenetelmiin perustuvien VaR-mallien ennustekykyä ja luotettavuutta arvioidaan sekä mallien absoluuttista että suhteellista ennustekykyä mittaavien tilastollisten testien avulla. Sovellatut arviointikriteerit perustuvat ajanhetkellä  $t = 1000, \dots, 4128$  estimoidun VaR-mitan ja tarkasteltavan portfolion ajanhetkellä  $t + 1$  realisoituvan tappion vertailuun. Kunkin portfolion realisoituneita tappioita laskettaessa portfolioon sisältyvien indeksien suhteelliset portfoliopainot oletetaan yhtä suuriksi, minkä lisäksi painojen oletetaan pysyvän muuttumattomina koko tarkastelujakson ajan.

VaR-estimaatteja verrataan portfolioiden toteutuneisiin tappioihin aikavälillä 4.1.2005–30.12.2016 sekä osaperiodeilla 4.1.2005–31.12.2007, 1.1.2008–30.12.2011 ja 2.1.2012–30.12.2016. Mallien ennustekyvyn tarkastelu osaperiodeittain antaa mielenkiintoista lisätietoa siitä, vaihtelee ko mallien ennustekyky ajassa ja onko mallien suhteellinen ennustekyky riippuvainen tarkastelujaksosta. Erityisen mielenkiintoista on tarkastella, miten eri mallit suoriutuvat finanssikriisin ja sitä seuranneen taantumien sisältävällä toisella osaperiodilla, joka sisältää poikkeuksellisen voimakkaita samanaikaisia kurssilaskuja kaikilla tarkasteltavilla osakemarkkinoilla. Viimeistä osaperiodia koskeva tarkastelu kertoo puolestaan, miten hyvin eri VaR-mallit sopeutuvat merkittävän kriisiperiodin jälkeiseen alhaisemman volatilitietin markkinaregiimiin. Vuosia 2012–2016 koskeva tarkastelu on mielenkiintoista myös siksi, että useimmissa aikaisemmissa kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekykyä arvioivissa tutkimuksissa tarkastelujakso ei ulotu vuotta 2009 pidemmälle.

Arvioinnin ensimmäisessä vaiheessa mallien suorituskykyä arvioidaan Kupiec'n (1995) ehdollistamattoman kattavuuden ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testeillä. Molemmat testit perustuvat VaR-estimaattien ja toteutuneiden tappioiden aikasarjojen avulla esityksen (2.31) mukaisesti muodostettuun indikaattorifunktioiden aikasarjaan  $\{\mathbf{1}_{t+1}: t = 1000, \dots, 4128\}$ . Kupiec'n (1995) testin nollahypoteesin mukaan VaR-mitan ylitysten suhteellinen frekvenssi vastaa sovelletun VaR-mallin riskitasoa  $1 - \alpha$ , mikä on yhtäpitävä ehdon  $E(\mathbf{1}_{t+1}) = 1 - \alpha$  kanssa. Mikäli toteumatestausaineiston koko on  $T$ , Kupiec'n (1995) testin testisuure voidaan esittää muodossa

$$\text{LR}_{\text{UC}} = -2 \ln \left( \frac{p^{n_1} (1-p)^{n_0}}{\pi^{n_1} (1-\pi)^{n_0}} \right), \quad (4.14)$$

missä  $p = 1 - \alpha$  kuvaa ylitysten odotettua suhteellista frekvenssiä,  $n_1$  on ylitysten lukumäärä,  $n_0 = T - n_1$  on VaR-mitan alittavien tappioiden lukumäärä ja  $\pi = n_1/T$  on ylitysten toteutunut suhteellinen frekvenssi. Testisuure noudattaa asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakaumaa vapausasteella 1.

Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin nollahypoteesin mukaan ylitysten lukumäärä vastaa mallin riskitasoon perustuvaa odotettua ylitysmäärää, minkä lisäksi ylitykset esiintyvät toisistaan riippumatta. Nollahypoteesi voidaan esittää indikaattorifunktion avulla muodossa  $E(\mathbf{1}_{t+1} | \Omega_t) = 1 - \alpha$ . Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testi voidaan nähdä ehdollistamattoman kattavuuden ja riippumattomuusoletuksen yhteistestinä. Christoffersenin (1998) riippumattomuustestin nollahypoteesin mukaan ajanhetkellä  $t$  tapahtuva ylitys ei vaikuta todennäköisyyteen, että myös seuraavalla periodilla  $t + 1$  tapahtuu VaR-mitan ylitys. Riippumattomuustestin vastahypoteesin mukaan indikaattorifunktioiden aikasarja muodostaa ensimmäisen asteen Markov-ketjun siirtymätodennäköisyysmatriisilla

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

missä  $\pi_{ij} = P(\mathbf{1}_{t+1} = j | \mathbf{1}_t = i)$ . Nollahypoteesin mukaan siirtymätodennäköisyyksille on siis voimassa  $\pi_{01} = \pi_{11} = P(\mathbf{1}_{t+1} = 1)$ . Siirtymätodennäköisyyksien empiiriset estimaattorit voidaan määrittellä seuraavasti

$$\pi_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \quad \wedge \quad \pi_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \quad (4.16)$$

missä  $n_{ij}$  on sellaisten tapahtumien lukumäärä, joissa indikaattorifunktio saa peräkkäiset arvot  $i$  ja  $j$ . Riippumattomuustestin testisuure voidaan tällöin esittää muodossa



$$\text{LR}_{\text{IND}} = -2 \ln \left( \frac{\pi^{n_1} (1-\pi)^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}} (1-\pi_{01})^{n_{00}} \pi_{11}^{n_{11}} (1-\pi_{11})^{n_{10}}} \right), \quad (4.17)$$

missä  $\pi = (n_{01} + n_{11}) / (n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11})$ . Riippumattomuustestin testisuure noudattaa asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakaumaa vapausasteella 1. Ehdollisen kattavuuden testin testisuure voidaan ilmaista Kupiecin (1995) testin ja riippumattomuustestin testisuureiden summana

$$\text{LR}_{\text{CC}} = \text{LR}_{\text{UC}} + \text{LR}_{\text{IND}}. \quad (4.18)$$

Kaavassa (4.18) esitetty testisuure on asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakautunut vapausasteella 2.

Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien tarkoituksena on tunnistaa VaR-mallit, jotka rikkovat joko ylitysten riippumattomuusoletusta tai jotka johtavat liian suuriin tai pieniin ylitysmääriin sovellettuun luottamustasoon verrattuna. Tarkasteltava VaR-malli luokitellaan hyväksyttäväksi, mikäli sekä Kupiecin (1995) että Christoffersenin (1998) testien nollahypoteesit voidaan hyväksyä 5 %:n merkitsevyystasolla vähintään kahden tarkasteltavan portfolion osalta. Mallien hyväksyttävyyttä arvioidaan erikseen sekä 95 %:n että 99 %:n VaR-mallien osalta. Osaperioditarkastelussa arvioidaan tilan säästämiseksi ainoastaan 99 %:n VaR-mallien suorituskykyä. 95 %:n VaR-mallien rajaaamista osaperioditarkastelun ulkopuolelle voidaan myös perustella sillä, että 95 %:n luottamustasoa voidaan pitää varsin alhaisena, mikäli VaR-malleja sovelletaan tappioilta suojaavien pääomapuskurien määrittämiseen. Esimerkiksi luottolaitosten vakavaraisuussääntelyssä sovelletaan 99 %:n luottamustasoa, minkä vuoksi 99 %:n VaR-mallien tarkastelu antaa tarkoituksenmukaisemman kuvan estimointimenetelmien ennustekyvystä eri tarkastelujaksoilla.

VaR-mallien arvioinnin toisessa vaiheessa toteumatestien perusteella hyväksyttävästi toimivien mallien ennustekykyä vertaillaan Giacominin ja Whiten (2006) ehdollisen ennustekyvyn (Conditional Predictive Ability, CPA) testin avulla. CPA-testi perustuu tarkasteltavien mallien ennustekykyä kuvaavien tappiofunktioiden aikasarjojen vertailuun. Mitä pienempiin tappiofunktion arvoihin sovellettu ennustemalli johtaa, sitä parempana mallin ennustekykyä voidaan pitää. CPA-testin perustaksi valitaan kaavassa (2.32) esitetty asymmetrinen tappiofunktio, sillä kyseinen tappiofunktio on tilastotieteellisesti mielekäs ja johdonmukainen arviointikriteeri, mikäli arvioinnin kohteena on tappiojakauman  $\alpha$ -kvantiilia ennustava VaR-malli (Giacomini & Komunjer 2005). Kyseinen tappiofunktio on mielekäs arviointikriteeri myös riskienhallinnan näkökulmasta, sillä VaR-mitan ylitykset heikentävät tarkasteltavan mallin arviota VaR-mitan alituksia voimakkaammin.

CPA-testin nollahypoteesin mukaan tarkasteltavien VaR-mallien  $f$  ja  $g$  ehdolliset ennustekyvyyt eivät poikkea toisistaan. Nollahypoteesi voidaan kirjoittaa mallien  $f$  ja  $g$  ennustekykyä arvioivien asymmetristen tappiofunktioiden  $S_{\alpha}^f$  ja  $S_{\alpha}^g$  avulla seuraavasti

$$H_0 : E(S_\alpha^f(e_{t+1}) - S_\alpha^g(e_{t+1}) | \Omega_t) \equiv E(\Delta S_{\alpha,t+1} | \Omega_t) = 0. \quad (4.19)$$

Nollahypoteesin mukaan tappiofunktioiden erotukset  $\{\Delta S_{\alpha,t+1}\}$  muodostavat näin ollen martingaalidifferenssijonon (martingale difference sequence, MDS) informaatiojoukon  $\Omega_t$  suhteen, mikä tarkoittaa, että ajanhetkellä  $t$  saatavilla olevan informaation avulla ei voida ennustaa, kumpi malleista tuottaa tarkempia VaR-ennusteita ajanhetkellä  $t + 1$  realisoituihin tappioihin verrattuna. MDS-ominaisuuden vuoksi nollahypoteesi voidaan esittää vaihtoehtoisesti muodossa

$$H_{0,\mathbf{h}} : E(\mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1}) = 0, \quad (4.20)$$

missä  $\mathbf{h}_t$  on testifunktioksi kutsuttu  $q \times 1$ -vektori, jonka avulla mallien suhteellista ennustekykyä pyritään ennustamaan.

CPA-testin testisuure voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \text{CPA}_\alpha^{\mathbf{h}} &= m \left( m^{-1} \sum_{t=k}^{T-1} \mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1} \right)' \hat{\Sigma}^{-1} \left( m^{-1} \sum_{t=k}^{T-1} \mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1} \right) \\ \hat{\Sigma} &= m^{-1} \sum_{t=k}^{T-1} (\mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1})(\mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1})', \end{aligned} \quad (4.21)$$

missä  $\hat{\Sigma}$  on vektorin  $\mathbf{h}_t \Delta S_{\alpha,t+1}$  kovarianssimatriisin estimaatti,  $k$  kuvaa ajanhetkeä, jolloin testifunktion ensimmäinen arvo on laskettavissa ja  $m = T - k$ . CPA-testin testisuure noudattaa asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakaumaa vapausasteella  $q$ . Tutkielman CPA-testeissä testifunktion oletetaan olevan muotoa  $\mathbf{h}_t = (1, \Delta S_{\alpha,t})'$  Giacominin ja Whiten (2006) esityksen mukaisesti. Näin ollen testisuure on asympotoottisesti  $\chi^2$ -jakautunut vapausasteella 2, jolloin yhtäläisestä suhteellisesta ennustekyvystä viestivä nollahypoteesi voidaan hylätä, mikäli testisuureen arvo ylittää  $\chi^2$ -jakauman kriittisen arvon valitulla merkitsevyystasolla. Giacominin ja Whiten (2006) mukaisesti CPA-testeissä sovelletaan 10 %:n merkitsevyystasoa. Koska testifunktioon sisältyvän asymmetrisen tappiofunktion arvo ajanhetkellä  $t$  määräytyy ajanhetkellä  $t$  realisoituvan tappion ja ajanhetkellä  $t - 1$  muodostetun VaR-estimaatin perusteella, testifunktion ensimmäinen arvo on laskettavissa ajanhetkellä  $t = 1001$ , jolloin  $m = 3128$  koko tarkastelujaksoa koskevassa arvioinnissa.

CPA-testin nollahypoteesin hylkääminen viestii siitä, että ajanhetkellä  $t$  saatavilla olevan informaation avulla voidaan ennustaa, kumpi tarkastelluista VaR-malleista ennustaa ajanhetken  $t + 1$  tappioita tarkemmin. Toisin sanoen testifunktion aikasarjan  $\{\mathbf{h}_t\}$  avulla voidaan ennustaa tappiofunktioiden erotusten aikasarjaa  $\{\Delta S_{\alpha,t+1}\}$ . Mikäli testin nollahypoteesi hylätään, ennustekyvyltään paremman mallin valinnassa voidaan soveltaa tappiofunktioiden erotusten aikasarjan  $\{\Delta S_{\alpha,t+1}\}$  ja testifunktion aikasarjan  $\{\mathbf{h}_t\}$  välille muodostettua lineaarista regressiomallia, jossa  $\Delta S_{\alpha,t+1}$  on selitettävä muuttuja ja  $\mathbf{h}_t$  on selittävä muuttuja. Koska estimoidun regressiomallin sovitteet  $\hat{\mathbf{A}}' \mathbf{h}_t$  approksimoivat tappiofunkti-

oiden erotuksen ehdollista odotusarvoa  $E(\Delta S_{\alpha,t+1} | \Omega_t)$ , voidaan mallia  $g$  pitää ennustekyvyltään parempana ajanhetkellä  $t$ , mikäli  $\hat{\mathbf{A}}'\mathbf{h}_t > 0$ , missä  $\hat{\mathbf{A}}$  viittaa pienimmän neliösumman menetelmällä estimoitujen regressiokertoimien vektoriin. Mikäli  $\hat{\mathbf{A}}'\mathbf{h}_t < 0$ , voidaan mallia  $f$  puolestaan pitää parempana. (Giacomini & White 2006.)

Giacominin ja Whiten (2006) esityksen mukaisesti estimoidun regressiomallin sovitteiden  $\hat{\mathbf{A}}'\mathbf{h}_t$ ,  $t = k, \dots, T-1$ , sisältämä informaatio voidaan tiivistää indikaattoriin

$$I = 100 m^{-1} \sum_{t=k}^{T-1} \mathbf{1}[\hat{\mathbf{A}}'\mathbf{h}_t > 0]. \quad (4.22)$$

Indikaattori  $I$  saa arvokseen ennustejakson pituuteen suhteutetun prosenttiluvun, joka ilmaisee, kuinka usein malli  $g$  johtaa mallia  $f$  tarkempiin VaR-estimaatteihin. VaR-mallien suhteellisen ennustekyvyn arvioinnissa käytettävä päätössääntö voidaan näin ollen perustaa sekä CPA-testin tulokseen että kaavassa (4.22) esitetyn indikaattorin arvoon. Mallia  $g$  voidaan pitää ennustekyvyltään parempana VaR-mallina, mikäli CPA-testin nollahypoteesi hylätään 10 %:n merkitsevyystasolla ja mikäli indikaattorille pätee  $I > 50$ , mikä tarkoittaa, että malli  $g$  johtaa tarkempiin VaR-estimaatteihin yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä.

CPA-testiin ja indikaattorin  $I$  arvoon perustuvaa päätössääntöä sovelletaan kullekin hyväksytyistä malleista muodostetulle malliparille. Koska CPA-testiä voidaan soveltaa eri ennustemallien suhteellisen ennustekyvyn arvioinnin lisäksi esimerkiksi eripituisiin estimointi-ikkunoihin pohjautuvien estimointimenetelmien vertailuun, CPA-testiin ja indikaattorin  $I$  arvoon perustuvaa arviointikriteeriä sovelletaan myös tarkasteltaessa, onko liukuvassa estimoinnissa sovelletun estimointi-ikkunan pituudella vaikutusta VaR-mallien ennustekyvyyneen.

## 5 TULOKSET

### 5.1 Mallien toteumatestaus ja ennustekyvyn vertailu koko tarkastelujaksolla

Kullekin tarkasteltavalle portfoliolle 95 %:n luottamustasolla estimoitujen VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 on esitetty taulukossa 4. Taulukossa on esitetty VaR-estimaattien ylitysten lukumäärät sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testien tulokset. Ylitysten odotettu lukumäärä 95 %:n luottamustasolla ja 3129 havainnon toteumatestausaineistolla on 156.

Taulukossa 4 esitettyjen tulosten perusteella ehdollistamattomat menetelmät johtavat varsin hyviin tuloksiin ehdollistamattoman kattavuuden testillä arvioituna. Tavanomainen historiallinen simulointi johtaa hyväksyttäviin ylitysmääriin kaikkien portfolioiden osalta, kun taas varianssi-kovarianssimenetelmä suoriutuu hyväksyttävästi muiden kuin AM-EU-portfolion osalta. Myös ehdolliset VaR-mallit suoriutuvat Kupiecin (1995) testin perusteella varsin hyvin. Ehdollisista malleista FHS, Gauss-e, Clayton-n, Clayton-e ja t-e johtavat 5 %:n merkitsevyystasolla hyväksyttäviin ylitysmääriin kaikissa portfolioissa. Clayton-e-malli johtaa pienimpiin ylitysmääriin kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa, kun taas Gumbel-t-malli tuottaa eniten ylityksiä kaikkien portfolioiden osalta.

Ehdollistamattomat VaR-mallit toimivat kuitenkin merkittävästi ehdollisia malleja heikommin Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin perusteella. Christoffersenin (1998) testin nollahypoteesi ylitysten oikeasta lukumäärästä ja ylitysten riippumattomuudesta voidaan hylätä vähintään 5 %:n merkitsevyystasolla sekä historiallisen simuloinnin että varianssi-kovarianssimenetelmän osalta kaikissa portfolioissa. Testitulokset viestivät näin ollen VaR-mitan ylitysten klusteroitumisesta, minkä vuoksi ehdollistamattomia malleja ei voida pitää hyväksyttävinä malleina. AR(1)-EGARCH(1,1)-malleihin pohjautuvat ehdolliset menetelmät suoriutuvat sen sijaan huomattavasti paremmin ehdollisen kattavuuden testistä, sillä ne huomioivat osakeindeksituottojen aikasarjoissa esiintyvän autokorrelaation, heteroskedastisuuden ja volatilitietin klusteroitumisen. Ehdolliset VaR-mallit reagoivat näin ollen huomattavasti ehdollistamattomia malleja nopeammin markkinatilanteiden muutoksiin, minkä vuoksi markkinatilanteiden merkittävät muutokset eivät johda yhtä herkästi useisiin peräkkäisiin VaR-mitan ylityksiin. Tarkasteltavista portfolioista AM-AP on selkeästi haastavin ehdollisen kattavuuden testillä mitattuna, sillä yksikään ehdollisista 95 %:n VaR-malleista ei johda hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin 5 %:n merkitsevyystasolla. Ehdollisista malleista FHS, Gauss-e, Clayton-n ja t-e johtavat hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin portfolioissa AM-EU ja AP-EU.

**Taulukko 4** 95 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Taulukossa on esitetty 95 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiec'in (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfoliolle ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Kupiec'in (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyystasolla, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestausaineisto kattaa yhteensä 3129 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

	AM-AP			AM-EU			AP-EU		
	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC
<b><math>\alpha = 95\%</math> ; odotetut ylitykset 156</b>									
HS	164	<b>0,378</b> <b>(0,539)</b>	78,592 ( $< 0,001$ )	165	<b>0,484</b> <b>(0,487)</b>	41,510 ( $< 0,001$ )	177	<b>2,731</b> <b>(0,098)</b>	45,324 ( $< 0,001$ )
VC	175	<b>2,233</b> <b>(0,135)</b>	31,578 ( $< 0,001$ )	191	7,526 (0,006)	7,570 (0,023)	180	<b>3,566</b> <b>(0,059)</b>	23,205 ( $< 0,001$ )
FHS	160	<b>0,084</b> <b>(0,772)</b>	14,304 (0,001)	173	<b>1,784</b> <b>(0,182)</b>	<b>2,034</b> <b>(0,362)</b>	161	<b>0,138</b> <b>(0,710)</b>	<b>3,839</b> <b>(0,147)</b>
Gauss-n	177	<b>2,731</b> <b>(0,098)</b>	15,358 ( $< 0,001$ )	189	6,704 (0,010)	6,744 (0,034)	180	<b>3,566</b> <b>(0,059)</b>	<b>5,655</b> <b>(0,059)</b>
Gauss-t	172	<b>1,578</b> <b>(0,209)</b>	12,030 (0,002)	197	10,260 (0,001)	10,293 (0,006)	185	5,194 (0,023)	8,499 (0,014)
Gauss-e	170	<b>1,203</b> <b>(0,273)</b>	12,235 (0,002)	169	<b>1,034</b> <b>(0,309)</b>	<b>1,035</b> <b>(0,596)</b>	164	<b>0,378</b> <b>(0,539)</b>	<b>4,818</b> <b>(0,090)</b>
Clayton-n	174	<b>2,003</b> <b>(0,157)</b>	15,604 ( $< 0,001$ )	180	<b>3,566</b> <b>(0,059)</b>	<b>3,619</b> <b>(0,164)</b>	166	<b>0,602</b> <b>(0,438)</b>	<b>4,696</b> <b>(0,096)</b>
Clayton-t	181	3,869 (0,049)	17,107 ( $< 0,001$ )	189	6,704 (0,010)	6,895 (0,032)	181	3,869 (0,049)	6,749 (0,034)
Clayton-e	159	<b>0,044</b> <b>(0,835)</b>	8,721 (0,013)	164	<b>0,378</b> <b>(0,539)</b>	<b>0,708</b> <b>(0,702)</b>	153	<b>0,081</b> <b>(0,776)</b>	6,718 (0,035)
Gumbel-n	185	5,194 (0,023)	17,168 ( $< 0,001$ )	216	21,439 ( $< 0,001$ )	22,169 ( $< 0,001$ )	205	14,509 ( $< 0,001$ )	17,765 ( $< 0,001$ )
Gumbel-t	187	5,926 (0,015)	23,013 ( $< 0,001$ )	219	23,540 ( $< 0,001$ )	23,546 ( $< 0,001$ )	207	15,677 ( $< 0,001$ )	18,713 ( $< 0,001$ )
Gumbel-e	177	<b>2,731</b> <b>(0,098)</b>	13,524 (0,001)	190	7,109 (0,008)	7,329 (0,026)	188	6,309 (0,012)	10,202 (0,006)
t-n	180	<b>3,566</b> <b>(0,059)</b>	15,263 ( $< 0,001$ )	193	8,393 (0,004)	8,396 (0,015)	182	4,183 (0,041)	6,925 (0,031)
t-t	181	3,869 (0,049)	15,264 ( $< 0,001$ )	203	13,383 ( $< 0,001$ )	13,493 (0,001)	184	4,845 (0,028)	6,492 (0,039)
t-e	163	<b>0,285</b> <b>(0,593)</b>	9,671 ( $< 0,001$ )	170	<b>1,203</b> <b>(0,273)</b>	<b>1,282</b> <b>(0,527)</b>	166	<b>0,602</b> <b>(0,438)</b>	<b>4,696</b> <b>(0,096)</b>

Eri kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien välillä voidaan myös havaita merkitäviä eroja toteumatestaustulosten perusteella. Claytonin kopulaan pohjautuvat mallit johtavat reunajakaumasta riippumatta muita kopulamalleja pienempiin ylitysmääriin kaikissa portfolioissa lukuun ottamatta portfolioita AM-AP, jossa t-jakautuneisiin innovaatioihin perustuva Gauss-t-malli tuottaa Clayton-t-mallia vähemmän ylityksiä ja jossa t-t-malli johtaa yhtä suureen ylitysmäärään. Claytonin kopulaan perustuvista malleista Clayton-n ja Clayton-e johtavat hyväksyttäviin ylitysmääriin kaikissa portfolioissa, kun taas Gaussin kopulaan tai t-kopulaan pohjautuvista malleista ainoastaan innovaatioiden empiirisiin jakaumiin perustuvat mallit suoriutuvat hyväksyttävästi kaikissa portfolioissa Kupiec'in (1995) testin perusteella. Gumbelin kopulaan perustuvat mallit johtavat puolestaan reunajakaumasta riippumatta suurimpiin ylitysmääriin kaikissa portfolioissa. Kaikki Gumbelin kopulaan perustuvat mallit hylätään myös Kupiec'in (1995) ja Christoffersenin

(1998) testien perusteella kaikissa portfolioissa lukuun ottamatta portfolioita AM-AP, jossa Gumbel-e malli hyväksytään ehdollistamattoman kattavuuden testin perusteella. Näin ollen Gumbelin kopulaan pohjautuvia VaR-malleja voidaan pitää ennustekyvyltään selkeästi heikoimpina malleina. Gumbelin kopulaan pohjautuvien mallien heikko ennustekyky muihin kopulamalleihin nähden selittyy yksinomaan kopulafunktioiden eroilla. Gumbelin kopulan ylemmän häntäriippuvuuden vuoksi Gumbelin kopulaan perustuvat VaR-mallit yliarvioivat samanaikaisten, itseisarvoltaan suurten positiivisten indeksituotosten todennäköisyyttä. Toisaalta Gumbelin kopula ei pysty huomioimaan merkittävien samanaikaisten tappioiden välistä riippuvuutta, minkä vuoksi Gumbelin kopula aliarvioi osakeindeksiportfolioiden riskiä.

Osakeindeksien tuottoprosessia ajavien innovaatiotermien reunajakaumaspesifikaatioilla on myös taulukon 4 tulosten perusteella merkittävä vaikutus VaR-mallien ennustekyvyn. T-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit suoriutuvat lähes poikkeuksetta heikoiten kopulafunktiosta riippumatta. T-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit eivät johda hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin yhdessäkään portfolioissa, mikäli arviointikriteerinä käytetään sekä ehdollistamattoman että ehdollisen kattavuuden testiä. T-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvien mallien heikkoa ennustekykyä selittänee ennen kaikkea suhteellisen alhainen 95 %:n luottamustaso, sillä t-jakauman kyky huomioida jakaumien häntiin sijoittuvia tapahtumia esimerkiksi normaalijakaumaa paremmin korostuu tyypillisesti vasta, kun sovellettu luottamustaso on riittävän suuri (ks. esim. Alexander 2008b, 107).

Myös normaalijakaumaan pohjautuvat mallit suoriutuvat toteumatestaustulosten perusteella varsin heikosti lukuun ottamatta Clayton-n-mallia, joka johtaa molemmilla arviointikriteereillä arvioituna hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin portfolioissa AM-EU ja AP-EU. Normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvan Claytonin kopulan varsin hyvä ennustekyky selittynee Claytonin kopulan ominaisuuksilla, sillä alemman häntäriippuvuutensa ansiosta Claytonin kopula kykenee mallintamaan merkittävien samanaikaisten tappioiden riskiä, mikä osaltaan kompensoi normaalien reunajakaumien ylenkatsomaa riskiä. Empiiriset reunajakaumat mallintavat sen sijaan yksittäisten osakeindeksituottojen vaihteluun liittyvää riskiä tarkimmin, sillä empiirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit johtavat selkeästi parhaisiin toteumatestaustuloksiin kaikkien muiden kopulafunktioiden paitsi Claytonin kopulan osalta.

Parhaiten suoriutuvien kopulamallien ja FHS-mallin välillä ei sen sijaan ole havaittavissa merkittäviä eroja 95 %:n luottamustasolla toteumatestaustulosten perusteella. Sekä FHS-, Gauss-e-, Clayton-n- että t-e-malli suoriutuvat hyväksyttävästi ehdollistamattoman ja ehdollisen kattavuuden testien perusteella portfolioissa AM-EU ja AP-EU, minkä lisäksi kyseiset mallit johtavat hyväksyttäviin ylitysmääriin portfolioissa AM-AP. Näin ollen malleja FHS, Gauss-n, Clayton-n ja t-e voidaan pitää hyväksyttävinä 95 %:n VaR-malleina tutkielmassa sovellettavien arviointikriteerien perusteella. Hyväksytyjen VaR-

mallien toteumatestaustulokset eivät kuitenkaan sovellu mallien suhteellisen ennustekyvyn arviointiin. Pelkästään VaR-mallien ylitysten lukumäärään perustuva vertailu ei myöskään ole mielekästä, sillä ylitysten lukumäärä ei huomioi lainkaan ylitysten suuruutta.

Hyväksytyjen 95 %:n VaR-mallien suhteellista ennustekykyä arvioidaan Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testeillä, joiden p-arvot on esitetty taulukossa 5. Tulokset, joissa sarakkeen ja rivin mallien ennustekyvyt poikkeavat toisistaan vähintään 10 %:n merkitsevyystasolla, on lihavoitu. Suluissa olevat arvot viittaavat kaavassa (4.22) esitetyn indikaattorin  $I$  arvoihin. Suluissa oleva arvo ilmaisee näin ollen, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempaan VaR-estimaatteihin. Indikaattorin arvoon ja CPA-testin p-arvoon perustuvaa päätöksäntöä on lisäksi havainnollistettu vaaka- ja pystynuolilla. Pystynuoli tarkoittaa, että sarakkeessa olevan mallin suhteellinen ennustekyky on tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa puolestaan rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyn.

Taulukon 5 tulosten perusteella t-kopulaan ja AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien innovaatioiden empiirisiin jakaumiin perustuva t-e-malli tuottaa ennustekyvyltään tarkimpia VaR-estimaatteja portfolioissa AM-AP, sillä indikaattorin  $I$  arvo ylittää 50 % kaikissa mallipareissa, minkä lisäksi erot ovat tilastollisesti merkitseviä FHS- ja Clayton-n-malliin verrattuna. Portfolioissa AM-EU sekä Gauss-e- että t-e-malli tuottavat tilastollisesti merkitsevästi tarkempia VaR-estimaatteja kuin FHS-malli. Muiden malliparien välillä ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja. Portfolioissa AP-EU FHS-malli johtaa sen sijaan Clayton-n- ja t-e-mallia tarkempaan VaR-estimaatteihin vähintään 10 %:n merkitsevyystasolla.

Kokonaisarvioinnin perusteella kopulamallien avulla voidaan tuottaa FHS-mallia tarkempia VaR-estimaatteja, sillä FHS-malli häviää vähintään yhdelle kopulamallille kahdessa eri portfolioissa. Indikaattorien arvojen perusteella muodostetun paremmuusjärjestyksen perusteella Gauss-e-malli suoriutuu kokonaisuudessaan parhaiten ja t-e-malli toiseksi parhaiten. Gauss-e- ja t-e-mallien ennustekyvyt eivät kuitenkaan poikkea tilastollisesti merkitsevästi toisistaan yhdessäkään portfolioissa, minkä vuoksi malleja voidaan käytännössä pitää yhtä hyvinä. Myös toteumatestaustulosten mukaan Gauss-e- ja t-e-mallien erot ovat hyvin pieniä. Näin ollen voidaan todeta, että epäsymmetriseen GARCH-malliin ja innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin sekä elliptiseen kopulafunktioon pohjautuvan VaR-mallin avulla voidaan tuottaa luotettavia VaR-estimaatteja 95 %:n luotamustasolla.

**Taulukko 5** CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 hyväksytyille 95 %:n VaR-malleille

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot hyväksytyille 95 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystynuoli tarkoittaa, että sarakkeen malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyyen. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	Gauss-e	Clayton-n	t-e
		<b>AM-AP</b>	
FHS	0,130 (60,33)	0,316 (0,00)	↑ <b>0,064</b> <b>(79,06)</b>
Gauss-e		0,148 (3,84)	0,837 (98,37)
Clayton-n			↑ <b>0,066</b> <b>(96,48)</b>
		<b>AM-EU</b>	
FHS	↑ <b>0,008</b> <b>(98,47)</b>	0,334 (97,03)	↑ <b>0,023</b> <b>(98,72)</b>
Gauss-e		0,279 (4,22)	0,226 (32,38)
Clayton-n			0,407 (96,71)
		<b>AP-EU</b>	
FHS	0,179 (2,56)	← <b>0,080</b> <b>(3,48)</b>	← <b>0,022</b> <b>(2,75)</b>
Gauss-e		0,184 (38,27)	0,760 (0,00)
Clayton-n			0,674 (2,53)

Taulukossa 6 on esitetty 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Ylitysten odotettu lukumäärä 99 %:n luottamustasolla ja 3129 havainnon toteumatestausaineistolla on 31. Taulukossa esitettyjen tulosten perusteella voidaan havaita, että osakeindeksituottojen ehdollisen volatilitietin ja innovaatiojakaumien paksuhäntäisyyden mallintamisen merkitys korostuu VaR-mallien luottamustason noustessa. Tulosten perusteella ehdollistamattomat VaR-mallit aliarvioivat portfolioiden riskiä selvästi ja johtavat klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin. Historialliseen simulointiin ja varianssi-kovarianssimenetelmään perustuvat mallit hylätään sekä Kupiec (1995) että Christoffersenin (1998) testien perusteella kaikissa muissa portfolioissa paitsi portfolioissa AP-EU, jossa historialliseen simulointiin pohjautuva VaR-malli voidaan hyväksyä ehdollistamattoman kattavuuden testin perusteella.

Ehdollistamattomien VaR-mallien suorituskykyä on myös havainnollistettu liitteen 3 kuviossa 6, jossa on esitetty mallien HS, VC, Gauss-n ja Clayton-e avulla lasketut 99 %:n VaR-estimaatit portfolioissa AM-EU. Kuviosta voidaan havaita, että ehdollistamattomat menetelmät johtavat ennustejaksolla useisiin klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin. Eriyisesti historiallinen simulointi johtaa useisiin peräkkäisiin ja suuriin VaR-mitan ylityksiin finanssikriisin puhkeamishetkellä.



Taulukon 6 tulosten perusteella myös ehdollisten mallien innovaatiotermien normaali-jakaumaoletus johtaa VaR-estimaatteihin, jotka aliarvioivat osakeindeksituottojen yksilotteisten todennäköisyysjakaumien häntiin sijoittuvien ääritapahtumien riskiä. Normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvista malleista ainoastaan Clayton-n voidaan hyväksyä molemmilla arviointikriteereillä mitattuna portfolioissa AP-EU. Innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustuvat mallit johtavat myös selkeästi suurempiin ylitysmääriin kuin empiirisiin tai t-jakautuneisiin reunajakaumiin pohjautuvat mallit sovellettuna kopulafunktiosta riippumatta.

**Taulukko 6** 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Taulukossa on esitetty 99 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfolioille ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyydellä, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestausaineisto kattaa yhteensä 3129 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

	AM-AP			AM-EU			AP-EU		
	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC
<b><math>\alpha = 99\%</math> ; odotetut ylitykset 31</b>									
HS	49	8,637 (0,003)	51,465 ( $< 0,001$ )	54	13,681 ( $< 0,001$ )	35,928 ( $< 0,001$ )	42	<b>3,344</b> <b>(0,067)</b>	12,735 (0,002)
VC	71	37,443 ( $< 0,001$ )	48,097 ( $< 0,001$ )	65	27,990 ( $< 0,001$ )	28,275 ( $< 0,001$ )	68	32,581 ( $< 0,001$ )	38,107 ( $< 0,001$ )
FHS	46	6,102 (0,014)	7,869 (0,020)	45	5,344 (0,021)	<b>5,514</b> <b>(0,063)</b>	40	<b>2,251</b> <b>(0,134)</b>	<b>3,287</b> <b>(0,193)</b>
Gauss-n	62	23,681 ( $< 0,001$ )	25,599 ( $< 0,001$ )	72	39,122 ( $< 0,001$ )	39,192 ( $< 0,001$ )	60	20,972 ( $< 0,001$ )	21,510 ( $< 0,001$ )
Gauss-t	44	4,631 (0,031)	9,607 (0,008)	49	8,637 (0,003)	8,703 (0,013)	47	6,904 (0,009)	7,015 (0,030)
Gauss-e	38	<b>1,360</b> <b>(0,243)</b>	<b>4,277</b> <b>(0,118)</b>	46	6,102 (0,014)	7,475 (0,024)	37	<b>0,994</b> <b>(0,319)</b>	<b>1,880</b> <b>(0,391)</b>
Clayton-n	54	13,681 ( $< 0,001$ )	16,723 ( $< 0,001$ )	55	14,806 ( $< 0,001$ )	14,807 (0,001)	41	<b>2,773</b> <b>(0,096)</b>	<b>3,100</b> <b>(0,212)</b>
Clayton-t	39	<b>1,780</b> <b>(0,182)</b>	<b>4,530</b> <b>(0,104)</b>	38	<b>1,360</b> <b>(0,243)</b>	<b>2,295</b> <b>(0,317)</b>	28	<b>0,362</b> <b>(0,547)</b>	<b>0,868</b> <b>(0,648)</b>
Clayton-e	30	<b>0,054</b> <b>(0,815)</b>	<b>4,588</b> <b>(0,101)</b>	35	<b>0,428</b> <b>(0,513)</b>	<b>1,220</b> <b>(0,543)</b>	27	<b>0,623</b> <b>(0,430)</b>	<b>1,093</b> <b>(0,579)</b>
Gumbel-n	68	32,581 ( $< 0,001$ )	35,697 ( $< 0,001$ )	85	63,407 ( $< 0,001$ )	63,453 ( $< 0,001$ )	77	47,936 ( $< 0,001$ )	49,822 ( $< 0,001$ )
Gumbel-t	52	11,545 (0,001)	12,680 (0,002)	66	29,489 ( $< 0,001$ )	29,617 ( $< 0,001$ )	61	22,310 ( $< 0,001$ )	24,351 ( $< 0,001$ )
Gumbel-e	48	7,749 (0,005)	11,870 (0,003)	55	14,806 ( $< 0,001$ )	14,807 (0,001)	52	11,545 ( $< 0,001$ )	11,566 (0,003)
t-n	63	25,085 ( $< 0,001$ )	26,885 ( $< 0,001$ )	72	39,122 ( $< 0,001$ )	39,192 ( $< 0,001$ )	58	18,400 ( $< 0,001$ )	18,405 ( $< 0,001$ )
t-t	45	5,344 (0,021)	10,095 (0,006)	50	9,566 (0,002)	9,614 (0,008)	44	4,631 (0,031)	<b>5,886</b> <b>(0,053)</b>
t-e	36	<b>0,683</b> <b>(0,409)</b>	<b>3,953</b> <b>(0,139)</b>	45	5,344 (0,021)	6,657 (0,036)	38	<b>1,360</b> <b>(0,243)</b>	<b>2,295</b> <b>(0,317)</b>

Korkeamman luottamustason soveltaminen heikentää taulukon 6 tulosten perusteella myös ehdolliseen historialliseen simulointiin pohjautuvan VaR-mallin ennustekykä ko-

pulamalleihin verrattuna. FHS-malli voidaan hyväksyä sekä ehdollistamattoman että ehdollisen kattavuuden testien perusteella ainoastaan portfolioissa AP-EU, kun taas 12 sovelletusta kopulamallista neljä voidaan hyväksyä molempien arviointikriteerien perusteella vähintään kahdessa portfolioissa, minkä vuoksi kopulafunktioihin pohjautuvaa estimointimenetelmää voidaan pitää selkeästi ehdollista historiallista simulointia tarkempina. Sovellettaessa 99 %:n luottamustasoa kopulamallien suhteellinen paremmuus FHS-malliin nähdessä ilmenee näin ollen jo toteumatestausvaiheessa.

Taulukossa 6 esitettyjen tulosten perusteella Gumbelin kopulan mukaiseen riippuvuusrakenteeseen pohjautuvat VaR-mallit suoriutuvat myös 99 %:n luottamustasolla selkeästi muita kopulamalleja heikommin, sillä Gumbelin kopulaan perustuvat mallit hylkäävät molemmilla arviointikriteereillä mitattuna kaikissa portfolioissa. Gumbelin kopulaan perustuvat mallit johtavat kaikissa portfolioissa myös muita kopulamalleja suurempaan ylitysmääriin reunajakaumaspesifikaatiosta riippumatta, mikä viestii osakeindeksiportfolioiden riskin aliarvioinnista. Elliptisiin kopulafunktioihin pohjautuvista malleista Gauss-e ja t-e voidaan hyväksyä kahdessa portfolioissa sekä ehdollistamattoman että ehdollisen kattavuuden testien perusteella, kun taas Claytonin kopulaan pohjautuvista malleista sekä Clayton-t että Clayton-e voidaan hyväksyä kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa molemmilla arviointikriteereillä mitattuna. Claytonin kopulaan perustuvat VaR-mallit johtavat lisäksi muita kopulamalleja pienempiin ylitysmääriin osakeindeksituottojen reunajakaumaoletuksesta riippumatta.

Taulukon 6 tulosten perusteella voidaan todeta, että Claytonin kopulaan perustuvien VaR-mallien ennustekyky parantuu merkittävästi luottamustason noustessa, minkä lisäksi Claytonin kopulaan pohjautuvia malleja voidaan pitää toteumatestaustulosten valossa muita kopulamalleja luotettavampina. Toteumatestaustulosten perusteella riskifaktorituottojen alemmaa häntäriippuvuutta mallintavilla kopulafunktioilla voidaan näin ollen parantaa korkean luottamustason VaR-estimaattien luotettavuutta.

Toteumatestaustulosten perusteella malleja Gauss-e, Clayton-t, Clayton-e ja t-e voidaan pitää hyväksyttävänä 99 %:n VaR-malleina. Hyväksytyistä malleista muodostettujen malliparien CPA-testien tulokset on esitetty taulukossa 7. Tulosten perusteella hyväksytyjen mallien ehdollisten ennustekykyjen välillä ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja portfolioissa AM-AP. Portfolioissa AM-EU Claytonin kopulaan pohjautuvat mallit Clayton-t ja Clayton-e johtavat sen sijaan tilastollisesti merkitsevästi tarkempaan VaR-estimaatteihin kuin mallit Gauss-e ja t-e. Mallien Clayton-t ja Clayton-e ennustekyvyyt eivät kuitenkaan poikkea tilastollisesti merkitsevästi toisistaan. Portfolioissa AP-EU Clayton-t-malli on tilastollisesti merkitsevästi malleja Gauss-e ja Clayton-e parempi, kun taas Gauss-e ja t-e johtavat Clayton-e-mallia tarkempaan VaR-estimaatteihin. Indikaattorin *I* arvojen perusteella muodostetun paremmuusjärjestyksen mukaan Clayton-t-malli toimii kokonaisuudessaan selvästi muita malleja paremmin. Muiden mallien välillä ei sen sijaan ole havaittavissa merkitseviä eroja.

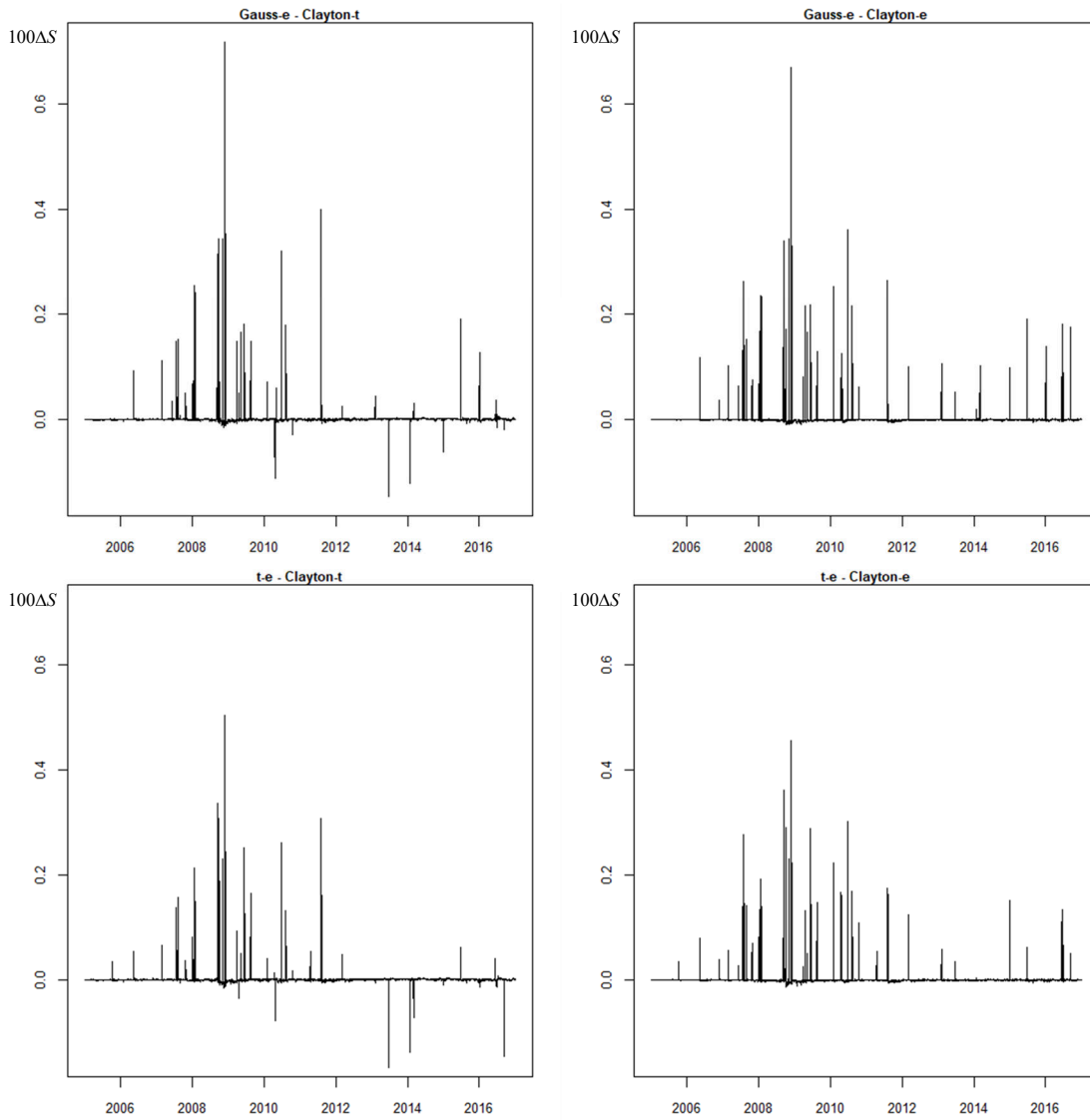
CPA-testien sekä Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien tulosten perusteella t-jakautuneisiin innovaatioihin sekä Claytonin kopulaan perustuvaa Clayton-t-mallia voidaan näin ollen pitää selkeästi parhaimpana VaR-mallina. Koska muita hyväksytyjä malleja ei voida asettaa selkeään paremmuusjärjestykseen CPA-testien perusteella ja koska Clayton-e-malli suoriutuu toteumatestien ja ylitysmäärien perusteella malleja Gauss-e ja t-e paremmin, voidaan Clayton-e-mallia pitää kokonaisarvioinnin perusteella toiseksi parhaana 99 %:n VaR-mallina.

**Taulukko 7** CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystynuoli tarkoittaa, että sarakkeen malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyyneen. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	Clayton-t	Clayton-e	t-e
		<b>AM-AP</b>	
Gauss-e	0,527 (97,89)	0,603 (66,24)	0,726 (99,71)
Clayton-t		0,546 (0,32)	0,568 (4,16)
Clayton-e			0,560 (90,89)
		<b>AM-EU</b>	
Gauss-e	↑ <b>0,041</b> (99,04)	↑ <b>&lt; 0,001</b> (98,59)	0,485 (99,78)
Clayton-t		0,803 (0,06)	← <b>0,087</b> (0,96)
Clayton-e			← <b>0,001</b> (1,41)
		<b>AP-EU</b>	
Gauss-e	↑ <b>0,087</b> (98,98)	← <b>&lt; 0,001</b> (0,13)	0,852 (0,19)
Clayton-t		← <b>0,067</b> (0,19)	0,159 (0,93)
Clayton-e			↑ <b>0,002</b> (86,70)

Hyväksytyjen 99 %:n VaR-mallien ennustekyvyyden eroja portfolioissa AM-EU on myös havainnollistettu kuviossa 5, jossa on esitetty CPA-testien perustana olevien asymmetristen tappiofunktioiden erotukset malleille Gauss-e ja Clayton-t, Gauss-e ja Clayton-e, t-e ja Clayton-t sekä t-e ja Clayton-e. Kussakin kuviossa esitetty erotusten aikasarja on laskettu niin, että elliptiseen kopulafunktioon pohjautuvan mallin tappiofunktion arvoista on vähennetty Claytonin kopulaan perustuvan mallin tappiofunktion arvot. Näin ollen erotusten aikasarjan positiiviset arvot viestivät Claytonin kopulaan perustuvan mallin paremmasta ennustekyvystä, kun taas negatiiviset arvot viittaavat kuvion otsikon mukaisen, elliptiseen kopulafunktioon pohjautuvan mallin tarkempaan ennustekyvyyneen.



**Kuvio 5** Elliptisiin kopulafunktioihin sekä Claytonin kopulaan perustuvien hyväksytyjen 99 %:n VaR-mallien tappiofunktioiden erotukset portfolioissa AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Kuvioissa on esitetty elliptisiin kopulafunktioihin ja Claytonin kopulaan perustuvien hyväksytyjen 99 %:n VaR-mallien asymmetristen tappiofunktioiden erotukset portfolioissa AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Kussakin kuviossa esitetty erotusaikasarja on laskettu niin, että elliptiseen kopulafunktioon pohjautuvan mallin tappiofunktion arvoista on vähennetty Claytonin kopulaan perustuvan mallin tappiofunktion arvot kuvion otsikon mukaisesti. Erotusaikasarjojen arvot on lisäksi kerrottu sadalla.

Kuviosta 5 voidaan havaita, että Claytonin kopulaan perustuvat mallit Clayton-t ja Clayton-e kykenevät ennustamaan portfolion AM-EU tappiojakauman 99 %:n kvantiilia huomattavasti elliptisiin kopulafunktioihin pohjautuvia malleja paremmin etenkin vuosina 2008–2011, joiden aikana Claytonin kopulaan perustuvat mallit johtavat lähes poikkeuksetta selkeästi pienempiin tappiofunktion arvoihin. Mallien väliset erot ovat erityisen

selkeitä ja systemaattisia etenkin finanssikriisin aikana, jolloin Gaussin kopulaan ja t-kopulaan perustuvat mallit aliarvioivat portfolion AM-EU riskiä ja johtavat Claytonin kopulaan perustuvia malleja suurempiin VaR-mitan ylityksiin VaR-estimaattien ja toteutuneiden tappioiden aikasarjojen perusteella. Systemaattiset erot viestivät Claytonin kopulaan perustuvien mallien paremmasta ehdollisesta ennustekyvystä ja selittävät näin ollen taulukossa 7 esitettyjä CPA-testien tuloksia.

Koko ennustejaksoa 4.1.2005–30.12.2016 koskevien tutkimustulosten perusteella voidaan todeta, että kopulafunktioihin ja ehdollisen volatiliteetin malleihin perustuvalla estimointimenetelmällä voidaan tuottaa varsin tarkkoja VaR-estimaatteja luottamustasosta riippumatta. Ehdollisen volatiliteetin mallien soveltamista voidaan pitää välttämättömänä VaR-mallien ennustekyvyn kannalta, sillä ehdollistamattomat menetelmät johtavat poikkeuksetta klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin, minkä lisäksi ehdollistamattomat menetelmät johtavat liian pieniin VaR-estimaatteihin etenkin korkeilla luottamustasoilla. Paksuhäntäisten reunajakaumien mallintamista voidaan myös pitää VaR-mallien ennustekyvyn kannalta keskeisenä etenkin 99 %:n luottamustasolla, sillä normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat ehdolliset mallit aliarvioivat osakeindeksiportfolioiden riskiä merkittävästi. Tutkimustulokset ovat näin ollen linjassa Junkerin ja Mayn (2005), Skoglundin ym. (2010) sekä Alouin ym. (2011) tutkimusten kanssa.

Kopulamallit johtavat sekä 95 %:n että 99 %:n luottamustasoilla ehdollista historiallista simulointia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Kopulamallien keskinäinen paremmuus riippuu sen sijaan sovelletusta luottamustasosta. Elliptisiin kopulafunktioihin ja empiirisiin innovaatiojakaumiin perustuva estimointimenetelmä johtaa tarkkoihin VaR-estimaatteihin 95 %:n luottamustasolla, kun taas 99 %:n luottamustasolla riskifaktorituottojen epäsymmetristä häntäriippuvuutta mallintava Claytonin kopulafunktio soveltuu riskifaktorituottojen riippuvuusrakenteen kuvaukseen elliptisiä kopulafunktioita paremmin. Tutkimustulokset osoittavat näin ollen, että riskifaktorituottojen samanaikaisten negatiivisten äärihavaintojen välisen riippuvuusrakenteen mallinnuksella on keskeinen vaikutus korkean luottamustason VaR-mallien ennustekyvyyteen.

Vastaavia tuloksia on esitetty myös Fantazzinin (2009b) tutkimuksessa, jonka mukaan Claytonin kopulaan ja paksuhäntäiseen innovaatiojakaumaan pohjautuva estimointimenetelmä soveltuu parhaiten etenkin pitkien positioiden VaR-estimointiin. Tulokset ovat osittain linjassa myös Anén ja Kharoubin (2003) sekä Razakin ja Ismailin (2016) tutkimusten kanssa, sillä molempien tutkimusten mukaan Claytonin kopula soveltuu parhaiten osakeindeksiportfolioissa esiintyvien riippuvuusrakenteiden mallinnukseen. Molemmassa tutkimuksessa kopulamallien arviointi perustuu kuitenkin kopulafunktioiden ja empiirisen aineiston yhteensopivuutta arvioiviin tilastollisiin testeihin, minkä vuoksi tuloksia ei voida pitää täysin vertailukelpoisina. Aikaisempien tutkimusten tarkastelujaksot poikkeavat myös tutkielmassa sovelletusta toteumatestausjaksosta.

## 5.2 Mallien toteumatestaus ja ennustekyvyn vertailu osaperiodeittain

Tarkasteltaville kaksiulotteisille portfolioille 99 %:n luottamustasolla estimoitujen VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007 on esitetty taulukossa 8. Taulukon 8 tulosten perusteella 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset poikkeavat huomattavasti koko tarkastelujakson tuloksista finanssikriisiä edeltävällä osaperiodilla, jonka aikana osaketuottojen volatiliteetti on selvästi koko ennustejakson keskimääräistä volatiliteettia alhaisempi kaikilla tarkasteltavilla osakemarkkinoilla. Taulukon 8 tulosten valossa ainoastaan mallit VC, Gauss-n, Gumbel-n ja Gumbel-t voidaan hylätä VaR-mallien toteumatestauksessa sovellettavien arviointikriteerien perusteella. Huomionarvoista on myös se, että ehdollistamaton historiallinen simulointi johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin sekä ehdollistamattoman että ehdollisen kattavuuden testien perusteella kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa. Ehdollisen volatiliteetin mallien soveltaminen ei vaikuttaisi näin ollen parantavan 99 %:n VaR-mallien ennustekykä merkittävästi toteumatestaustulosten perusteella. Varianssi-kovarianssimenetelmä sen sijaan toimii hyväksyttävästi ainoastaan portfolioissa AM-EU. Muissa portfolioissa VC-malli aliarvioi osakeindeksiportfolion riskiä ja johtaa klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin.

Toteumatestaustulosten valossa riskifaktorituottojen riippuvuusrakenteen mallinnuksessa sovellettavalla kopulafunktiolla on myös selkeästi pienempi vaikutus VaR-mallien ennustekyvyn kuin koko ennustejaksoa koskevassa tarkastelussa. Taulukon 8 tulosten perusteella kaikki kopulamallit, Gumbelin kopulaan perustuvia malleja lukuun ottamatta, johtavat hyvin samankaltaisiin tuloksiin reunajakaumaspesifikaatiosta riippumatta. Gumbelin kopulaan pohjautuvista malleista ainoastaan innovaatiotermien empiirisiin reunajakaumiin perustuva Gumbel-e-malli johtaa molempien arviointikriteerien perusteella hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin vähintään kahdessa portfolioissa. Muut mallit hylätään molempien arviointikriteerien perusteella portfolioissa AM-EU ja AP-EU. Claytonin kopulaan ja t-kopulaan perustuvat mallit johtavat puolestaan hyväksytyihin VaR-estimaatteihin vähintään kahdessa portfolioissa reunajakaumaspesifikaatiosta riippumatta. Gaussin kopulaan pohjautuvista malleista ainoastaan mallia Gauss-n ei voida pitää hyväksyttävänä, sillä malli hylätään vähintään yhden testin perusteella portfolioissa AM-EU ja AP-EU.

Toteumatestaustuloksista voidaan myös havaita, että ensimmäisellä osaperiodilla ehdollisten mallien reunajakaumaspesifikaatioilla on huomattavasti vähäisempi vaikutus VaR-mallien toteumatestaustuloksiin kuin koko tarkastelujaksolla. Huomionarvoista on etenkin se, että myös normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvilla menetelmillä voidaan tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja. Tulokset poikkeavat näin ollen koko ennustejaksoa koskevista tuloksista. Innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustu-

vista malleista sekä Clayton-n että t-n johtavat molemmilla kriteereillä arvioituna hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin vähintään kahdessa tarkasteltavassa portfolioissa. Innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin ja t-jakaumaan perustuvien mallien välillä ei myöskään ole havaittavissa merkittäviä eroja lukuun ottamatta Gumbelin kopulaan perustuvia malleja.

**Taulukko 8** 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007

Taulukossa on esitetty 99 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfolioille ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007. Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyystasolla, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestausaineisto kattaa yhteensä 780 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

	AM-AP			AM-EU			AP-EU		
	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC
<b><math>\alpha = 99\%</math> ; odotetut ylitykset 7</b>									
HS	11	<b>1,176</b> <b>(0,278)</b>	<b>3,347</b> <b>(0,188)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>4,505</b> <b>(0,105)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>3,358</b> <b>(0,187)</b>
VC	15	5,285 (0,022)	14,983 (0,001)	11	<b>1,176</b> <b>(0,278)</b>	<b>3,347</b> <b>(0,188)</b>	20	13,458 ( $< 0,001$ )	13,843 (0,001)
FHS	8	<b>0,005</b> <b>(0,943)</b>	<b>3,390</b> <b>(0,184)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>3,824</b> <b>(0,148)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>2,337</b> <b>(0,311)</b>
Gauss-n	8	<b>0,005</b> <b>(0,943)</b>	<b>3,390</b> <b>(0,184)</b>	15	5,285 (0,022)	6,417 (0,040)	14	4,028 (0,045)	<b>5,375</b> <b>(0,068)</b>
Gauss-t	6	<b>0,456</b> <b>(0,500)</b>	<b>5,022</b> <b>(0,081)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>3,824</b> <b>(0,148)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>3,358</b> <b>(0,187)</b>
Gauss-e	6	<b>0,456</b> <b>(0,500)</b>	<b>5,022</b> <b>(0,081)</b>	11	<b>1,176</b> <b>(0,278)</b>	<b>1,491</b> <b>(0,474)</b>	11	<b>1,176</b> <b>(0,278)</b>	<b>1,491</b> <b>(0,474)</b>
Clayton-n	7	<b>0,086</b> <b>(0,770)</b>	<b>4,011</b> <b>(0,135)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>3,824</b> <b>(0,148)</b>	9	<b>0,178</b> <b>(0,673)</b>	<b>0,388</b> <b>(0,824)</b>
Clayton-t	6	<b>0,456</b> <b>(0,500)</b>	<b>5,022</b> <b>(0,081)</b>	11	<b>1,176</b> <b>(0,278)</b>	<b>1,491</b> <b>(0,474)</b>	6	<b>0,456</b> <b>(0,500)</b>	<b>0,549</b> <b>(0,760)</b>
Clayton-e	5	<b>1,163</b> <b>(0,281)</b>	6,511 (0,039)	10	<b>0,576</b> <b>(0,448)</b>	<b>0,836</b> <b>(0,658)</b>	7	<b>0,086</b> <b>(0,770)</b>	<b>0,213</b> <b>(0,899)</b>
Gumbel-n	10	<b>0,576</b> <b>(0,448)</b>	<b>3,098</b> <b>(0,213)</b>	18	9,840 (0,002)	10,466 (0,005)	20	13,458 ( $< 0,001$ )	16,160 ( $< 0,001$ )
Gumbel-t	8	<b>0,005</b> <b>(0,943)</b>	<b>3,390</b> <b>(0,184)</b>	15	5,285 (0,022)	6,417 (0,040)	15	5,285 (0,022)	6,417 (0,040)
Gumbel-e	8	<b>0,005</b> <b>(0,943)</b>	<b>3,390</b> <b>(0,184)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>4,505</b> <b>(0,105)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>3,358</b> <b>(0,187)</b>
t-n	9	<b>0,178</b> <b>(0,673)</b>	<b>3,101</b> <b>(0,212)</b>	14	4,028 (0,045)	<b>5,375</b> <b>(0,068)</b>	13	<b>2,917</b> <b>(0,088)</b>	<b>3,358</b> <b>(0,187)</b>
t-t	7	<b>0,086</b> <b>(0,770)</b>	<b>4,011</b> <b>(0,135)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>3,824</b> <b>(0,148)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>2,337</b> <b>(0,311)</b>
t-e	6	<b>0,456</b> <b>(0,500)</b>	<b>5,022</b> <b>(0,081)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>2,337</b> <b>(0,311)</b>	12	<b>1,962</b> <b>(0,161)</b>	<b>2,337</b> <b>(0,311)</b>

Hyväksytyjen mallien suhteellista ennustekykä arvioivien CPA-testien tulokset on esitetty liitteen 4 taulukossa 15. Taulukon 15 tuloksista voidaan havaita, että tavanomainen historiallinen simulointi johtaa selkeästi heikompiin VaR-estimaatteihin kuin ehdolliset mallit, vaikka historiallinen simulointi suoriutuu toteumatestaustulosten perusteella hyväksyttävästi kaikissa portfolioissa. Taulukon 15 tulosten perusteella ehdollistamattoman historialliseen simulointiin perustuvan VaR-mallin ennustekyky on tilastollisesti

merkitsevästi kaikkia muita hyväksytyjä VaR-malleja heikompi kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa. Vaikka historiallinen simulointi johtaa ensimmäisellä osaperiodilla hyväksytyihin ylitysmääriin sekä riippumattomiin ylityksiin, menetelmä reagoi ehdollistamattoman luonteensa vuoksi varsin hitaasti osakeindeksituottojen heilahteluun, minkä vuoksi ylitykset ovat huomattavasti suurempia kuin ehdollisten mallien ylitykset. Tämä voidaan havaita myös liitteen 3 kuviosta 6. Suuret ylitykset kasvattavat puolestaan mallien arvioinnissa sovellettavan epäsymmetrisen tappiofunktion arvoja, mikä puolestaan heikentää historiallisen simuloinnin ennustekykyä suhteessa muihin malleihin.

Taulukosta 15 voidaan myös havaita, että ehdollisen historiallisen simuloinnin ennustekyky on tilastollisesti merkitsevästi vähintään yhtä kopulamallia heikompi kaikissa portfolioissa. FHS-mallin ja kopulamallien ero on selkein portfolioissa AP-EU, jossa FHS-malli on tilastollisesti merkitsevästi viittä kopulamallia heikompi. FHS-mallin ennustekyky on ehdollisista malleista heikoin myös indikaattorin  $I$  arvojen avulla muodostetun paremmuusjärjestyksen perusteella. Kopulamallien voidaan näin ollen todeta suoriutuvan VaR-estimoinnista sekä ehdollistamatonta että ehdollista historiallista simulointia paremmin ensimmäisellä osaperiodilla.

Taulukon 15 tulosten perusteella Clayton-n-mallin ennustekyky on kopulamalleista heikoin portfolioissa AM-AP. Malli häviää tilastollisesti merkitsevästi malleille Gauss-t, Gauss-e, Gumbel-e ja t-e. Muiden mallien väliset erot eivät sen sijaan ole tilastollisesti merkitseviä. Indikaattorin  $I$  arvojen avulla muodostetun paremmuusjärjestyksen perusteella mallit Gauss-t, t-t ja t-e suoriutuvat VaR-estimoinnista parhaiten. Portfolioissa AM-EU Clayton-e-mallia voidaan pitää parhaimpana VaR-mallina indikaattorin  $I$  arvojen perusteella. Clayton-e-malli johtaa tilastollisesti merkitsevästi tarkempiin VaR-estimaatteihin kuin mallit Gauss-e, Clayton-n, t-t ja t-e. Indikaattorin arvojen perusteella mallit Clayton-t ja t-e suoriutuvat toiseksi ja kolmanneksi parhaiten. Clayton-t- ja t-e-mallien ennustekyvyyt eivät kuitenkaan poikkea tilastollisesti merkitsevästi toisistaan. Clayton-e-malli on selkeästi paras VaR-malli myös portfolioissa AP-EU, sillä mallin ennustekyky on tilastollisesti merkitsevästi kahta muuta Claytonin kopulaan perustuvaa mallia lukuun ottamatta kaikkia muita malleja parempi. Clayton-n- ja t-e-malli suoriutuvat toiseksi ja kolmanneksi parhaiten. Clayton-n- ja t-e-mallin välinen ero ei ole kuitenkaan tilastollisesti merkitsevä.

Kaiken kaikkiaan tarkasteltavat mallit suoriutuvat VaR-estimoinnista ensimmäisellä osaperiodilla huomattavasti paremmin kuin koko tarkastelujaksolla. 15 mallista peräti 11 mallia suoriutuu toteumatestaustulosten perusteella hyväksyttävästi 99 %:n VaR-mitan estimoinnista. Toteumatestaustuloksista huolimatta mallien ennustekykyjen välillä voidaan kuitenkin havaita tilastollisesti merkitseviä eroja CPA-testien perusteella. CPA-testien ja indikaattorin  $I$  arvojen avulla muodostetun paremmuusjärjestyksen perusteella Clayton-e- ja t-e-mallit suoriutuvat kokonaisuudessaan 99 %:n VaR-mitan estimoinnista



parhaiten. Koska Clayton-e-malli on tilastollisesti merkitsevästi mallia t-e parempi portfolioissa AM-EU ja AP-EU, voidaan mallia Clayton-e pitää parhaimpana VaR-mallina ensimmäisellä osaperiodilla.

Toisen osaperiodin 1.1.2008–30.12.2011 toteumatestaustulokset on esitetty taulukossa 9. Taulukon 9 tulosten perusteella ehdollistamattomat mallit eivät toimi hyväksyttävästi finanssikriisin ja sitä seuranneen taantumän sisältävällä toisella osaperiodilla, jonka aikana osakemarkkinoiden volatilitteetti on selkeästi koko tarkastelujakson keskimääräistä volatilitteettia korkeampi. Sekä historiallinen simulointi että varianssi-kovarianssimenetelmä hylätään molempien toteumatestien perusteella kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa. Ehdollistamattomien menetelmien heikko ennustekyky ilmenee myös liitteen 3 kuviossa 6, jossa on havainnollistettu neljän eri 99 %:n VaR-mallin suorituskykyä portfolion AM-EU osalta. Kuvion perusteella erityisesti historiallinen simulointi johtaa vuoden 2008 jälkimmäisellä puoliskolla useisiin peräkkäisiin ja merkittäviin VaR-mitan ylityksiin. Kuvio ilmentää historiallisen simuloinnin hidasta sopeutumista markkinoiden volatilitteetin äkillisiin muutoksiin. Historiallisen simuloinnin ehdollinen versio ei myöskään johda hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin taulukossa 9 esitettyjen tulosten perusteella. FHS-malli voidaan hyväksyä molempien arviointikriteerien perusteella ainoastaan portfolioissa AP-EU.

Taulukon 9 tulosten perusteella voidaan myös todeta, että paksuhäntäisten reunajakaumaspesifikaatioiden soveltaminen on ehdoton edellytys 99 %:n VaR-mallien hyväksyttävyydelle toisella osaperiodilla. Normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvien ehdollisten mallien ylitysmäärät ovat selkeästi suurempia kuin t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin jakaumiin perustuvien mallien ylitysmäärät kopulafunktiosta ja tarkasteltavasta portfolioista riippumatta. Innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustuvat mallit hylätään molempien toteumatestien tulosten perusteella kaikissa portfolioissa lukuun ottamatta portfolioita AP-EU, jossa Clayton-n-malli voidaan hyväksyä molempien testien perusteella.

Taulukossa 9 esitettyjen tulosten perusteella on kuitenkin selvää, ettei normaalijakaumasta poikkeavien reunajakaumaspesifikaatioiden soveltaminen yksistään riitä takaamaan VaR-mallien riittävää ennustekykyä. Tulosten mukaan hyväksyttävien VaR-estimaattien edellytyksenä on, että innovaatioiden riippuvuusrakennetta mallinnetaan kopulafunktiolla, joka sisältää alemmaa häntäriippuvuutta. Asymptoottisesti riippumattomaan Gaussin kopulaan tai vain ylempää häntäriippuvuutta sisältävään Gumbelin kopulaan perustuvista malleista yksikään ei johda riittävän tarkkoihin VaR-estimaatteihin tutkielmassa sovellettavien arviointikriteerien perusteella. Ainoastaan alemmaa häntäriippuvuutta mallintavan Claytonin kopulan sekä ylempää ja alemmaa häntäriippuvuutta mallintavan t-kopulan avulla voidaan tuottaa hyväksyttäviä 99 %:n VaR-estimaatteja molempien arviointikriteerien perusteella vähintään kahdessa portfolioissa. Claytonin kopulaan

perustuvista malleista sekä Clayton-t että Clayton-e johtavat hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa, kun taas t-kopulaan pohjautuvista malleista t-e-malli suoriutuu hyväksyttävästi portfolioissa AM-AP ja AP-EU. Portfolio AM-EU on VaR-mallien toteumatestaustulosten valossa selkeästi haasteellisin, sillä ainoastaan Clayton-t- ja Clayton-e-malli johtavat hyväksyttäviin tuloksiin kyseisessä portfolioissa.

**Taulukko 9** 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011

Taulukossa on esitetty 99 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfolioille ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011. Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyytasolla, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestausaineisto kattaa yhteensä 1044 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

		AM-AP			AM-EU			AP-EU	
		ylitykset	UC		CC	ylitykset		UC	CC
<b><math>\alpha = 99\%</math> ; odotetut ylitykset 10</b>									
HS	26	16,563 ( $< 0,001$ )	46,872 ( $< 0,001$ )	30	24,586 ( $< 0,001$ )	35,133 ( $< 0,001$ )	19	5,705 (0,017)	9,719 (0,008)
VC	24	13,014 ( $< 0,001$ )	14,145 ( $< 0,001$ )	24	13,014 ( $< 0,001$ )	14,145 (0,001)	22	9,807 (0,002)	10,298 (0,006)
FHS	25	14,748 ( $< 0,001$ )	15,976 ( $< 0,001$ )	22	9,807 (0,002)	10,755 (0,005)	14	<b>1,108</b> <b>(0,293)</b>	<b>1,489</b> <b>(0,475)</b>
Gauss-n	32	29,019 ( $< 0,001$ )	31,045 ( $< 0,001$ )	38	43,809 ( $< 0,001$ )	46,683 ( $< 0,001$ )	23	11,366 (0,001)	12,404 (0,002)
Gauss-t	20	6,972 (0,008)	7,754 (0,021)	24	13,014 ( $< 0,001$ )	14,145 (0,001)	16	<b>2,572</b> <b>(0,109)</b>	<b>3,071</b> <b>(0,215)</b>
Gauss-e	18	4,546 (0,033)	<b>5,178</b> <b>(0,075)</b>	24	13,014 ( $< 0,001$ )	14,145 (0,001)	12	<b>0,225</b> <b>(0,636)</b>	<b>0,504</b> <b>(0,777)</b>
Clayton-n	28	20,427 ( $< 0,001$ )	21,972 ( $< 0,001$ )	27	18,457 ( $< 0,001$ )	19,892 ( $< 0,001$ )	14	<b>1,108</b> <b>(0,293)</b>	<b>1,489</b> <b>(0,475)</b>
Clayton-t	17	<b>3,499</b> <b>(0,061)</b>	<b>4,062</b> <b>(0,131)</b>	17	<b>3,499</b> <b>(0,061)</b>	<b>4,062</b> <b>(0,131)</b>	10	<b>0,019</b> <b>(0,890)</b>	<b>0,213</b> <b>(0,899)</b>
Clayton-e	14	<b>1,108</b> <b>(0,293)</b>	<b>1,489</b> <b>(0,475)</b>	17	<b>3,499</b> <b>(0,061)</b>	<b>4,062</b> <b>(0,131)</b>	11	<b>0,030</b> <b>(0,863)</b>	<b>0,264</b> <b>(0,876)</b>
Gumbel-n	34	33,710 ( $< 0,001$ )	36,002 ( $< 0,001$ )	45	63,540 ( $< 0,001$ )	67,600 ( $< 0,001$ )	30	24,586 ( $< 0,001$ )	24,608 ( $< 0,001$ )
Gumbel-t	23	11,366 (0,001)	12,404 (0,002)	36	38,644 ( $< 0,001$ )	41,219 ( $< 0,001$ )	23	11,366 (0,001)	11,760 (0,003)
Gumbel-e	22	9,807 (0,002)	10,755 (0,005)	29	22,471 ( $< 0,001$ )	24,130 ( $< 0,001$ )	20	6,972 (0,008)	7,754 (0,021)
t-n	33	31,333 ( $< 0,001$ )	33,490 ( $< 0,001$ )	39	46,474 ( $< 0,001$ )	49,505 ( $< 0,001$ )	22	9,807 (0,002)	10,755 (0,005)
t-t	21	8,341 (0,004)	9,204 (0,010)	26	16,563 ( $< 0,001$ )	17,892 ( $< 0,001$ )	16	<b>2,572</b> <b>(0,109)</b>	<b>3,071</b> <b>(0,215)</b>
t-e	17	<b>3,499</b> <b>(0,061)</b>	<b>4,062</b> <b>(0,131)</b>	24	13,014 ( $< 0,001$ )	14,145 (0,001)	13	<b>0,588</b> <b>(0,443)</b>	<b>0,916</b> <b>(0,632)</b>

Toisella osaperiodilla hyväksyttävästi suoriutuvien mallien CPA-testien tulokset on esitetty taulukossa 10. CPA-testien tulosten perusteella hyväksytyjen mallien ennustekykien välillä ei ole tilastollisesti merkitseviä eroja portfolioissa AM-AP. Sen sijaan portfolioissa AM-EU Claytonin kopulaan pohjautuvat mallit ovat ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi t-e-mallia parempia CPA-testien p-arvojen ja indikaattorin  $I$  arvojen

perusteella, mikä tukee myös mallien toteumatestaustuloksia. Indikaattorin  $I$  arvojen perusteella Clayton-t-malli suoriutuu Clayton-e-mallia paremmin, mutta mallien välinen ero ei ole kuitenkaan tilastollisesti merkitsevä. Clayton-t-malli on indikaattorin arvojen perusteella paras malli myös portfolioissa AP-EU. Clayton-t-mallin ja muiden hyväksytyjen mallien väliset erot eivät kuitenkaan ole tilastollisesti merkitseviä. Clayton-e-malli johtaa sen sijaan tilastollisesti merkitsevästi t-e-mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin portfolioissa AP-EU.

Kokonaisarvioinnin perusteella t-e-mallia voidaan pitää Claytonin kopulaan perustuvia malleja heikompana, sillä t-e-malli häviää CPA-testien perusteella tilastollisesti merkitsevästi vähintään toiselle Claytonin kopulaan pohjautuvalle VaR-mallille portfolioissa AM-EU ja AP-EU, minkä lisäksi t-e-malli ei suoriudu hyväksyttävästi portfolioon AM-EU VaR-estimoinnista toteumatestaustulosten perusteella. Clayton-t- ja Clayton-e-mallien väliset erot eivät sen sijaan ole tilastollisesti merkitseviä, minkä lisäksi malleja ei voida asettaa selkeään paremmuusjärjestykseen indikaattorin  $I$  arvojen perusteella. Koska mallien toteumatestaustulokset eivät myöskään poikkea olennaisesti toisistaan, voidaan malleja käytännössä pitää yhtä hyvinä.

**Taulukko 10** CPA-testien tulokset ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 1.1.2008–30.12.2011. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystynuoli tarkoittaa, että sarakkeen malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyn. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	Clayton-e	t-e
<b>AM-AP</b>		
Clayton-t	0,221 (98,95)	0,829 (99,04)
Clayton-e		0,624 (0,77)
<b>AM-EU</b>		
Clayton-t	0,304 (0,48)	← <b>0,051</b> <b>(1,44)</b>
Clayton-e		← <b>0,004</b> <b>(1,92)</b>
<b>AP-EU</b>		
Clayton-t	0,630 (0,10)	0,393 (0,96)
Clayton-e		← <b>0,090</b> <b>(1,15)</b>

Claytonin kopulaan perustuvien VaR-mallien paremmuus suhteessa muihin malleihin korostuu erityisesti portfolioissa AM-EU, joka on selkeästi haastavin portfolio toteumatestaustulosten valossa. Osakeindeksituottojen riippuvuus on estimoitujen kopulaparametrien perusteella voimakkaampaa kyseisessä portfolioissa kuin muissa portfolioissa. Portfolioissa AM-EU esiintyy myös eniten voimakkaita samanaikaisia tappioita kuvion 4

perusteella, mikä korostaa alemman häntäriippuvuuden mallinnuksen merkitystä VaR-mallien ennustekyvyn kannalta. Tulosten perusteella Claytonin kopula on ainoa kopula-funktio, joka pystyy mallintamaan finanssikriisin aikana realisoituneiden samanaikaisten äärimmäisten tappioiden riippuvuutta riittävän tarkasti portfolioissa AM-EU. Claytonin kopulaan perustuvien hyväksytyjen mallien parempi ennustekyky portfolioissa AM-EU ilmenee myös kuviosta 5, jonka perusteella mallit Clayton-t ja Clayton-e johtavat lähes poikkeuksetta t-e-mallia pienempiin tappiofunktion arvoihin toisella osaperiodilla, mikä puolestaan selittää mallien ehdollisen ennustekyvyn tilastollisesti merkitseviä eroja CPA-testeissä.

Kolmannen osaperiodin 2.1.2012–30.12.2016 toteumatestaustulokset on esitetty taulukossa 11. Taulukon 11 tuloksista voidaan havaita, että VaR-mallien ennustekyky on kolmannella osaperiodilla ensimmäisen osaperiodin tavoin huomattavasti parempi kuin koko ennustejaksolla tai toisella osaperiodilla. 15 mallista peräti 9 mallia suoriutuu hyväksyttävästi sekä Kupiec'in (1995) että Christoffersenin (1998) testien tulosten perusteella vähintään kahdessa portfolioissa. Mallit toimivat erityisen hyvin portfolioissa AM-EU, jossa ainoastaan malleja HS, VC ja Gumbel-n ei voida hyväksyä molempien arviointikriteerien perusteella.

Taulukon 11 tulosten valossa osakeindeksituottojen ehdollisen volatiliteetin mallinnuksella on keskeinen vaikutus VaR-mallien ennustekyvyn myös kolmannella osaperiodilla. Ehdollistamattomat menetelmät suoriutuvat kokonaisuudessaan varsin heikosti 99 %:n VaR-mittojen estimoinnista kolmannella osaperiodilla. Varianssi-kovarianssimenetelmä johtaa muita malleja suurempiin ylitysmääriin, minkä lisäksi menetelmä hylätään molempien tilastollisten testien perusteella kaikissa portfolioissa. Varianssi-kovarianssimenetelmä aliarvioi näin ollen osakeindeksiportfolioiden riskiä ja johtaa klusteroituneisiin ylityksiin, mikä voidaan myös havaita liitteen 3 kuviosta 6, jonka perusteella VC-malli johtaa useisiin klusteroituneisiin ylityksiin portfolioissa AM-EU vuosien 2012–2016 aikana.

Historiallinen simulointi johtaa sen sijaan hyväksyttäviin ylitysmääriin kaikissa portfolioissa, mutta ylitykset esiintyvät ryppäinä etenkin vuosien 2015–2016 aikana, minkä vuoksi historiallinen simulointi hylätään ehdollisen kattavuuden testin perusteella kaikissa portfolioissa. HS-mallin suorituskykyä on myös havainnollistettu liitteen 3 kuviossa 6. Klusteroituneiden ylitysten lisäksi kuviosta 6 voidaan myös havaita, että historiallinen simulointi sopeutuu toisen osaperiodin jälkeiseen alhaisemman volatiliteetin jaksoon selkeästi hitaammin kuin ehdolliset mallit, mikä puolestaan johtaa riskin yliarviointiin kolmannen osaperiodin ensimmäisinä vuosina. Historiallisen simuloinnin ehdollinen versio toimii sen sijaan toteumatestien perusteella erittäin hyvin kaikissa portfolioissa, sillä FHS-malli voidaan hyväksyä molempien testien perusteella kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa. FHS-mallin ja parhaiten suoriutuvien kopulamallien välillä ei näin ollen ole havaittavissa eroja toteumatestaustulosten perusteella.

**Taulukko 11** 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016

Taulukossa on esitetty 99 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiecin (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfoliolle ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016. Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyydellä, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestausaineisto kattaa yhteensä 1305 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

	AM-AP			AM-EU			AP-EU		
	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC
<b><math>\alpha = 99\%</math> ; odotetut ylitykset 13</b>									
HS	12	<b>0,088</b> <b>(0,767)</b>	8,533 (0,014)	11	<b>0,344</b> <b>(0,558)</b>	9,524 (0,009)	10	<b>0,783</b> <b>(0,376)</b>	10,783 (0,005)
VC	32	19,784 ( $< 0,001$ )	27,073 ( $< 0,001$ )	30	16,268 ( $< 0,001$ )	16,397 ( $< 0,001$ )	26	10,074 (0,002)	16,150 ( $< 0,001$ )
FHS	13	<b>&lt; 0,001</b> <b>(0,989)</b>	<b>2,467</b> <b>(0,291)</b>	11	<b>0,344</b> <b>(0,558)</b>	<b>0,531</b> <b>(0,767)</b>	14	<b>0,068</b> <b>(0,794)</b>	<b>0,372</b> <b>(0,830)</b>
Gauss-n	22	5,141 (0,023)	8,875 (0,012)	19	<b>2,402</b> <b>(0,121)</b>	<b>3,581</b> <b>(0,167)</b>	23	6,245 (0,012)	6,893 (0,032)
Gauss-t	18	<b>1,696</b> <b>(0,193)</b>	6,895 (0,032)	13	<b>&lt; 0,001</b> <b>(0,989)</b>	<b>0,262</b> <b>(0,877)</b>	18	<b>1,696</b> <b>(0,193)</b>	<b>3,043</b> <b>(0,218)</b>
Gauss-e	14	<b>0,068</b> <b>(0,794)</b>	<b>2,266</b> <b>(0,322)</b>	11	<b>0,344</b> <b>(0,558)</b>	<b>0,531</b> <b>(0,767)</b>	14	<b>0,068</b> <b>(0,794)</b>	<b>0,372</b> <b>(0,830)</b>
Clayton-n	19	<b>2,402</b> <b>(0,121)</b>	7,195 (0,027)	16	<b>0,628</b> <b>(0,428)</b>	<b>1,026</b> <b>(0,599)</b>	18	<b>1,696</b> <b>(0,193)</b>	<b>3,043</b> <b>(0,218)</b>
Clayton-t	16	<b>0,628</b> <b>(0,428)</b>	<b>2,361</b> <b>(0,307)</b>	10	<b>0,783</b> <b>(0,376)</b>	<b>0,938</b> <b>(0,626)</b>	12	<b>0,088</b> <b>(0,767)</b>	<b>0,311</b> <b>(0,856)</b>
Clayton-e	11	<b>0,344</b> <b>(0,558)</b>	<b>3,440</b> <b>(0,179)</b>	8	<b>2,290</b> <b>(0,130)</b>	<b>2,389</b> <b>(0,303)</b>	9	<b>1,425</b> <b>(0,233)</b>	<b>1,550</b> <b>(0,461)</b>
Gumbel-n	24	7,438 (0,006)	14,398 (0,001)	22	5,141 (0,023)	<b>5,903</b> <b>(0,052)</b>	27	11,512 (0,001)	11,808 (0,003)
Gumbel-t	21	4,130 (0,042)	<b>5,018</b> <b>(0,081)</b>	15	<b>0,281</b> <b>(0,596)</b>	<b>0,630</b> <b>(0,730)</b>	23	6,245 (0,012)	6,893 (0,032)
Gumbel-e	18	<b>1,696</b> <b>(0,193)</b>	6,895 (0,032)	13	<b>&lt; 0,001</b> <b>(0,989)</b>	<b>0,262</b> <b>(0,877)</b>	19	<b>2,402</b> <b>(0,121)</b>	<b>3,581</b> <b>(0,167)</b>
t-n	21	4,130 (0,042)	8,192 (0,017)	19	<b>2,402</b> <b>(0,121)</b>	<b>3,581</b> <b>(0,167)</b>	23	6,245 (0,012)	6,893 (0,032)
t-t	17	<b>1,103</b> <b>(0,294)</b>	6,739 (0,034)	12	<b>0,088</b> <b>(0,767)</b>	<b>0,311</b> <b>(0,856)</b>	16	<b>0,628</b> <b>(0,428)</b>	<b>1,026</b> <b>(0,599)</b>
t-e	13	<b>&lt; 0,001</b> <b>(0,989)</b>	<b>2,467</b> <b>(0,291)</b>	9	<b>1,425</b> <b>(0,233)</b>	<b>1,550</b> <b>(0,461)</b>	13	<b>&lt; 0,001</b> <b>(0,989)</b>	<b>0,262</b> <b>(0,877)</b>

Taulukon 11 tulosten perusteella normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat ehdolliset mallit toimivat myös kolmannella osaperiodilla selkeästi heikommin kuin t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin jakaumiin perustuvat mallit. Innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustuvat mallit johtavat poikkeuksetta suurempiin ylitysmääriin kuin muihin reunajakaumaspesifikaatioihin pohjautuvat mallit kopulafunktiosta riippumatta. Normaalijakaumaan perustuvista malleista ainoastaan Clayton-n voidaan hyväksyä molempien tilastollisten testien perusteella vähintään kahdessa portfolioissa.

Taulukon 11 tuloksista voidaan myös havaita, että osakeindeksituottojen riippuvuus-rakenteiden mallinnuksessa käytettävällä kopulafunktiolla on kolmannella osaperiodilla huomattavasti pienempi vaikutus VaR-mallien ennustekykyyneen kuin toisella osaperiodilla,

sillä vähintään yksi kuhunkin kopulafunktioon perustuvista malleista suoriutuu VaR-estimoinnista hyväksyttävästi. Claytonin kopulaan perustuvat mallit vaikuttaisivat suoriutuvan VaR-estimoinnista hieman muihin kopulafunktioihin pohjautuvia malleja paremmin, sillä kaikkia Claytonin kopulaan perustuvia malleja voidaan pitää hyväksyttävänä toteumatestaustulosten valossa, minkä lisäksi Claytonin kopulaan pohjautuvat VaR-mallit johtavat pienimpiin ylitysmääriin reunajakaumaspesifikaatiosta riippumatta. Elliptisiin kopuloihin pohjautuvista malleista ainoastaan empiirisiin innovaatiojakaumiin tai t-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit toimivat hyväksyttävästi, kun taas Gumbelin kopulaan perustuvista malleista ainoastaan Gumbel-e voidaan hyväksyä molempien kriteerien perusteella vähintään kahdessa portfolioissa.

Kolmannella osaperiodilla hyväksytyjen VaR-mallien CPA-testien tulokset on esitetty liitteen 4 taulukossa 16. Tulosten mukaan FHS-malli häviää indikaattorin  $I$  arvojen perusteella vähintään kuudelle kopulamallille kaikissa portfolioissa. FHS-mallin ja paremmin suoriutuvien kopulamallien erot eivät kuitenkaan ole tilastollisesti merkitseviä lukuun ottamatta portfolioa AM-EU, jossa mallit Clayton-n ja Gumbel-e johtavat tilastollisesti merkitsevästi FHS-mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. FHS-mallin ennustekyky on puolestaan tilastollisesti merkitsevästi Clayton-e-mallia parempi portfolioissa AM-EU ja AP-EU. Kokonaisarvioinnin perusteella FHS-mallia voidaan pitää ennustekyvyltään hieman kopulamalleja heikompana, mutta mallien väliset erot ovat selkeästi pienempiä kuin ensimmäisellä ja toisella osaperiodilla.

Portfolioissa AM-AP kopulamallien väliset erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä yhtä poikkeusta lukuun ottamatta. Indikaattorin  $I$  arvojen perusteella Clayton-e-mallin ehdollinen ennustekyky on heikoin, minkä lisäksi Clayton-e-malli on tilastollisesti merkitsevästi Clayton-t-mallia heikompi. Clayton-t- ja Gauss-t-malli suoriutuvat indikaattorin arvojen perusteella parhaiten. Portfolioissa AM-EU Clayton-n-malli on indikaattorin arvojen perusteella paras malli, minkä lisäksi Clayton-n-mallin ennustekyky on tilastollisesti merkitsevästi FHS-, Gauss-e-, Clayton-t-, Clayton-e- ja t-e-mallia parempi. Clayton-e-malli häviää tilastollisesti merkitsevästi malleille FHS, Gauss-e, Clayton-n, Gumbel-e ja t-e portfolioissa AM-EU ja on ennustekyvyltään selkeästi heikoin malli. Clayton-e-malli toimii heikoiten myös portfolioissa AP-EU, jossa malli häviää tilastollisesti merkitsevästi neljälle eri VaR-mallille. Indikaattorin  $I$  arvojen perusteella t-t- ja Clayton-t-malli suoriutuvat VaR-estimoinnista parhaiten. Koska t-t-mallin ennustekyky on tilastollisesti merkitsevästi Clayton-t-mallia parempi, voidaan t-t-mallia pitää parhaana VaR-mallina portfolioissa AP-EU.

Kokonaisarvioinnin perusteella VaR-malleja ei voida asettaa kolmannella osaperiodilla yhtä selkeään paremmuusjärjestykseen kuin ensimmäisellä ja toisella osaperiodilla. CPA-testien ja indikaattorin  $I$  arvojen perusteella t-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit vaikuttaisivat toimivan innovaatioiden empiirisiin jakaumiin pohjautuvia malleja paremmin sekä elliptisiin että Claytonin kopulaan perustuvien mallien osalta.

Indikaattorin  $I$  arvojen avulla muodostetun paremmuusjärjestyksen perusteella mallit Clayton-n, Gauss-t, Clayton-t ja t-t suoriutuvat kokonaisuudessaan VaR-estimoinnista parhaiten. Koska Clayton-t-malli häviää tilastollisesti merkitsevästi muille kärkimalleille vähintään kerran, voidaan Clayton-t-mallia pitää malleja Clayton-n, Gauss-t ja t-t heikompana. Muiden kärkimallien väliset erot eivät ole tilastollisesti merkitseviä, minkä lisäksi mallien toteumatestaustulokset eivät poikkea olennaisesti toisistaan. Näin ollen malleja Clayton-n, Gauss-t ja t-t voidaan käytännössä pitää yhtä hyvinä. Toteumatestien ja CPA-testien tulosten perusteella muilla osaperiodeilla erittäin hyvin toimiva Clayton-e-malli yliarvioi etenkin portfolioiden AM-EU ja AP-EU riskiä, mikä puolestaan kasvattaa CPA-testeissä sovelletun asymmetrisen tappiofunktion arvoa muihin malleihin verrattuna ja selittää näin ollen Clayton-e-mallin heikkoa suhteellista ennustekykyä portfolioissa AM-EU ja AP-EU.

Osaperioditarkastelun perusteella voidaan todeta, että osakeindeksituottojen ehdollisen volatiliteetin mallinnuksella on keskeinen vaikutus 99 %:n VaR-mallien ennustekykyyneen kaikilla osaperiodeilla. Ehdollistamattomat estimointimenetelmät johtavat kaikilla osaperiodeilla ehdollisia malleja heikompiin tuloksiin, minkä vuoksi GARCH-mallien soveltamista voidaan pitää välttämättömänä VaR-mallien riittävän ennustekyvyn kannalta. Osaperioditarkastelun tulokset ovat näin ollen linjassa koko ennustejaksoa koskevien tulosten kanssa. Varianssi-kovarianssimenetelmä ei johda hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin yhdelläkään osaperiodilla, kun taas ehdollistamattomaan historialliseen simulointiin perustuva VaR-malli hylätään toisella ja kolmannella osaperiodilla.

Ehdollistamattomien mallien heikkous suhteessa ehdollisiin malleihin korostuu etenkin toisella osaperiodilla, jonka aikana molemmat ehdollistamattomat mallit aliarvioivat osakeindeksiportfolioiden riskiä ja johtavat klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin. Ehdollistamaton historiallinen simulointi johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin ensimmäisellä osaperiodilla, jonka aikana tarkasteltavien osakemarkkinoiden volatiliteetti on huomattavasti alhaisempi kuin muilla osaperiodeilla. Ehdollistamattoman luonteensa vuoksi historiallinen simulointi reagoi kuitenkin hitaasti riskifaktorituottojen volatiliteetin muutoksiin, minkä vuoksi menetelmä johtaa klusteroituneisiin ylityksiin toisella ja kolmannella osaperiodilla, joiden aikana tarkasteltavien osakemarkkinoiden volatiliteetti vaihtelee merkittävästi. Osaperioditarkastelun tulokset havainnollistavat näin ollen historiallisen simuloinnin tyypillisimpiä ongelmakohtia.

Tutkimustulosten perusteella kopulafunktioihin ja ehdollisen volatiliteetin malleihin perustuvalla estimointimenetelmällä voidaan tuottaa tarkkoja 99 %:n VaR-estimaatteja kaikilla osaperiodeilla. Kopulamallien ennustekyky on myös ehdolliseen historialliseen simulointiin perustuvaa VaR-mallia parempi kaikilla osaperiodeilla. Kopulamallien suhteellinen paremmuus korostuu etenkin finanssikriisin sisältävällä toisella osaperiodilla, jonka aikana ehdolliseen historialliseen simulointiin perustuva menetelmä ei johda hy-

väksyttäviin VaR-estimaatteihin. Vaikka kopulamallien avulla voidaan tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja kaikilla osaperiodeilla, kopulamallien ennustekyky vaihtelee huomattavasti eri osaperiodeilla. Kopulamallien suhteellinen ennustekyky vaikuttaisi näin ollen vaihtelevan ajassa, mikä on myös linjassa Weißin (2011) havaintojen kanssa. Ensimmäisellä osaperiodilla peräti yhdeksän kopulamallia johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin, kun taas kolmannella osaperiodilla hyväksyttävästi toimivia malleja on kahdeksan. Toinen osaperiodi on odotusten mukaisesti haastavin kopulamallien ennustekyvyn kannalta, sillä vain kolme mallia johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin Kupiecien (1995) ja Christoffersenin (1998) testien perusteella.

Tutkimustulosten perusteella osakeindeksituottojen tuotto prosessia ajavien innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustuvat mallit aliarvioivat pääsääntöisesti osakeindeksiportfolioiden riskiä ja johtavat klusteroituneisiin ylityksiin. Etenkin toisella osaperiodilla normaalijakaumaa paksuhäntäisempien reunajakaumaspesifikaatioiden soveltamista voidaan pitää välttämättömänä VaR-mallien hyväksyttävyyden kannalta, sillä toisella osaperiodilla yhtäkään normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvaa mallia ei voida pitää hyväksyttävänä. Normaalijakaumaan pohjautuvat mallit hylätään Claytonin kopulaan perustuvaa mallia lukuun ottamatta myös kolmannella osaperiodilla. Ensimmäisellä osaperiodilla normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit toimivat sen sijaan huomattavasti paremmin kuin muilla osaperiodeilla, sillä sekä Clayton- $n$ - että  $t$ - $n$ -malli johtavat hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin. Samansuuntaisia tuloksia on esitetty myös Bergerin ja Missongin (2014) tutkimuksessa, jonka mukaan normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit toimivat hyväksyttävästi keskimääräistä alhaisemman volatiliteetin ajanjaksolla, kun taas kriisiperiodin aikana mallit johtavat liian pieniin VaR-estimaatteihin ja klusteroituneisiin ylityksiin.

Vaikka normaaleihin reunajakaumiin perustuvat mallit toimivat ensimmäisellä osaperiodilla suhteellisesti paremmin kuin muilla osaperiodeilla,  $t$ -jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin perustuvien mallien ennustekyky on kuitenkin kokonaisarvioinnin perusteella merkittävästi normaalijakaumaoletukseen perustuvia malleja parempi myös ensimmäisellä osaperiodilla. Tulokset poikkeavat tältä osin Bergerin ja Missongin (2014) havainnoista, joiden mukaan innovaatioiden normaalijakaumaoletukseen perustuvat mallit toimivat paksuhäntäisiin innovaatiojakaumiin perustuvia malleja paremmin finanssikriisiä edeltävällä ajanjaksolla 2001–2005.

Reunajakaumaspesifikaatioiden ohella myös osakeindeksituottojen riippuvuusrakenteen mallinnuksessa sovellettavan kopulafunktion merkitys vaihtelee eri osaperiodien välillä. Kopulafunktion merkitys VaR-mallien ennustekyvyn kannalta on selkeästi pienempi ensimmäisellä ja kolmannella osaperiodilla kuin toisella osaperiodilla. Ensimmäisellä ja kolmannella osaperiodilla suurin osa kopulamalleista johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin. Ensimmäisen osaperiodin CPA-testien perusteella empiirisiin reunajakaumiin



sekä Claytonin kopulaan ja t-kopulaan perustuvat mallit johtavat muita malleja tarkempiin VaR-estimaatteihin, kun taas kolmannella osaperiodilla mallit Clayton-n, Gauss-t ja t-t toimivat CPA-testien perusteella muita malleja paremmin.

Finanssikriisin ja sitä seuranneen taantumän sisältävällä toisella osaperiodilla eri kopulafunktioihin perustuvien mallien erot ovat sen sijaan huomattavasti selkeämpiä ja ne ilmenevät jo toteumatestausvaiheessa. Toisella osaperiodilla hyväksyttävien VaR-estimaattien muodostus edellyttää paksuhäntäisten reunajakaumaspesifikaatioiden lisäksi myös osakeindeksituottojen alemman häntäriippuvuuden mallinnusta joko Claytonin kopulalla tai t-kopulalla. CPA-testien perusteella mallit Clayton-t ja Clayton-e johtavat tarkimpiin VaR-estimaatteihin. Tulokset poikkeavat näin ollen Bergerin ja Missongin (2014) tuloksista, joiden mukaan kopulafunktiolla ei ole juurikaan vaikutusta VaR-mallien ennustekykyyän kriisiperiodin aikana. Bergerin ja Missongin (2014) tutkimuksessa vertailtiin kuitenkin vain elliptisiin kopulafunktioihin perustuvia malleja, minkä vuoksi tuloksia ei voida pitää täysin vertailukelpoisina.

Kokonaisarviointin perusteella Claytonin kopulaan perustuvia VaR-malleja voidaan pitää muita kopulamalleja parempina, sillä Claytonin kopulaan pohjautuvista malleista vähintään kaksi suoriutuu toteumatestien perusteella hyväksyttävästi kaikissa portfolioissa ja kaikilla osaperiodeilla. CPA-testien perusteella parhaiten suoriutuva VaR-malli perustuu myös Claytonin kopulaan kaikilla osaperiodeilla. Tulosten perusteella voidaan näin ollen todeta, että etenkin turbulenteilla ajanjaksoilla korkean luottamustason VaR-mallien ennustekykä voidaan parantaa soveltamalla samanaikaisten äärimmäisten tappioiden riippuvuutta mallintavaa Claytonin kopulaa.

### 5.3 Estimointi-ikkunan pituuden vaikutus tuloksiin

VaR-mallien perustana olevan estimointiaineiston pituuden vaikutusta VaR-mallien ennustekykyyän tutkitaan vertaamalla 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvien estimointimenetelmien ennustekykä luvussa 5.1 esitettyjen, 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvien menetelmien ennustekykyyän 99 %:n luottamustasolla. Eripituisiin estimointi-ikkunoihin perustuvien menetelmien ennustekykä verrataan toisiinsa sekä CPA-testien että Kupiecin (1995) ja Christoffersenin (1998) toteumatestien tulosten avulla ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvassa estimoinnissa VaR-mallien perustana oleva estimointiaineisto koostuu 500 edellisen tuottohavainnon aikasarjasta  $\{\mathbf{R}_s; s = t - n + 1, \dots, t\}$ , missä  $n = 500$ . Muilta osin VaR-mallit estimoidaan vastaavalla tavalla kuin 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvat mallit. Varianssi-kovarianssimenetelmä jätetään tarkastelun ulkopuolelle, sillä estimointi-ikkunan pituus vaikuttaa suoraan ainoastaan riskifaktorituottojen varianssi-ko-

varianssimatriisiin alkuarvoon, jonka vaikutus seuraaviin varianssi-kovarianssimatriisies-  
timaatteihin ja siten myös seuraaviin VaR-estimaatteihin katoaa varsin nopeasti päivitys-  
menetelmän rekursiivisen luonteen vuoksi. Varianssi-kovarianssimatriisiestimaattien al-  
kuarvon vähäistä merkitystä ilmentää esimerkiksi se, että 500 havainnon estimointi-ikkun-  
aan perustuva VC-menetelmä johtaa täsmälleen samoihin ylitysmääriin kuin 1000 ha-  
vainnon estimointi-ikkunaan perustuva menetelmä.

500 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien toteumates-  
taustulokset on esitetty taulukossa 12. Porfoliossa AM-AP yksikään 500 havainnon esti-  
mointi-ikkunaan perustuvista VaR-malleista ei toimi hyväksyttävästi molempien arvioin-  
tikriteerien perusteella, kun taas 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista mal-  
leista neljä suoriutuu hyväksyttävästi taulukossa 6 esitettyjen tulosten valossa. Portfo-  
liossa AM-EU hyväksyttävästi suoriutuvia malleja on vain yksi ja portfoliossa AP-EU  
hyväksyttäviä malleja on kolme. 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista mal-  
leista sen sijaan kaksi suoriutuu 99 %:n VaR-mittojen estimoinnista hyväksyttävästi port-  
foliossa AM-EU, kun taas portfoliossa AP-EU vastaava lukumäärä on kuusi. Taulukon  
12 tulosten perusteella ainoastaan Clayton-e-malli johtaa hyväksyttäviin VaR-estimaat-  
teihin sekä Kupiecien (1995) että Christoffersenin (1998) testien perusteella vähintään  
kahdessa portfoliossa.

Taulukkojen 6 ja 12 tulosten perusteella 500 havainnon estimointi-ikkunan soveltami-  
nen johtaa lähes poikkeuksetta 1000 havainnon estimointi-ikkunaa suurempiin ylitysmää-  
riin. 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista malleista ainoastaan FHS-malli  
sekä normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit johtavat suurempiin ylitys-  
määriin portfoliossa AM-AP. Suurempien ylitysmäärien lisäksi lyhyemmän estimointi-  
ikkunan soveltaminen vaikuttaisi myös johtavan herkemmin klusteroituneisiin VaR-yli-  
tyksiin. Toteumatestaustulosten perusteella voidaan näin ollen todeta, että lyhyemmän  
estimointi-ikkunan soveltaminen johtaa pääsääntöisesti selkeästi heikompiin 99 %:n  
VaR-estimaatteihin. Lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen korostaa myös  
Claytonin kopulaan perustuvien mallien suhteellista ennustekykä muihin malleihin ver-  
rattuna, sillä Claytonin kopulaan ja t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden em-  
piirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit suoriutuvat selkeästi parhaiten mallien to-  
teumatestauksesta.

**Taulukko 12** 500 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien toteumatestaustulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Taulukossa on esitetty 500 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien toteutuneet ylitykset sekä Kupiec (1995) ehdollistamattoman kattavuuden testin (UC) ja Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden testin (CC) testisuureiden arvot kullekin tarkasteltavalle portfoliolle ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Kupiec (1995) ja Christoffersenin (1998) testien p-arvot on esitetty suluissa. Testitulokset, joiden mukaan VaR-malli toimii hyväksyttävästi 5 %:n merkitsevyytasolla, on lihavoitu. Ennustejakson toteumatestaustasaineisto kattaa yhteensä 3129 VaR-estimaattia ja toteutunutta tappiota kunkin mallin ja portfolion osalta.

		AM-AP			AM-EU			AP-EU		
		ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC	ylitykset	UC	CC
<b><math>\alpha = 99\%</math> ; odotetut ylitykset 31</b>										
HS	53	12,594 ( $< 0,001$ )	46,004 ( $< 0,001$ )	57	17,166 ( $< 0,001$ )	22,352 ( $< 0,001$ )	46	6,102 (0,014)	10,636 (0,005)	
FHS	44	4,631 (0,031)	9,607 (0,008)	53	12,594 ( $< 0,001$ )	12,605 (0,002)	49	8,637 (0,003)	10,066 (0,007)	
Gauss-n	58	18,400 ( $< 0,001$ )	20,839 ( $< 0,001$ )	74	42,565 ( $< 0,001$ )	43,342 ( $< 0,001$ )	61	22,310 ( $< 0,001$ )	24,351 ( $< 0,001$ )	
Gauss-t	46	6,102 (0,014)	10,636 (0,005)	54	13,681 ( $< 0,001$ )	13,686 (0,001)	47	6,904 (0,009)	7,015 (0,030)	
Gauss-e	46	6,102 (0,014)	10,636 (0,005)	50	9,566 (0,002)	11,190 (0,004)	42	<b>3,344</b> <b>(0,067)</b>	<b>4,488</b> <b>(0,106)</b>	
Clayton-n	51	10,535 (0,001)	14,089 (0,001)	62	23,681 ( $< 0,001$ )	24,107 ( $< 0,001$ )	43	3,964 (0,046)	6,117 (0,047)	
Clayton-t	42	<b>3,344</b> <b>(0,067)</b>	8,795 (0,012)	44	4,631 (0,031)	<b>5,886</b> <b>(0,053)</b>	37	<b>0,994</b> <b>(0,319)</b>	<b>1,540</b> <b>(0,463)</b>	
Clayton-e	36	<b>0,683</b> <b>(0,409)</b>	7,777 (0,020)	37	<b>0,994</b> <b>(0,319)</b>	<b>1,880</b> <b>(0,391)</b>	35	<b>0,428</b> <b>(0,513)</b>	<b>1,220</b> <b>(0,543)</b>	
Gumbel-n	67	31,020 ( $< 0,001$ )	34,379 ( $< 0,001$ )	92	78,220 ( $< 0,001$ )	78,260 ( $< 0,001$ )	82	57,416 ( $< 0,001$ )	60,365 ( $< 0,001$ )	
Gumbel-t	53	12,594 ( $< 0,001$ )	18,721 ( $< 0,001$ )	73	40,830 ( $< 0,001$ )	43,216 ( $< 0,001$ )	63	25,085 ( $< 0,001$ )	25,460 ( $< 0,001$ )	
Gumbel-e	49	8,637 (0,003)	15,825 ( $< 0,001$ )	66	29,489 ( $< 0,001$ )	30,961 ( $< 0,001$ )	62	23,681 ( $< 0,001$ )	30,655 ( $< 0,001$ )	
t-n	58	18,400 ( $< 0,001$ )	20,839 ( $< 0,001$ )	73	40,830 ( $< 0,001$ )	41,680 ( $< 0,001$ )	60	20,972 ( $< 0,001$ )	25,523 ( $< 0,001$ )	
t-t	46	6,102 (0,014)	10,636 (0,005)	51	10,535 (0,001)	11,764 (0,003)	49	8,637 (0,003)	8,703 (0,013)	
t-e	44	4,631 (0,031)	9,607 (0,008)	49	8,637 (0,003)	8,703 (0,013)	43	3,964 (0,046)	<b>4,206</b> <b>(0,122)</b>	

500 ja 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien VaR-mallien ennustekykä vertailevien CPA-testien tulokset on esitetty taulukossa 13. Indikaattorin  $I$  arvojen perusteella lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen parantaa ehdollistamattoman historiallisen simuloinnin suhteellista ennustekykä kaikissa portfolioissa. Erot ovat CPA-testien p-arvojen perusteella myös tilastollisesti merkitseviä portfolioissa AM-AP ja AM-EU. Ehdollisten mallien osalta estimointi-ikkunan pituus vaikuttaa puolestaan indikaattorin  $I$  arvojen perusteella päinvastaisesti VaR-estimaattien tarkkuuteen. Portfolioissa AM-EU normaalijakautuneisiin ja t-jakautuneisiin innovaatioihin perustuvat mallit johtavat Clayton-t-mallia lukuun ottamatta tarkempiin VaR-estimaatteihin indikaattorin  $I$  arvojen perusteella sovellettaessa 500 havainnon estimointi-ikkunaa. Portfolioissa AM-AP lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen parantaa puolestaan vain FHS-mallin ennustekykä, kun taas portfolioissa AP-EU 1000 havainnon estimointi-ikkunan soveltaminen johtaa tarkempiin VaR-estimaatteihin kaikkien ehdollisten mallien osalta.

**Taulukko 13** 500 ja 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien 99 %:n VaR-mallien ennustekykyä vertailevien CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot 500 ja 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuville 99 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuva malli johtaa 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystynuoli tarkoittaa, että 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuva malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa päinvastaiseen tilanteeseen. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	AM-AP	AM-EU	AP-EU
	1000 havaintoa		
HS	← <b>0,021</b> (0,74)	← <b>0,034</b> (0,83)	0,135 (1,25)
FHS	0,959 (0,77)	0,194 (99,10)	0,115 (99,62)
Gauss-n	↑ <b>0,034</b> (99,01)	0,873 (31,87)	0,273 (99,14)
Gauss-t	0,219 (99,55)	0,131 (25,29)	↑ <b>0,054</b> (99,71)
Gauss-e	0,380 (99,55)	0,192 (95,04)	↑ <b>0,059</b> (99,39)
Clayton-n	0,165 (99,17)	0,210 (6,59)	0,150 (99,55)
Clayton-t	0,277 (98,40)	0,506 (71,10)	0,129 (99,65)
Clayton-e	0,638 (99,65)	0,548 (89,10)	↑ <b>0,072</b> (99,49)
Gumbel-n	0,878 (98,95)	0,952 (1,50)	0,268 (98,85)
Gumbel-t	0,259 (98,15)	0,892 (28,32)	0,251 (99,10)
Gumbel-e	0,375 (99,07)	0,577 (98,91)	0,194 (99,26)
t-n	↑ <b>0,029</b> (99,01)	0,852 (0,86)	0,227 (99,17)
t-t	0,311 (99,46)	0,525 (1,05)	0,105 (99,94)
t-e	0,211 (99,55)	0,158 (90,35)	0,166 (99,94)

Kuten taulukon 13 tuloksista ilmenee, 500 havainnon estimointi-ikkunan soveltaminen ei paranna ehdollisten VaR-mallien ennustekykyä tilastollisesti merkitsevästi yhdessäkään tapauksessa. 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista malleista sen sijaan mallit Gauss-n ja t-n johtavat tilastollisesti merkitsevästi tarkempiin VaR-estimaatteihin kuin vastaavat 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvat mallit portfolioissa AM-AP, kun taas portfolioissa AP-EU mallit Gauss-t, Gauss-e ja Clayton-e tuottavat tilastollisesti merkitsevästi tarkempia VaR-estimaatteja 1000 havainnon estimointi-ikkunaa sovellettaessa.

CPA-testien ja toteumatestaustulosten perusteella lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen vaikuttaisi kohentavan vain ehdollistamattoman historiallisen simuloinnin en-

nustekykyä. Eripituisiin estimointi-ikkunoihin perustuvien VaR-estimaattien ja CPA-testien perustana olevien tappiofunktioiden aikasarjojen vertailu osoittaa, että 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuva HS-malli reagoi huomattavasti 500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvaa mallia hitaammin markkinaregiimin muutoksiin, mikä puolestaan johtaa selkeästi alhaisempiin ja epätarkempiin VaR-estimaatteihin etenkin finanssikriisin aikana. Samansuuntaisia tuloksia on myös esitetty Kuesterin ym. (2006) sekä Halbleibin ja Pohlmeierin (2012) tutkimuksissa, joiden mukaan estimointi-ikkunan pituuden lyhentäminen parantaa ehdollistamattomien menetelmien suhteellista ennustekykyä, koska VaR-estimaatit reagoivat nopeammin markkinoiden volatiliteetin muutoksiin. Lyhyempään estimointi-ikkunaan perustuvan HS-mallin paremmasta suhteellisesta ennustekyvystä huolimatta menetelmä ei kuitenkaan johda hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin toteumatestaustulosten valossa.

Ehdollisten mallien osalta lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen puolestaan heikentää mallien ennustekykyä sekä toteumatestaustulosten että CPA-testien tulosten perusteella. Ehdollisissa menetelmissä estimointi-ikkunan pituus vaikuttaa ennen kaikkea menetelmien perustana olevien AR-EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden parametriestimaattien sekä empiiristen reunajakaumaestimaattorien tarkkuuteen. Tutkimustulosten perusteella lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen kasvattaa ehdollisten menetelmien taustalla olevien parametrusten mallien parametriestimaattien sekä empiiristen reunajakaumaestimaattorien volatiliteettia, mikä puolestaan johtaa VaR-estimaatteihin, jotka reagoivat liian voimakkaasti estimointiaineiston muutoksiin.

Eripituisiin estimointi-ikkunoihin perustuvien ehdollisten mallien VaR-estimaattien ja tappiofunktioiden aikasarjojen perusteella lyhyemmän estimointi-ikkunan soveltaminen vaikuttaisi johtavan finanssikriisin aikana hieman tarkempaan VaR-estimaatteihin etenkin portfolioissa AM-EU, mutta muutoin 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvat mallit johtavat pääsääntöisesti tarkempaan VaR-estimaatteihin. Tulokset ovat näin ollen linjassa Alexanderin ja Sheedyn (2008), Fantazzinin (2009b) sekä Halbleibin ja Pohlmeierin (2012) tutkimustulosten kanssa, joiden mukaan suurten estimointiaineistojen soveltaminen parantaa etenkin ehdollisten parametrusten mallien ennustekykyä. Fantazzinin (2009b) mukaan liian suppean estimointiaineiston soveltaminen kasvattaa erityisesti GARCH-mallien parametriestimaattien harhaisuutta kopulafunktioihin ja GARCH-malleihin pohjautuvissa estimointimenetelmissä, mikä puolestaan johtaa epätarkkoihin VaR-estimaatteihin.

## 5.4 Johtopäätökset ja jatkotutkimusehdotukset

Tutkimustulosten perusteella voidaan todeta, että AR(1)-EGARCH(1,1)-malleihin perustuvat ehdolliset VaR-mallit johtavat selkeästi osakeindeksituottojen multinormaalisuusoletukseen perustuvaa varianssi-kovarianssimenetelmää sekä ehdollistamatonta historiallista simulointia tarkempiin VaR-estimaatteihin kaikilla tarkasteltavilla luottamustasoilla ja osaperiodeilla. Ehdollistamattomien menetelmien heikkoudet korostuvat etenkin 99 %:n luottamustasolla ja finanssikriisin sisältävällä toisella osaperiodilla, jonka aikana molemmat ehdollistamattomat menetelmät aliarvioivat osakeindeksiportfolioiden riskiä ja johtavat klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin. Ehdollistamattomat menetelmät toimivat varsin heikosti myös muilla osaperiodeilla, minkä vuoksi ehdollisen volatilitteen mallien soveltamista voidaan käytännössä pitää välttämättömänä VaR-mallien luotettavuuden kannalta.

Ehdollisten mallien keskinäisen vertailun perusteella kopulafunktioihin ja ehdollisen volatilitteen malleihin pohjautuvan Monte Carlo -menetelmän ennustekyky on puolestaan ehdollista historiallista simulointia parempi kaikilla tarkasteltavilla luottamustasoilla ja ennustejaksoilla. Ehdollisen historiallisen simuloinnin heikompi ennustekyky korostuu ehdollistamattomien menetelmien tavoin etenkin toisella osaperiodilla, jonka aikana ehdollinen historiallinen simulointi hylätään muista osaperiodeista poiketen jo toteumates-tausvaiheessa. Yhteenvedona voidaan näin ollen todeta, että osakeportfolioiden markkinariskiä mittaavien tavanomaisempien VaR-mallien ennustekykyä voidaan parantaa soveltamalla kopulafunktioihin ja GARCH-malleihin pohjautuvaa estimointimenetelmää. Vastaavia tuloksia on esitetty myös Huangin ym. (2009), Skoglundin ym. (2010), Alouin ym. (2011) sekä Weißin (2011) tutkimuksissa.

Koko ennustejaksoa koskevat tulokset osoittavat, että kopulamallien suhteellinen paremmuus riippuu sekä luottamustasosta että sovelletuista reunajakaumaspesifikaatioista. Standardinormaaleihin reunajakaumiin perustuvat mallit toimivat pääsääntöisesti varsin heikosti sekä 95 %:n että 99 %:n luottamustasoilla. Erityisesti 99 %:n luottamustasolla innovaatiotermien normaalijakaumaoletus aliarvioi osakeindeksiportfolioiden riskiä merkittävästi, minkä vuoksi yhtäkään normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvaa kopulamallia ei voida pitää hyväksyttävänä. Samansuuntaisia tuloksia on esitetty esimerkiksi Junkerin ja Mayn (2005) tutkimuksessa.

Tutkimustulosten perusteella elliptisiin kopulafunktioihin ja empiirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit johtavat tarkimpiin VaR-estimaatteihin 95 %:n luottamustasolla, kun taas 99 %:n luottamustasolla t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin sekä osakeindeksituottojen alemmaa häntäriippuvuutta mallintavaan Claytonin kopulaan perustuvien mallien ennustekykyä voidaan pitää parhaana. Ylempää häntäriippuvuutta mallintavaan Gumbelin kopulaan perustuvat mallit suoriutuivat sen sijaan VaR-estimoinnista heikoiten luottamustasosta riippumatta.

Osaperioditarkastelun tulosten valossa kopulafunktioihin ja ehdollisen volatilitietin malleihin pohjautuvalla estimointimenetelmällä voidaan tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja ennustejaksosta riippumatta. Kopulamallien suhteellinen ennustekyky vaihtelee kuitenkin huomattavasti eri osaperiodeilla. Ensimmäisellä osaperiodilla hyväksytyjä kopulamalleja on peräti yhdeksän, kun taas kolmannella osaperiodilla hyväksytyjen kopulamallien lukumäärä on kahdeksan. Finanssikriisin ja sitä seuranneen taantumän sisältävä toinen osaperiodi on odotusten mukaisesti haastavin VaR-mallien ennustekyvyn kannalta, sillä ainoastaan kolme kopulamallia onnistuu tuottamaan hyväksyttäviä 99 %:n VaR-estimaatteja.

Toisella osaperiodilla normaalijakaumasta poikkeavien reunajakaumaspesifikaatioiden soveltamista voidaan pitää välttämättömyytenä, sillä normaalijakautuneisiin innovaatioihin perustuvat kopulamallit eivät johda hyväksytyihin VaR-estimaatteihin yhdessäkään portfolioissa yhtä kopulamallia ja yhtä portfolioita lukuun ottamatta. Tulokset ovat näin ollen linjassa Bergerin ja Missongin (2014) tutkimustulosten kanssa, joiden mukaan paksuhäntäisten reunajakaumien soveltaminen johtaa kriisiperiodin aikana selkeästi tarkempiin VaR-estimaatteihin kuin normaaleihin reunajakaumiin perustuvat mallit.

Osakeindeksituottojen riippuvuusrakennetta mallintavan kopulafunktion merkitys korostuu myös toisella osaperiodilla, sillä ainoastaan samanaikaisten äärimmäisten tappioiden välistä asymptoottista riippuvuutta mallintavan t-kopulan ja Claytonin kopulan avulla voidaan tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja toteumatestaustulosten valossa. CPA-testien ja toteumatestien tuloksiin perustuvan kokonaisarvioinnin perusteella Claytonin kopulaan pohjautuvia malleja Clayton-t ja Clayton-e voidaan pitää parhaimpina 99 %:n VaR-malleina toisella osaperiodilla, sillä kyseiset mallit ovat ainoita VaR-malleja, jotka kykenevät mallintamaan toisella osaperiodilla realisoituvista voimakkaista samanaikaisista kurssilaskuista aiheutuvia riskejä hyväksyttävästi kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa, minkä lisäksi mallien ehdollinen ennustekyky on t-kopulaan ja empiirisiin reunajakaumiin perustuvaa mallia parempi CPA-testien perusteella.

Kokonaisarvioinnin perusteella Claytonin kopulafunktioon perustuvia malleja voidaan pitää parhaimpina 99 %:n VaR-malleina. Claytonin kopulaan perustuvista malleista vähintään kaksi mallia suoriutuu VaR-estimoinnista hyväksyttävästi kaikilla osaperiodeilla ja kaikissa portfolioissa, minkä lisäksi Claytonin kopulaan perustuvat mallit lukeutuvat kaikilla osaperiodeilla parhaimpien VaR-mallien joukkoon CPA-testien perusteella. Erityisesti toista osaperiodia koskevat tulokset osoittavat, että osakeriskiä mittaavien korkean luottamustason VaR-mallien ennustekykyä voidaan kohentaa vakavien markkinakriisien aikana huomattavasti soveltamalla paksuhäntäisten reunajakaumien lisäksi kopulafunktiota, joka sisältää alemmaa häntäriippuvuutta mutta on asymptoottisesti riippumaton voimakkaiden samanaikaisten kurssinousujen suhteen. Näin ollen tulokset viestivät myös useissa kopulafunktioiden riskienhallintasovelluksissa käytetyn, riskifaktorituottojen lineaariseen korrelaatioon pohjautuvan Gaussin kopulan riittämättömyydestä, sillä

Gaussin kopula on asympotoottisesti riippumaton äärimmäisten samanaikaisten tappioiden suhteen. Samanaikaisten tappioiden asympotoottisen riippuvuuden mallinnuksen merkityksestä sekä Gaussin kopulan riittämättömyydestä viestiviä tuloksia on esitetty myös Anén ja Kharoubin (2003), Junkerin ja Mayn (2005), Lain (2008) sekä Fantazzinin (2009b) tutkimuksissa.

Tutkimustulokset vahvistavat myös Weißin (2011) tutkimuksessa tehdyn havainnon, jonka mukaan kopulafunktioiden ja empiirisen aineiston yhteensopivuutta arvioivien tilastollisten testien tulokset ovat varsin usein ristiriidassa VaR-mallien ennustekyvyn kanssa. Vaikka Claytonin kopulaan perustuvat VaR-mallit suoriutuvat VaR-estimoinnista kokonaisuudessaan parhaiten, taulukossa 3 esitettyjen kopulafunktioiden ja osakeindeksituottojen standardoitujen jäännösten yhteensopivuutta arvioivien mittarien perusteella Claytonin kopula kuvaa aineistossa havaittuja riippuvuusrakenteita heikoin. Lisäksi Claytonin kopula on ainut kopulafunktio, joka hylätään kopulafunktioiden sopivuutta arvioivan Cramér-von Mises -testin perusteella vähintään yhdessä portfoliossa. Tulokset osoittavat näin ollen, ettei kopulafunktioiden ja aineiston yhteensopivuutta arvioivien testien tai mittarien avulla voida johdonmukaisesti valita VaR-mallien ennustekyvyn kannalta optimaalisinta kopulafunktiota.

Kopulafunktioiden ja empiirisen aineiston yhteensopivuustestien ja VaR-mallien ennustekykyä mittaavien testien tulosten välisiä ristiriitoja selittänee ainakin osittain se, että yhteensopivuustesteissä mitataan, kuinka hyvin empiirisessä aineistossa havaitut riippuvuusrakenteet kokonaisuudessaan vastaavat tarkasteltavan kopulafunktion mukaisia riippuvuusrakenteita, kun taas VaR-mallien ennustekykyä mittavissa testeissä arvioidaan ennen kaikkea, kuinka hyvin sovellettu kopulafunktio mallintaa riskifaktorituottojen empiiristen jakaumien hännissä havaittuja riippuvuusrakenteita. Esimerkiksi Claytonin kopula vaikuttaisi VaR-mallien ennustekykyä arvioivien testien perusteella mallintavan riskifaktorituottojen jakaumien häntäriskejä muita kopulafunktioita paremmin, kun taas yhteensopivuustestien perusteella Claytonin kopula ei kuvaa riskifaktorituottojen riippuvuusrakenteita kokonaisuudessaan kovin hyvin, mikä puolestaan saattaa johtua jakaumien keskiosissa esiintyvistä, Claytonin kopulasta poikkeavista riippuvuusrakenteista. Näin ollen voidaan todeta, että VaR-mitan estimoinnissa sovellettavan kopulafunktion valinnan tulisi ensisijaisesti perustua eri kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien ennustekyvyn arviointiin ja stressitestaukseen sellaisella aineistolla, joka sisältää riskienhallinnan kohteena olevan portfolion kannalta merkittäviä rahoitusmarkkinoiden ongelmia ja voimakkaita samanaikaisia kurssilaskuja. Vaihtoehtoisesti valinnassa tulisi soveltaa yhteensopivuustestejä, jotka arvioivat etenkin empiiristen jakaumien hännissä havaittujen riippuvuusrakenteiden ja tarkasteltavan kopulafunktion yhteensopivuutta.

Tutkimustulosten perusteella VaR-estimoinnin perustana olevan estimointiaineiston koko vaikuttaa myös VaR-mallien ennustekyvyn. 500 havainnon liukuvaan estimointi-



ikkunaan perustuva estimointimenetelmä johtaa pääsääntöisesti epätarkempiin VaR-estimaatteihin kuin 1000 havainnon estimointiaineistoon pohjautuva menetelmä. Lyhyempään estimointi-ikkunaan perustuvista kopulamalleista ainoastaan Clayton-e johtaa hyväksyttäviin 99 %:n VaR-estimaatteihin vähintään kahdessa tarkasteltavassa portfolioissa, minkä lisäksi lyhyempään estimointi-ikkunaan perustuvien mallien ennustekyky on pääsääntöisesti 1000 havainnon estimointi-ikkunaan pohjautuvia malleja heikompi myös CPA-testien ja indikaattorin  $I$  arvojen perusteella. VaR-mallien ennustekyvyn kannalta on näin ollen olennaista, että mallien kalibroinnissa käytetään riittävän kattavia riskifaktorituottojen aineistoja, mikä puolestaan saattaa rajoittaa kopulamallien käytännön sovellettavuutta, mikäli portfoliotuottoja ajavien riskifaktorituottojen saatavilla oleva historiallinen aineisto on kovin suppea.

Yksi keskeisimmistä tutkimustulosten käytännön sovellettavuuden rajoitteista koskee tarkasteltavan mallinnusongelman ulottuvuutta. Käytännössä VaR-malleja soveltavat rahoituslaitokset ja muut rahoitusmarkkinoiden toimijat joutuvat mallintamaan huomattavasti useamman kuin kahden riskifaktorin välisiä riippuvuussuhteita moniulotteisia VaR-malleja kalibroidessaan, minkä vuoksi tutkimustulokset eivät anna täysin realistista kuvaa kopulafunktioihin perustuvien VaR-mallien ennustekyvystä käytännön riskienhallintasovelluksissa. Tämän vuoksi olisikin mielenkiintoista tutkia, kuinka hyvin eri kopulamallit soveltuvat VaR-estimointiin portfolioissa, jossa tuotto prosessia ajavien riskifaktorien lukumäärä on huomattavasti suurempi kuin kaksi. Mallinnusongelman ulottuvuuden kasvassa monimutkaisten parametrusten mallien estimoinnin laskennallinen raskaus on ennustekyvyn lisäksi yksi keskeisistä arviointikriteereistä, joka tulisi ottaa huomioon VaR-mittan vaihtoehtoisia estimointimenetelmiä vertailtaessa. Luottolaitosten markkinariskin pääomavaateita koskevan vakavaraisuussäntelyn muutospaineiden vuoksi olisi myös mielenkiintoista ja perusteltua tarkastella, voidaanko kopulafunktioihin ja GARCH-malleihin perustuvalla estimointimenetelmällä kohentaa myös ES-mallien ennustekykyä.

VaR-estimoinnissa sovellettujen kopulafunktioiden ehdollistamaton luonne on myös yksi keskeisistä tutkielman rajoitteista. Useissa empiirisissä tutkimuksissa on havaittu, että osaketuottojen välinen riippuvuus kasvaa etenkin markkinakriisien aikana, mikä puolestaan puoltaa dynaamisten, ajassa vaihtelevien riippuvuusparametrien soveltamista osaketuottojen riippuvuusrakenteen mallinnuksessa. Vaikka tutkielmassa sovellettu liukuva estimointi-ikkuna johtaa ajassa muuttuviin kopulaparametreihin, parametriestimaatit muuttuvat kuitenkin varsin hitaasti erityisesti markkinoiden ääritilanteissa ja pitkää estimointi-ikkunaa sovellettaessa. Näin ollen olisi mielenkiintoista tutkia kopulafunktioihin pohjautuvien VaR-mallien ennustekykyä ehdollisessa viitekehyksessä, jossa kopulaparametrien annetaan vaihdella jonkin parametrisoidun dynamiikan mukaisesti. Toisaalta eri kopulafunktioihin pohjautuvien mallien suhteellisen ennustekyvyn vaihtelut eri osapeptideilla saattavat viestiä optimaalisen kopulafunktion ajallisesta vaihtelusta, minkä

vuoksi olisi mielenkiintoista tutkia, johtavatko ehdolliset kopulamallit, joissa kopula-funktion tyyppi voi vaihdella ajassa, tarkempiin VaR-estimaatteihin kuin staattiset kopulamallit.

Tutkielman rajoitteista huolimatta tutkielmassa esiteltyjä menetelmiä ja tuloksia voidaan hyödyntää sekä luottolaitosten riskienhallintamenetelmien kehityksessä että valvontaviranomaisten valvontaprosesseissa. Vaikka tutkimusasetelma on selkeästi reaali maailman riskienhallintaongelmia yksinkertaisempi, tutkimustulokset havainnollistavat varsin selkeästi VaR-mallien tavanomaisempien estimointimenetelmien ja jakaumaoletusten ongelmakohtia, minkä lisäksi tulokset korostavat volatilitietin ajallisen vaihtelun ja riskifaktorituottojen häntäriippuvuuden mallinnuksen merkitystä. Tutkielmassa esitettyjä havaintoja ja tuloksia voidaankin soveltaa esimerkiksi riskienhallintamenetelmien ongelmakohtien tunnistuksessa sekä parempien riskimallien kehitystyössä. Toisaalta tulokset voivat tarjota uusia näkökohtia myös luottolaitosten soveltamien riskimallien arviointiin, mikä puolestaan voi johtaa valvontaviranomaisen valvontaprosessien ja -menetelmien kehitykseen ja syventymiseen.

## 6 YHTEENVETO

Tässä tutkielmassa arvioitiin ja vertailtiin VaR-mitan eri estimointimenetelmien ennustekykyä ajanjaksolla 2005–2016 sekä vuosina 2005–2007, 2008–2011 ja 2012–2016. Tutkimusaineistona käytettiin MSCI AC Americas-, MSCI AC Europe- ja MSCI AC Asia Pacific -kokonaistuottoindekseistä muodostettujen kaksiulotteisten portfolioiden tuottoja. Tutkielman tavoitteena oli tutkia, johtaako riskifaktorituottojen riippuvuusrakennetta kuvaaviin kopulafunktioihin sekä riskifaktorituottojen ehdollista volatiliiteettia mallintaviin GARCH-malleihin perustuva estimointimenetelmä hyväksyttäviin VaR-estimaatteihin ennustejaksosta riippumatta. Kopulamallien absoluuttisen ennustekyvyn lisäksi tutkielmassa arvioitiin eri kopulamallien keskinäistä paremmuutta sekä kopulamallien ennustekykyä suhteessa VaR-mitan tavanomaisempiin estimointimenetelmiin. Referenssimalleina käytettiin ehdollistamatonta ja ehdollista historiallista simulointia sekä varianssi-kovarianssimenetelmää.

Tutkimustulosten perusteella kopulamallien avulla voitiin tuottaa hyväksyttäviä VaR-estimaatteja koko ennustejaksolla ja kaikilla tarkasteltavilla osaperiodeilla, minkä lisäksi kopulamallien ennustekykyä voitiin pitää selkeästi referenssimalleja parempana. Ehdollistamattomat menetelmät johtivat lähes poikkeuksetta klusteroituneisiin VaR-mitan ylityksiin, minkä lisäksi ehdollistamattomat menetelmät aliarvioivat osakeindeksiportfolioiden riskiä etenkin 99 %:n luottamustasolla ja turbulenteilla ajanjaksoilla. Ennako-odotusten mukaisesti voidaan näin ollen todeta, että riskifaktorituottojen ehdollisen volatiliiteetin mallinnusta voidaan pitää välttämättömänä VaR-mallien hyväksyttävyyden kannalta. Toisaalta aikaisempien tutkimusten valossa varsin hyvin toiminut ehdollinen historiallinen simulointi johti myös parhaiten suoriutuneita kopulamalleja epätarkempiin VaR-estimaatteihin kaikilla tarkasteltavilla luottamustasoilla ja ajanjaksoilla.

Tutkimustulokset osoittivat myös, että paksuhäntäisiin reunajakaumaspesifikaatioihin perustuvat ehdolliset mallit johtivat lähes poikkeuksetta normaalijakaumaan pohjautuvia malleja luotettavampiin ja tarkempiin tuloksiin erityisesti 99 %:n luottamustasolla ja finanssikriisin sisältävällä toisella osaperiodilla. Tulosten perusteella voidaan todeta, että riskifaktorituottojen reunajakaumia koskeva normaalijakaumaoletus aliarvioi riskifaktorituottojen yksiulotteisten jakaumien häntien riskejä erityisesti markkinakriisien aikana, mikä on myös linjassa aikaisempien tutkimusten tulosten kanssa.

Tutkimustulosten perusteella eri kopulafunktioihin perustuvien mallien suhteellinen ennustekyky riippui sekä sovellettavasta luottamustasosta että ennustejaksosta. Koko ennustejaksoa koskevien tulosten perusteella elliptisiin kopulafunktioihin ja empiirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit suoriutuivat parhaiten 95 %:n luottamustasolla, kun taas 99 %:n luottamustasolla Claytonin kopulaan sekä t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit johtivat tarkimpiin VaR-esti-

maatteihin toteumatestauksen ja mallien suhteellista ennustekykyä arvioivien CPA-testien perusteella. Claytonin kopulaan perustuvat mallit suoriutuivat 99 %:n VaR-mitan estimoinnista kokonaisuudessaan parhaiten myös osaperioditarkastelun perusteella. Claytonin kopulaan perustuvien VaR-mallien suhteellinen paremmuus korostui etenkin finanssikriisin ja sitä seuranneen taantumän sisältävällä toisella osaperiodilla, sillä Claytonin kopulaan sekä t-jakautuneisiin innovaatioihin tai innovaatioiden empiirisiin reunajakaumiin perustuvat mallit olivat ainoita malleja, jotka tuottivat hyväksyttäviä 99 %:n VaR-estimaatteja kaikissa tarkasteltavissa portfolioissa, mikä korostaa riskifaktorituottojen alemman häntäriippuvuuden mallinnuksen merkitystä markkinakriisien aikana. Toinen osaperiodi osoittautui näin ollen odotusten mukaisesti selkeästi haastavimmaksi periodiksi VaR-mallien ennustekyvyn kannalta. Ensimmäisellä ja kolmannella osaperiodilla kopulamallit suoriutuivat sen sijaan kokonaisuudessaan huomattavasti paremmin kuin toisella osaperiodilla.

Tutkielmassa tarkasteltiin myös liukuvassa estimoinnissa sovellettavan estimointi-ikkunan pituuden vaikutusta tuloksiin. Eripituisiin estimointi-ikkunoihin pohjautuvien menetelmien toteumatestaustulosten erojen sekä CPA-testien perusteella lyhyemmän, 500 havainnon estimointi-ikkunan soveltaminen johti pääsääntöisesti 1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvaa menetelmää heikompiin tuloksiin. Mallien suhteelliseen ennustekykyyneen estimointi-ikkunan pituudella ei sen sijaan ollut merkittävää vaikutusta, sillä Claytonin kopulaan perustuvat mallit suoriutuivat selkeästi parhaiten myös 500 havainnon estimointi-ikkunalla. Toteumatestien perusteella Clayton-e-malli oli ainoa hyväksyttävä 99 %:n VaR-malli lyhyempää estimointi-ikkunaa sovellettaessa.

Tutkimustulosten valossa voidaan todeta, että kopulafunktiot tarjoavat varsin monipuolisen sekä pelkkään lineaariseen korrelaatioon pohjautuvaa riippuvuusmallinnusta kattavamman ja realistisemmän lähestymistavan riskifaktorituottojen yhteisjakauman mallinnukseen ja VaR-estimointiin. Tulosten perusteella EGARCH-malleihin, paksuhäntäisiin reunajakaumaspesifikaatioihin sekä alemmaa häntäriippuvuutta sisältävään Claytonin kopulaan pohjautuvan estimointimenetelmän avulla voidaan kohentaa osakeportfolioiden markkinariskiä mittaavien VaR-mallien ennustekykyä. Menetelmän suhteellinen paremmuus korostuu erityisesti voimakkaita samanaikaisia negatiivisia tuottosokkeja sisältävillä kriisiperiodeilla, joihin varautumista voidaan pitää riskienhallinnan päätarkoituksena. Markkinariskiä koskevien vakavaraisuussäännösten mukaisesti ennustekyvyltään tarkkojen VaR-mallien avulla voidaan pienentää markkinariskin pääomavaateita. Toisaalta kehittyneempien ja riskifaktorituottojen empiirisiä ominaisuuksia mahdollisimman hyvin kuvaavien mallien avulla voidaan arvioida riskejä realistisemmin ja tarkemmin. Kopulafunktioihin nojaava riippuvuusrakenteiden mallinnus syventää käsitystä portfoliotuottoihin vaikuttavien keskeisten riskitekijöiden välisistä riippuvuussuhteista, mikä voi puolestaan johtaa merkittäviin parannuksiin ja kehitysaskeliin malleja soveltavan laitoksen riskienhallinnassa.

## LÄHTEET

- Abad, P. – Benito, S. (2013) A detailed comparison of value at risk estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 94, 258–276.
- Acerbi, C. – Tasche, D. (2002) On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26 (7), 1487–1503.
- Alexander, C. (2008a) *Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Alexander, C. (2008b) *Market Risk Analysis, Volume IV: Value at Risk Models*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Alexander C. – Sheedy, E. (2008) Developing a stress testing framework based on market risk models. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 32 (10), 2220–2236.
- Aloui, R. – Aïssa, M. S. B. – Nguyen, D. K. (2011) Global financial crisis, extreme interdependences, and contagion effects: The role of economic structure? *Journal of Banking & Finance*, Vol. 35 (1), 130–141.
- Ané, T. – Kharoubi, C. (2003) Dependence Structure and Risk Measure. *Journal of Business*, Vol. 76 (3), 411–438.
- Angelidis, T. – Benos, A. – Degiannakis, S. (2007) A robust VaR model under different time periods and weighting schemes. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 28 (2), 187–201.
- Ang, A. – Chen, J. (2002) Asymmetric correlations of equity portfolios. *Journal of Financial Economics*, Vol. 63 (3), 443–494.
- Artzner, P. – Delbaen, F. – Eber, J. – Heath, D. (1999) Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, Vol. 9 (3), 203–228.
- Bao, Y. – Lee, T. – Saltoğlu, B. (2006) Evaluating predictive performance of value-at-risk models in emerging markets: a reality check. *Journal of Forecasting*, Vol. 25 (2), 101–128.
- Barone-Adesi, G. – Bourgoin, F. – Giannopoulos, K. (1998) Don't look back. *Risk*, Vol. 11, 100–103.
- Barone-Adesi, G. – Giannopoulos, K. – Vosper, L. (1999) VaR without correlations for portfolios of derivative securities. *Journal of Futures Markets*, Vol. 19 (5), 583–602.
- Basel Committee on Banking Supervision (1996) Amendment to the capital accord to incorporate market risks.
- Basel Committee on Banking Supervision (2006) International convergence of capital measurement and capital standards. A revised framework – comprehensive version.

- Basel Committee on Banking Supervision (2011) Revisions to the Basel II market risk framework.
- Basel Committee on Banking Supervision (2016a) Explanatory note on the revised minimum capital requirements for market risk.
- Basel Committee on Banking Supervision (2016b) Minimum capital requirements for market risk.
- Berger, T. – Misson, M. (2014) Financial crisis, Value-at-Risk forecasts and the puzzle of dependency modeling. *International Review of Financial Analysis*, Vol. 33, 33–38.
- Black, F. (1976) Studies of Stock Price Volatility Changes. *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section*, American Statistical Association, Washington DC, 177–181.
- Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, Vol. 31, 307–327.
- Bollerslev, T. (1987) A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 69 (3), 542–547.
- Bollerslev, T. (1990) Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *Review of Economics and Statistics*, Vol. 72 (3), 498–505.
- Braun, V. – Hackethal, A. (2013) Portfolio Risk Forecasting. *Journal of Risk*, Vol. 16 (1), 35–68.
- Chen, C. W. S – Gerlach, R. – Lin, E. M. H. – Lee, W. C. W. (2012) Bayesian Forecasting for Financial Risk Management, Pre and Post the Global Financial Crisis. *Journal of Forecasting*, Vol. 31 (8), 661–687.
- Cherubini, U. – Luciano, E. – Vecchiato, W. (2004) *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Christoffersen, P. F. (1998) Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, Vol. 39 (4), 841–862.
- Clayton, D. G. (1978) A Model for Association in Bivariate Life Tables and Its Application in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence. *Biometrika*, Vol. 65 (1), 141–151.
- Danielsson, J. – Embrechts, P. – Goodhart, C. – Keating, C. – Muennich, F. – Renault, O. – Shin, H. S. (2001) *An Academic Response to Basel II*. Special paper series, SP130. Financial Markets Group, Lontoo.
- Danielsson, J. (2002) The emperor has no clothes: Limits to risk modelling. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 26 (7), 1273–1296.
- Dowd, K. (2002) *Measuring Market Risk*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.

- Embrechts, P. – McNeil, A. – Straumann, D. (2002) Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. Teoksessa: *Risk management: Value at risk and beyond*, toim. M. A. H. Dempster, 176–223. Cambridge University Press, Cambridge.
- Embrechts, P. – Puccetti, G. – Rüschendorf, L. – Wang, R. – Beleraj, A. (2014) An Academic Response to Basel 3.5. *Risks*, Vol. 2 (1), 1–24.
- Engle, R. F. (2002) Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 20 (3), 339–350.
- Fama, E. (1965) The Behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business*, Vol. 38 (1), 34–105.
- Fantazzini, D. (2008) Dynamic Copula Modelling for Value at Risk. *Frontiers in Finance and Economics*, Vol. 5 (2), 72–108.
- Fantazzini, D. (2009a) Market Risk Management for Emerging Markets: Evidence from Russian Stock Market. Teoksessa: *Emerging Markets: Performance, Analysis and Innovation*, toim. G. N. Gregoriou, 533–554. CRC Press, Boca Raton, FL.
- Fantazzini, D. (2009b) The Effects of Misspecified Marginals and Copulas on Computing the Value at Risk: A Monte Carlo Study. *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 53 (6), 2168–2188.
- Fisher, T. J. – Gallagher, C. M. (2012) New Weighted Portmanteau Statistics for Time Series Goodness of Fit Testing. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 107 (498), 777–787.
- Genest, C. – Gendron, M. – Bourdeau-Brien, M. (2009) The Advent of Copulas in Finance. *The European Journal of Finance*, Vol. 15 (7–8), 609–618.
- Genest, C. – Ghoudi, K. – Rivest, L. (1995) A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions. *Biometrika*, Vol. 82 (3), 543–552.
- Genest, C. – Remillard, B. – Beaudoin, D. (2009) Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 44 (2), 199–213.
- Ghalanos, A. (2015) Introduction to the rugarch package (Version 1.3-1). <[https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction\\_to\\_the\\_rugarch\\_package.pdf](https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/vignettes/Introduction_to_the_rugarch_package.pdf)>, haettu 7.4.2017.
- Giacomini, R. – Komunjer, I. (2005) Evaluation and Combination of Conditional Quantile Forecasts. *Journal of Business & Economic Statistics*, Vol. 23 (4), 416–431.
- Giacomini, R. – White, H. (2006) Tests of Conditional Predictive Ability. *Econometrica*, Vol. 74 (6), 1545–1578.

- Giot, P. – Laurent, S. (2004) Modelling daily Value-at-Risk using realized volatility and ARCH type models. *Journal of Empirical Finance*, Vol. 11 (3), 379–398.
- Glosten, L. R. – Jagannathan, R. – Runkle, D. E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, Vol. 48 (5), 1779–1801.
- Gneiting, T. (2011) Making and Evaluating Point Forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 106 (494), 746–762.
- Gumbel, E. J. (1960) Bivariate Exponential Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55 (292), 698–707.
- Halbleib, R. – Pohlmeier, W. (2012) Improving the value at risk forecasts: Theory and evidence from the financial crisis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 36 (8), 1212–1228.
- Huang, J. – Lee, K. – Liang, H. – Lin, W. (2009) Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 45 (3), 315–324.
- Huang, Y. C. – Lin, B. (2004) Value-at-Risk Analysis for Taiwan Stock Index Futures: Fat Tails and Conditional Asymmetries in Return Innovations. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 22 (2), 79–95.
- Joe, H. – Xu, J. J. (1996) *The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models*. Technical Report 166. The University of British Columbia, Vancouver.
- Jorion, P. (2001) *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 2. p. McGraw-Hill, New York, NY.
- Jouanin, J-F. – Riboulet G. – Roncalli, T. (2004) Financial Applications of Copula Functions. Teoksessa: *Risk measures for the 21<sup>st</sup> Century*, toim. G. P. Szegő, 273–301. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- J.P. Morgan (1996) *RiskMetrics Technical Document, Fourth Edition*. New York.
- Junker, M. – May, A. (2005) Measurement of aggregate risk with copulas. *The Econometrics Journal*, Vol. 8 (3), 428–454.
- Kim, G. – Silvapulle, M. J. – Silvapulle, P. (2007) Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol. 51 (6), 2836–2850.
- Kole, E. – Koedijk, K. – Verbeek, M. (2007) Selecting copulas for risk management. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 31 (8), 2405–2423.
- Komunjer, I. (2013) Quantile Prediction. Teoksessa: *Handbook of Economic Forecasting, Volume 2B*, toim. G. Elliott – A. Timmermann, 961–994. Elsevier North-Holland, Amsterdam.



- Kuester, K. – Mittnik, S. – Paolella, M. S. (2006) Value-at-risk prediction: A comparison of alternative strategies. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 4 (1), 53–89.
- Kupiec, P. H. (1995) Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, Vol. 3 (2), 73–84.
- Lai, Y. (2008) Does Asymmetric Dependence Structure Matter? A Value-at-Risk View. *International Journal of Business and Economics*, Vol. 7 (3), 249–268.
- Lambert, P. – Laurent, S. (2001) *Modelling financial time series using GARCH-type models with a skewed Student distribution for the innovations*. Discussion Paper 0125. Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve.
- Longin, F. – Solnik, B. (2001) Extreme Correlation of International Equity Markets. *Journal of Finance*, Vol. 56 (2), 649–676.
- Lopez, J. (1998) *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*. Federal Reserve Bank of New York Research Paper No. 9802.
- Malevergne, Y. – Sornette, D. (2003) Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. *Quantitative Finance*, Vol. 3 (4), 231–250.
- Malevergne, Y. – Sornette, D. (2006) *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mandelbrot, B. (1963) The Variations of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, Vol. 36 (4), 394–419.
- Manganelli, S. – Engle, R. F. (2004) A Comparison of Value-at-Risk Models in Finance. *Teoksessa: Risk measures for the 21<sup>st</sup> Century*, toim. G. P. Szegö, 123–144. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *Journal of Finance*, Vol. 7 (1), 77–91.
- McNeil, A. – Frey, R. – Embrechts, P. (2015) *Quantitative Risk management: Concepts, Techniques and Tools, revised edition*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Nelsen, R. B. (2006) *An Introduction to Copulas*. 2. p. Springer Science+Business Media Inc., New York, NY.
- Nelson, D. B. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, Vol. 59 (2), 347–370.
- Palero, H. P. – Hotta, L. K. (2006) Using Conditional Copula to Estimate Value at Risk. *Journal of Data Science*, Vol. 4, 93–115.
- Patton, A. J. (2012) A Review of Copula Models for Economic Time Series. *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 110, 4–18.
- Perignon, C. – Smith, D. R. (2010) The level and quality of Value-at-Risk disclosure by commercial banks. *Journal of Banking & Finance*, Vol. 34 (2), 362–377.

- Razak, R. A. – Ismail, N. (2016) Portfolio risks of bivariate financial returns using copula-VaR approach: A case study on Malaysia and U.S. stock markets. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 12 (3), 1947–1964.
- Santos, A. – Nogales, F. – Ruiz, E. (2013) Comparing Univariate and Multivariate Models to Forecast Portfolio Value-at-Risk. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 11 (2), 440–441.
- Sklar, A. (1959) Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, Vol. 8, 229–231.
- Skoglund, J. – Erdman, D. – Chen, W. (2010) The performance of value-at-risk models during the crisis. *The Journal of Risk Model Validation*, Vol. 4 (1), 3–21.
- Tsay, R. S. (2010) *Analysis of Financial Time Series*. 3.p. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ.
- Weiß, G. N. F. (2011) Are Copula-GoF-tests of any practical use? Empirical evidence for stocks, commodities and FX futures. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol. 51 (2), 173–188.
- Weiß, G. N. F. (2013) Copula-GARCH versus dynamic conditional correlation: an empirical study on VaR and ES forecasting accuracy. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, Vol. 41 (2), 179–202.
- White, H. (1982) Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models. *Econometrica*, Vol. 50 (1), 1–25.
- Ziegel, J. F. (2016) Coherence and elicibility. *Mathematical Finance*, Vol. 26 (4), 901–918.

## LIITTEET

### Liite 1 AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien parametriestimaatit

**Taulukko 14** Aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaikasarjoihin sovitettujen AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien parametriestimaatit ja p-arvot

Taulukossa on esitetty MSCI AC Americas-, MSCI AC Asia Pacific- ja MSCI AC Europe -indeksien aikavälin 6.3.2001–30.12.2016 tuottoaikasarjoihin sovitettujen AR(1)-EGARCH(1,1)-mallien parametriestimaatit. Parametriestimaattien p-arvot on esitetty suluissa. Mallit on estimoitu sekä normaali- että t-jakautuneisiin innovaatioihin perustuen. T-jakauman tapauksessa myös vapausaste parametri  $\nu$  on estimoitu. Parametriestimaattien keskivirheet ja siten myös p-arvot perustuvat Whiten (1982) robusteihin keskivirheisiin.

	AM		AP		EU	
	n	t	n	t	n	t
$\mu$	0,0002 (0,002)	0,0005 (< 0,001)	0,0002 (0,263)	0,0003 (0,039)	0,0003 (0,101)	0,0004 (0,016)
$\phi_1$	-0,0331 (0,003)	-0,0300 (0,018)	0,0402 (0,013)	0,0319 (0,002)	0,0020 (0,910)	0,0027 (0,844)
$\omega$	-0,1625 (< 0,001)	-0,1277 (< 0,001)	-0,2004 (< 0,001)	-0,1668 (< 0,001)	-0,1837 (< 0,001)	-0,1800 (< 0,001)
$\alpha$	-0,1281 (< 0,001)	-0,1420 (< 0,001)	-0,0859 (< 0,001)	-0,0838 (< 0,001)	-0,1023 (< 0,001)	-0,1096 (< 0,001)
$\beta$	0,9823 (< 0,001)	0,9868 (< 0,001)	0,9778 (< 0,001)	0,9820 (< 0,001)	0,9792 (< 0,001)	0,9802 (< 0,001)
$\gamma$	0,0953 (< 0,001)	0,0989 (< 0,001)	0,1419 (< 0,001)	0,1338 (< 0,001)	0,1596 (0,005)	0,1570 (< 0,001)
$\nu$	–	6,706 (< 0,001)	–	10,235 (< 0,001)	–	9,592 (< 0,001)

## Liite 2 Simulointi kopulafunktioista

Vaikka elliptisille kopulafunktioille ei ole olemassa eksplisiittistä suljetun muodon esitystä, elliptisten kopulafunktioiden mukaista riippuvuusrakennetta noudattavien tasajakautuneiden satunnaismuuttujien simulointi on kuitenkin varsin yksinkertaista, sillä menetelmässä voidaan hyödyntää multinormaalijakaumaa tai moniulotteista t-jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien simuloinnissa sovellettuja menetelmiä. Olkoon  $\mathbf{R}$  elliptisen kopulafunktion korrelaatiomatriisin estimaatti. Simuloinnin ensimmäisessä vaiheessa simuloidaan riippumattomista standardinormaaleista satunnaismuuttujista koostuva  $d$ -ulotteinen vektori  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)'$ . Seuraavassa vaiheessa muodostetaan  $d$ -ulotteinen standardoitua multinormaalijakaumaa noudattava satunnaisvektori  $\mathbf{X}$  asettamalla

$$\mathbf{X} = \mathbf{AZ},$$

missä  $\mathbf{A}$  on korrelaatiomatriisin  $\mathbf{R}$  Cholesky-hajotelma. T-kopulan tapauksessa vektori  $\mathbf{X}$  muunnetaan vielä  $d$ -ulotteista t-jakaumaa noudattavaksi vektoriksi  $\mathbf{Y}$  asettamalla

$$\mathbf{Y} = \sqrt{v/S}\mathbf{X},$$

missä  $S$  noudattaa  $\chi^2$ -jakaumaa vapausasteella  $v$ . (Cherubini ym. 2004, 181.)

Gaussin kopulan tapauksessa vektorin  $\mathbf{X}$  komponentteihin sovelletaan standardoidun normaalijakauman kertymäfunktiota, minkä tuloksena saadaan satunnaisvektori

$$\mathbf{U} = (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_d))',$$

jonka kertymäfunktio on Gaussin kopula korrelaatiomatriisilla  $\mathbf{R}$ . Vastaavasti t-kopulan tapauksessa vektorin  $\mathbf{Y}$  komponentteihin sovelletaan standardoidun t-jakauman kertymäfunktiota, jolloin saadaan satunnaisvektori

$$\mathbf{U} = (t_v(Y_1), \dots, t_v(Y_d))',$$

jonka kertymäfunktio on t-kopula korrelaatiomatriisilla  $\mathbf{R}$  ja vapausasteparametrilla  $v$ . (Cherubini ym. 2004, 181.)

Arkhimedeen kopulafunktioiden osalta simuloinnissa voidaan soveltaa ehdollistettuun kopulafunktioon perustuvaa yleistettyä simulointimenetelmää. Menetelmän perustana on satunnaisvektorin  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)'$  komponentin  $U_k$  ehdollinen jakauma. Annettuna satunnaismuuttujien  $U_1, \dots, U_{k-1}$  realisaatiot  $u_1, \dots, u_{k-1}$ , komponentin  $U_k$  ehdollinen jakauma voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) &= P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k) / \partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}}{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1}) / \partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}}, \end{aligned}$$

missä  $k = 2, \dots, d$ . Arkhimedeen kopulafunktioiden tapauksessa voidaan osoittaa, että komponentin  $U_k$  ehdollinen jakauma voidaan esittää Arkhimedeen kopulafunktion generaattorifunktion käänteisfunktion  $\Psi^{-1}$  derivaattojen avulla seuraavasti

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\Psi^{-1(k-1)}(\sum_{j=1}^k \Psi(u_j))}{\Psi^{-1(k-1)}(\sum_{j=1}^{k-1} \Psi(u_j))}.$$

Komponentin  $U_k$  ehdollisen jakauman täsmällinen muoto riippuu luonnollisesti generaattorifunktion  $\Psi$  muodosta ja näin ollen sovellettavan Arkhimedeen kopulafunktion tyy-  
pistä. (Cherubini ym. 2004, 182–183.) Esityksen perusteella on myös selvää, että sovellettavan kopulafunktion riippuvuusparametrin arvo vaikuttaa ehdollisen jakauman muotoon.

Arkhimedeen kopulafunktioiden simulointialgoritmin ensimmäisessä vaiheessa muodostetaan riippumattomista tasajakautuneista muuttujista koostuva vektori  $(v_1, \dots, v_d)'$ . Simuloitavan satunnaisvektorin  $\mathbf{U}$  ensimmäisen komponentin realisaatio  $u_1$  saadaan asettamalla  $u_1 = v_1$ . Seuraavan komponentin realisaatio  $u_2$  saadaan puolestaan ratkaistua yhtälöstä

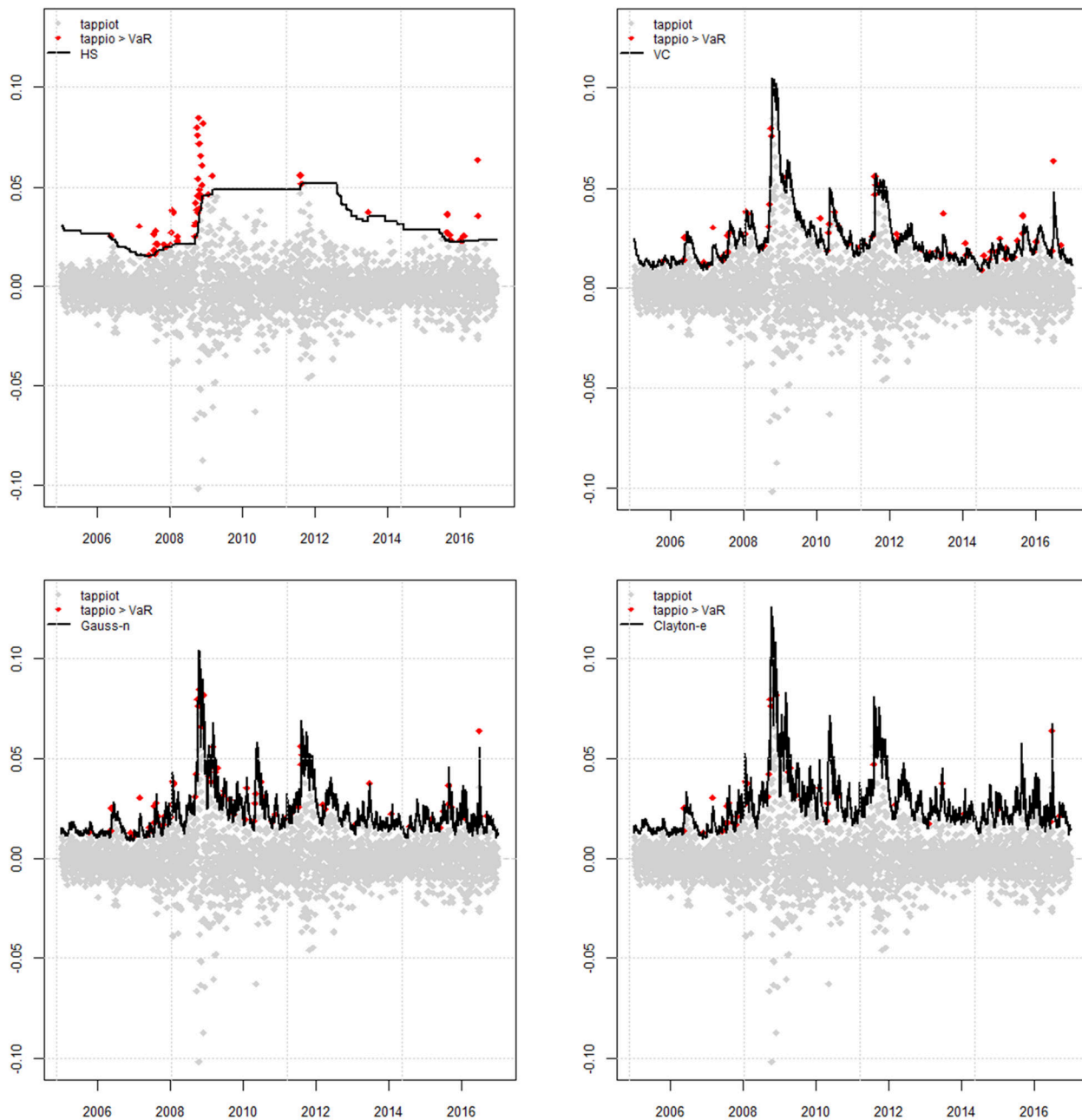
$$v_2 = C_2(u_2 | v_1) = \frac{\Psi^{-1(1)}(\Psi(v_1) + \Psi(u_2))}{\Psi^{-1(1)}(\Psi(v_1))}.$$

Vastaavaa menetelmää voidaan soveltaa rekursiivisesti myös seuraaville simuloitaville realisaatioille. Esimerkiksi realisaatio  $u_d$  saadaan ratkaistua komponentin  $U_d$  ehdollisen jakauman esitystä soveltamalla yhtälöstä

$$v_d = C_d(u_d | u_1, \dots, u_{d-1}) = \frac{\Psi^{-1(d-1)}(\sum_{j=1}^d \Psi(u_j))}{\Psi^{-1(d-1)}(\sum_{j=1}^{d-1} \Psi(u_j))}.$$

Simulointialgoritmin lopputuloksena saadaan näin ollen satunnaisvektorin  $\mathbf{U}$  simuloitujen realisaatioiden vektori  $(u_1, \dots, u_d)'$ , jonka riippuvuusrakenne määräytyy simuloinnin perustana käytetyn Arkhimedeen kopulafunktion mukaisesti. (Cherubini ym. 2004, 182–183.)

### Liite 3 Kuvioita 99 %:n VaR-malleista portfoliossa AM-EU



**Kuvio 6** HS-, VC-, Gauss-n- ja Clayton-e-mallien mukaiset 99 %:n VaR-estimaatit portfoliolle AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016

Kuvioissa on esitetty HS-, VC-, Gauss-n- ja Clayton-e-mallien 99 %:n VaR-estimaatit portfoliossa AM-EU ennustejaksolla 4.1.2005–30.12.2016. Kuvioissa on myös esitetty portfolion AM-EU toteutuneet tappiot. VaR-mitan ylittävät tappiot on korostettu punaisella.

## Liite 4 CPA-testien tulokset ensimmäisellä ja kolmannella osaperiodilla

**Taulukko 15** CPA-testien tulokset ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 4.1.2005–31.12.2007. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystynuoli tarkoittaa, että sarakkeen malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyyneen. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	FHS	Gauss-t	Gauss-e	Clayton-n	Clayton-t	Clayton-e	Gumbel-e	t-n	t-t	t-e
<b>AM-AP</b>										
HS	↑ < 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,23)	↑ 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,36)	↑ < 0,001 (99,36)	↑ < 0,001 (99,10)	↑ < 0,001 (99,10)
FHS		0,490 (100,00)	0,653 (99,10)	0,381 (0,13)	0,684 (99,49)	0,768 (99,23)	↑ 0,044 (97,95)	0,510 (99,87)	0,607 (100,00)	0,780 (99,36)
Gauss-t			0,291 (10,01)	← 0,085 (0,39)	0,428 (0,77)	0,134 (0,26)	0,603 (3,59)	0,556 (0,39)	0,682 (1,93)	0,448 (2,05)
Gauss-e				← 0,027 (0,51)	0,556 (11,17)	0,605 (7,45)	0,347 (94,99)	0,935 (0,64)	0,462 (99,61)	0,231 (99,49)
Clayton-n					0,574 (98,97)	0,624 (95,89)	↑ 0,065 (99,74)	0,175 (99,74)	0,268 (99,87)	↑ 0,063 (99,49)
Clayton-t						0,530 (47,88)	0,576 (98,97)	0,633 (70,09)	0,579 (99,23)	0,508 (99,23)
Clayton-e							0,969 (99,23)	0,727 (22,46)	0,323 (98,97)	0,496 (98,97)
Gumbel-e								0,596 (0,13)	0,590 (98,97)	0,439 (77,28)
t-n									0,613 (100,00)	0,880 (100,00)
t-t										0,176 (0,26)
<b>AM-EU</b>										
HS	↑ 0,004 (100,00)	↑ 0,003 (100,00)	↑ 0,001 (100,00)	↑ 0,002 (100,00)	↑ < 0,001 (100,00)	↑ < 0,001 (100,00)	↑ 0,007 (100,00)	↑ 0,009 (99,87)	↑ 0,003 (100,00)	↑ < 0,001 (100,00)
FHS		0,293 (99,36)	↑ 0,068 (100,00)	0,548 (99,74)	0,364 (100,00)	0,374 (99,61)	0,321 (99,74)	← 0,097 (1,28)	0,315 (99,74)	0,152 (99,87)
Gauss-t			0,288 (99,61)	0,445 (1,03)	0,550 (100,00)	0,474 (100,00)	0,401 (1,54)	0,186 (0,90)	0,592 (37,87)	0,458 (99,61)
Gauss-e				← 0,049 (0,51)	0,158 (100,00)	↑ 0,025 (98,59)	0,465 (0,00)	0,172 (0,00)	0,382 (0,26)	0,292 (98,84)
Clayton-n					0,337 (99,23)	↑ 0,013 (98,84)	0,668 (98,20)	0,447 (0,00)	0,519 (99,74)	↑ 0,067 (98,97)
Clayton-t						0,142 (99,49)	0,657 (0,00)	0,421 (0,00)	0,111 (1,16)	0,954 (0,39)
Clayton-e							0,567 (1,16)	0,380 (0,64)	← 0,010 (1,41)	← 0,014 (1,41)
Gumbel-e								← 0,065 (1,03)	0,620 (100,00)	0,519 (100,00)
t-n									0,403 (100,00)	0,217 (100,00)
t-t										0,265 (99,23)

	FHS	Gauss-t	Gauss-e	Clayton-n	Clayton-t	Clayton-e	Gumbel-e	t-n	t-t	t-e
<b>AP-EU</b>										
HS	↑ 0,002 (99,36)	↑ 0,001 (99,36)	↑ 0,001 (99,36)	↑ 0,001 (99,10)	↑ 0,002 (99,10)	↑ 0,001 (99,10)	↑ 0,001 (99,49)	↑ 0,001 (99,49)	↑ 0,001 (99,36)	↑ 0,001 (99,23)
FHS		← -0,088 (0,64)	↑ 0,023 (99,10)	↑ 0,033 (98,59)	↑ 0,007 (98,59)	↑ 0,013 (98,59)	0,154 (1,67)	0,161 (1,41)	0,559 (0,64)	↑ 0,002 (98,72)
Gauss-t			↑ 0,019 (99,10)	↑ 0,017 (98,84)	↑ 0,008 (98,72)	↑ 0,008 (98,84)	0,120 (100,00)	↑ 0,038 (99,74)	↑ 0,097 (99,36)	↑ 0,007 (98,84)
Gauss-e				0,606 (99,23)	0,110 (0,13)	↑ 0,044 (98,72)	← -0,009 (1,41)	← -0,014 (1,28)	← -0,058 (0,77)	0,356 (99,36)
Clayton-n					0,456 (0,13)	0,104 (99,10)	← -0,006 (1,54)	← -0,005 (1,54)	← -0,022 (1,03)	0,494 (1,16)
Clayton-t						0,152 (99,36)	← -0,006 (1,67)	← -0,011 (1,54)	← -0,018 (1,28)	0,114 (99,87)
Clayton-e							← -0,005 (1,54)	← -0,015 (1,54)	← -0,016 (1,16)	← -0,029 (1,28)
Gumbel-e								0,155 (98,84)	0,102 (98,59)	↑ 0,003 (98,33)
t-n									0,204 (0,39)	↑ 0,025 (98,71)
t-t										↑ 0,017 (98,97)

**Taulukko 16** CPA-testien tulokset ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016 hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille

Taulukossa on esitetty Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testien p-arvot hyväksytyille 99 %:n VaR-malleille ennustejaksolla 2.1.2012–30.12.2016. Suluissa oleva arvo kertoo, kuinka monessa prosentissa ennustejakson ajanhetkistä sarakkeessa oleva malli johtaa rivillä olevaa mallia tarkempiin VaR-estimaatteihin. Pystyynuoli tarkoittaa, että sarakkeen malli on ennustekyvyltään tilastollisesti merkitsevästi rivillä olevaa mallia parempi yli 50 %:ssa ennustejakson ajanhetkistä. Vaakanuoli viittaa rivillä olevan mallin parempaan ennustekyvyyen. Tilastollisesti merkitsevät tulokset on myös lihavoitu.

	Gauss-t	Gauss-e	Clayton-n	Clayton-t	Clayton-e	Gumbel-e	t-t	t-e
<b>AM-AP</b>								
FHS	0,571 (98,62)	0,622 (86,50)	0,434 (95,17)	0,154 (100,00)	0,259 (0,92)	0,465 (87,81)	0,541 (94,25)	0,619 (83,51)
Gauss-t		0,306 (0,92)	0,407 (21,40)	0,632 (62,58)	0,372 (1,30)	0,214 (6,98)	0,294 (0,54)	0,153 (0,23)
Gauss-e			0,339 (54,83)	0,349 (82,67)	0,437 (1,15)	0,419 (6,67)	0,387 (11,73)	0,612 (91,49)
Clayton-n				0,509 (51,23)	0,264 (1,46)	0,105 (0,69)	0,368 (58,82)	0,360 (23,85)
Clayton-t					← 0,012 (0,84)	0,387 (37,65)	0,517 (19,48)	0,334 (9,59)
Clayton-e						0,358 (98,47)	0,376 (98,70)	0,393 (98,93)
Gumbel-e							0,537 (86,43)	0,399 (56,44)
t-t								0,358 (96,86)
<b>AM-EU</b>								
FHS	0,328 (99,62)	0,263 (99,62)	↑ 0,026 (100,00)	0,872 (0,92)	← 0,015 (0,00)	↑ 0,081 (100,00)	0,282 (99,23)	0,186 (99,46)
Gauss-t		0,322 (0,84)	0,496 (99,77)	← 0,060 (0,08)	0,185 (0,00)	0,834 (99,46)	0,102 (0,61)	0,844 (0,00)
Gauss-e			↑ 0,042 (100,00)	0,638 (0,08)	← 0,005 (0,00)	0,109 (100,00)	0,349 (98,93)	0,192 (99,39)
Clayton-n				← 0,093 (0,00)	← 0,010 (0,00)	0,520 (0,23)	0,566 (0,38)	← 0,025 (0,00)
Clayton-t					0,337 (0,69)	0,155 (100,00)	0,150 (100,00)	↑ 0,053 (99,77)
Clayton-e						↑ 0,014 (100,00)	0,393 (99,62)	↑ 0,001 (100,00)
Gumbel-e							0,514 (0,61)	← 0,033 (0,00)
t-t								0,834 (0,77)



	Gauss-t	Gauss-e	Clayton-n	Clayton-t	Clayton-e	Gumbel-e	t-t	t-e
<b>AP-EU</b>								
FHS	0,612 (98,54)	0,169 (99,46)	0,620 (98,93)	0,148 (99,23)	← <b>0,010</b> <b>(0,00)</b>	0,894 (0,00)	0,364 (99,23)	0,222 (99,46)
Gauss-t		0,925 (3,30)	0,364 (99,39)	0,886 (100,00)	0,809 (0,00)	0,723 (0,00)	0,217 (99,62)	0,841 (98,70)
Gauss-e			0,584 (98,62)	0,110 (99,16)	← <b>0,006</b> <b>(0,08)</b>	0,810 (0,00)	0,572 (99,46)	0,661 (99,92)
Clayton-n				0,890 (99,69)	0,836 (1,00)	0,204 (0,77)	0,606 (98,85)	0,790 (77,15)
Clayton-t					← <b>0,011</b> <b>(0,15)</b>	0,812 (0,00)	↑ <b>0,029</b> <b>(99,92)</b>	0,161 (0,77)
Clayton-e						0,993 (1,46)	0,131 (100,00)	↑ <b>0,006</b> <b>(99,92)</b>
Gumbel-e							0,338 (99,69)	0,742 (100,00)
t-t								0,783 (0,77)

## Liite 5 VaR-mallien estimoinnissa ja arvioinnissa sovellettavan R-koodin olennaisimmat osat

```
# pakettien aktivointi, datan lataus

library(readxl)
library(rugarch)
library(copula)
library(forecast)
library(MCS)
library(GAS)

data_MSCI <- read_excel("C:/Users/Arttu/Downloads/gradu_2017/Documents/gradu/data/data_MSCI.xlsx", sheet = "Taul1")

#osakeindeksien logaritmiset päivätuotot
logret_am=diff(log(data_MSCI$AC_AM))
logret_ap=diff(log(data_MSCI$AC_AS))
logret_eu=diff(log(data_MSCI$AC_EUR))

#osaketuotoista muodostetut kaksiolotteiset aikasarjat
PF1=cbind(logret_am, logret_ap) #AM-AP
PF2=cbind(logret_am, logret_eu) #AM-EU
PF3=cbind(logret_ap, logret_eu) #AP-EU

#tarkasteltavien portfolioiden toteutuneet tappiot
real_loss_AMAP=-PF1[1001:length(PF1[,1]),]%*%rbind(0.5, 0.5)
rownames(real_loss_AMAP)=as.character(data_MSCI$Code[1002:length(data_MSCI$Code)])
real_loss_AMEU=-PF2[1001:length(PF2[,1]),]%*%rbind(0.5, 0.5)
rownames(real_loss_AMEU)=as.character(data_MSCI$Code[1002:length(data_MSCI$Code)])
real_loss_APEU=-PF3[1001:length(PF3[,1]),]%*%rbind(0.5, 0.5)
rownames(real_loss_APEU)=as.character(data_MSCI$Code[1002:length(data_MSCI$Code)])

#####

#VaR-mallien estimoinnissa sovellettavat funktiot

# funktio, joka laskee historialliseen simulointiin perustuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiolotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso

Bi_HS=function(ret_matrix, M, q){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittäykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 1)

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      loss=-x*%*%w
      VaR_est[i]=quantile(loss, probs=q)
    }

    return(VaR_est)
  }
}

# Funktio, joka laskee varianssi-kovarianssimenetelmään perustuvan VaR-estimaatin EWMA-mallin mukaisesti

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiolotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
```

```

# k = painotustekijä

Bi_VC_EWMA=function(ret_matrix, M, q, k){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 1)
    #alkuarvo varianssi-kovarianssimatriisille
    varcov=cov(ret_matrix[(1001-M):1000,])

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      varcov=(1-k)*x[M,]%*%t(x[M,])+k*varcov
      VaR_est[i]=sqrt((t(w)%*%varcov%*%w))*qdist(distribution = "norm", p=q, mu=0, sigma=1)
    }

    return(VaR_est)
  }
}

# Funktio, joka laskee FHS-malliin perustuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso

Bi_FHS_n=function(ret_matrix, M, q){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin sekä EGARCH-mallien estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 3)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      nrsim=length(Z[,1])

      #muunna standardoidut jäännökset simuloituiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiliiteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))
      D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

      R=mu+D*Z
      #muodosta portfolion simuloitua tappiota
      loss=-R%*%w

```

```

#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# Kopulamallit

# Gaussin kopulaan perustuvien mallien osalta esitetään kaikki eri reunajakaumaspesifikaatiot
# Muiden kopulamallien osalta esitetään vain normaaleihin reunajakaumiin perustuvat mallit, sillä
# muihin reunajakaumiin perustuvat mallit voidaan estimoida vastaavalla tavalla kuin Gaussin kopulan
# tapauksessa

# funktio, joka laskee Gauss-n-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_ga_EGARCH_n=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelyt
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))
    mycop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = 0.5)

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametristimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 5)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoi kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=cor(x[,1], x[,2], method = "pearson")
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, method="mpl", start=alku)
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      est_cop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = fit_cop@estimate[1])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloidut havainnot standardoiduiksi jäännöksiksi
      sim_Z=qdist(distribution = "norm", p=sim_U, mu=0, sigma=1)
      #muunna standardoidut jäännökset simuloiduiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiliteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))

```

```

D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

R=mu+D*sim_Z
#muodosta portfolion simuloitua tappiota
loss=-R%*%w
#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# funktio, joka laskee Gauss-t-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_ga_EGARCH_t=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-11, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-12)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)), distribution.model = "std")
    mycop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = 0.5)

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametriestimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 5)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl,
                              fit.control = list(stationarity=0,scale=1))
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl,
                              fit.control = list(stationarity=0,scale=1))
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoi kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=cor(x[,1], x[,2], method = "pearson")
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, method="mpl", start=alku)
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      est_cop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = fit_cop@estimate[1])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloitua havainnot standardoiduiksi jäännöksiksi
      sim_Z=cbind(qdist(distribution = "std", p=sim_U[,1], mu=0, sigma = 1, shape = fit_egarch_1@fit$coef[7]),
                  qdist(distribution = "std", p=sim_U[,2], mu=0, sigma = 1, shape = fit_egarch_2@fit$coef[7]))
      #muunna standardoidut jäännökset simuloituiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiliiteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))

```

```

D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

R=mu+D*sim_Z
#muodosta portfolion simuloitua tappiota
loss=-R%*%w
#estimoiva VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# funktio, joka laskee Gauss-e-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_ga_EGARCH_emp=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittäykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))
    mycop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = 0.5)

    #tulostamiseksi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametriestimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 5)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoiva AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoiva kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=cor(x[,1], x[,2], method = "pearson")
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, method="mpl", start=alku)
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      est_cop=ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un", param = fit_cop@estimate[1])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloitua havainnot standardoiduiksi jäännöksiksi
      sim_Z=cbind(as.numeric(quantile(x=Z[,1], probs=sim_U[,1])),
        as.numeric(quantile(x=Z[,2], probs=sim_U[,2])))
      #muunna standardoidut jäännökset simuloitua tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))
      D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

```

```

R=mu+D*sim_Z
#muodosta portfolion simuloitua tappiota
loss=-R%*%w
#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# funktio, joka laskee Clayton-n-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_cl_EGARCH_n=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelyt
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))
    mycop=archmCopula(family = "clayton", dim=2, param = 2)

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametriestimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 5)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoi kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=(2*cor(x[,1], x[,2], method = "kendall"))/(1-cor(x[,1], x[,2], method = "kendall"))
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, lower=0.001, upper=100, method="mpl", start=alku, optim.method="Brent")
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      est_cop=archmCopula(family = "clayton", dim=2, param = fit_cop@estimate[1])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloitua havainnot standardoiduiksi jäännöksiksi
      sim_Z=qdist(distribution = "norm", p=sim_U, mu=0, sigma=1)
      #muunna standardoidut jäännökset simuloituiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiliiteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))
      D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

      R=mu+D*sim_Z

```

```

#muodosta portfolion simuloitua tappiota
loss=-R%*%w
#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# funktio, joka laskee Gumbel-n-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_gu_EGARCH_n=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))
    mycop=archmCopula(family = "gumbel", dim=2, param = 1.5)

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametriestimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 5)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoi kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=1/(1-corr(x[,1], x[,2], method = "kendall"))
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, lower=1, upper=100, method="mpl", start=alku, optim.method="Brent")
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      est_cop=archmCopula(family = "gumbel", dim=2, param = fit_cop@estimate[1])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloitua havainnot standardoiduiksi jäännöksiksi
      sim_Z=qdist(distribution = "norm", p=sim_U, mu=0, sigma=1)
      #muunna standardoidut jäännökset simuloituiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatiteettiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORspec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))
      D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

      R=mu+D*sim_Z
      #muodosta simuloitua tappiota
      loss=-R%*%w

```



```

#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

# funktio, joka laskee t-n-malliin pohjautuvan VaR-estimaatin liukuvaa estimointi-ikkunaa soveltaen

# ret_matrix = tuottomatriisi (kaksiulotteinen aikasarja)
# M = estimointi-ikkunan pituus (päiviä)
# q = luottamustaso
# nrsim = simulointien lukumäärä

Bi_MC_t_EGARCH_n=function(ret_matrix, M, q, nrsim){
  if(M>1000){
    print("M must be <= 1000")
  }else{
    #määrittelykset
    w=rbind(0.5, 0.5)
    N_estimates=length(ret_matrix[,1])-1000
    ctrl = list(RHO = 1, DELTA = 1e-08, MAJIT = 100, MINIT = 650, TOL = 1e-06)
    spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
                      mean.model = list(armaOrder = c(1, 0)))
    mycop=ellipCopula(family = "t", dim = 2, dispstr = "un", param = 0.5, df=4)

    #tulomatriisi
    #kukin rivi sisältää VaR-estimaatin, EGARCH-mallien ja kopulafunktioiden estimointialgoritmin
    #konvergoitumisesta kertovat koodit sekä kopulafunktion parametristimaatit
    VaR_est=matrix(data = NA, nrow = N_estimates, ncol = 6)
    colnames(VaR_est)=c(paste("VaR", q*100, "%"), "conv_garch_1", "conv_garch_2", "conv_copula", "copula_par1", "copula_par2")

    for (i in 1:N_estimates){
      x=ret_matrix[(1000+i-M):(999+i),]
      #estimoi AR(1)-EGARCH(1,1)-mallit
      fit_egarch_1 = ugarchfit(data = x[,1], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      fit_egarch_2 = ugarchfit(data = x[,2], spec = spec, solver = "hybrid", solver.control = ctrl)
      VaR_est[i,2]=fit_egarch_1@fit$convergence
      VaR_est[i,3]=fit_egarch_2@fit$convergence

      #muodosta standardoidut jäännökset ja pseudohavainnot
      z1=as.numeric(residuals(fit_egarch_1, standardize=T))
      z2=as.numeric(residuals(fit_egarch_2, standardize=T))
      Z=cbind(z1,z2)
      U=pobs(Z)

      #estimoi kopulafunktio pseudohavainnoista CML-menetelmällä
      alku=cor(x[,1], x[,2], method = "pearson")
      fit_cop=fitCopula(data=U, copula = mycop, method="mpl", start=c(alku, 20))
      VaR_est[i,4]=fit_cop@fitting.stats$convergence
      VaR_est[i,5]=fit_cop@estimate[1]
      VaR_est[i,6]=fit_cop@estimate[2]
      est_cop=ellipCopula(family = "t", dim = 2, dispstr = "un", param = fit_cop@estimate[1], df=fit_cop@estimate[2])

      #simuloi 'nrsim' havaintoa estimoidusta kopulafunktiosta
      sim_U=rCopula(n=nrsim, copula = est_cop)
      #muunna simuloidut havainnot std. jäännöksiksi
      sim_Z=qdist(distribution = "norm", p=sim_U, mu=0, sigma=1)
      #muunna standardoidut jäännökset simuloiduiksi tuotoiksi
      #yhden periodin odotusarvo- ja volatilitiennusteiden avulla
      for_egarch_1=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_1, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      for_egarch_2=ugarchforecast(fitORSpec = fit_egarch_2, n.ahead = 1, n.roll = 0)
      mu=cbind(rep(fitted(for_egarch_1), nrsim),rep(fitted(for_egarch_2), nrsim))
      D=cbind(rep(sigma(for_egarch_1), nrsim),rep(sigma(for_egarch_2), nrsim))

      R=mu+D*sim_Z
      #muodosta portfolion simuloidut tappiot
      loss=-R%*%w

```

```

#estimoi VaR luottamustasolla q
VaR_est[i,1]=quantile(loss, probs=q)
}

return(VaR_est)
}
}

#####

#Toteumatestuksessa ja mallien arvioinnissa sovellettavat funktiot

#Toteumatestit

#q=VaR-mallien luottamustaso
#loss=portfolion toteutuneet tappiot
#var_estimate=VaR-estimaateista muodostettu matriisi (kunkin VaR-mallin estimaatit sarakkeissa)

VAR_UC_CC=function(q, loss, var_estimate){
  results=matrix(data=NA, ncol = 8, nrow =15)
  colnames(results)=c("expected", "actual", "UC_LR", "UC_p", "Decision", "CC_LR", "CC_p", "Decision")
  rownames(results)=c("HS", "VC", "FHS", "Gauss_EGARCH_n", "Gauss_EGARCH_t", "Gauss_EGARCH_emp",
    "Clayton_EGARCH_n", "Clayton_EGARCH_t", "Clayton_EGARCH_emp", "Gumbel_EGARCH_n",
    "Gumbel_EGARCH_t", "Gumbel_EGARCH_emp", "t_EGARCH_n", "t_EGARCH_t", "t_EGARCH_emp")

  for (i in 1:15){
    backtest=VaRTTest(alpha = (1-q), actual = -as.numeric(loss), VaR = -as.numeric(var_estimate[,i]), conf.level = 0.95)

    #odotettu ylitysmäärä, toteutuneet ylitykset
    results[i,1]=backtest$expected.exceed
    results[i,2]=backtest$actual.exceed

    #Kupiec'in (1995) ehdollistamattoman kattavuuden (UC) testi
    results[i,3]=backtest$uc.LRstat
    results[i,4]=backtest$uc.LRp
    results[i,5]=backtest$uc.Decision
  }
  for (i in 1:15){
    #Christoffersenin (1998) ehdollisen kattavuuden (CC) testi
    backtest=BacktestVaR(alpha = (1-q), data = -as.numeric(loss), VaR = -as.numeric(var_estimate[,i]))
    results[i,6]=backtest$LRcc[1]
    results[i,7]=backtest$LRcc[2]
    results[i,8]=ifelse(backtest$LRcc[2]<0.05, "Reject H0", "Fail to reject H0")
  }

  return(results)
}

# Giacominin ja Whiten (2006) CPA-testi

# H0: Mallien ehdollisissa ennustekyvyyssä ei tilastollisesti merkitsevää eroa
# loss=realisoituneet tappiot
# var_model1=mallin 1 VaR-estimaatit
# var_model2=mallin 2 VaR-estimaatit
# q=VaR-mallien luottamustaso

GW_test=function(q, loss, var_model1, var_model2){

  #asymmetristen tappiofunktioiden arvojen laskenta
  loss1=as.numeric(LossVaR(realized = -as.numeric(loss), evaluated = -as.numeric(var_model1),
    which = "asymmetricLoss", type = "normal", tau = (1-q)))
  loss2=as.numeric(LossVaR(realized = -as.numeric(loss), evaluated = -as.numeric(var_model2),
    which = "asymmetricLoss", type = "normal", tau = (1-q)))

  erotus1=loss1-loss2
  n=length(erotus1)-1
  decision=c("model1", "model2", "Diff. insign.")

  #testifunktio
  h=cbind(rep(1, n), erotus1[1:n])

```

```

erotus=erotus1[2:(n+1)]
Z=(h*erotus)
m_Z=rbind(mean(Z[1,]), mean(Z[2,]))
cov_Z=(1/n)*Z%*%t(Z)

#testisuureen arvon ja p-arvon laskenta
teststat=n*t(m_Z)%*%solve(cov_Z)%*%m_Z
pval=1-pchisq(q=abs(teststat), df=2, lower.tail = TRUE)

#muodosta regression 'erotus~0+h' avulla päätössääntö:
#jos sovite>0, valitse malli 2,
#laske kuinka monta % ajasta malli 2 on parempi
reg=lm(erotus~0 + h)
prop_model2_out=(1/n)*sum(reg$fitted.values>0)*100

#päättös
if(pval>0.1){
  decision=decision[3]
}else if(prop_model2_out>50){
  decision=decision[2]
}else{
  decision=decision[1]
}

results=list(T=teststat, p=pval, prop2=prop_model2_out, dec=decision)
return(results)
}

# funktio, joka laskee CPA-testit kullekin tarkasteltavalle malliparille

# alpha=VaR-mallien luottamustaso
# loss_series=realisoituneet tappiot
# var_estimates=VaR-estimaateista muodostettu matriisi (kunkin VaR-mallin estimaatit sarakkeissa)

GW_collect=function(alpha, loss_series, var_estimates){
  gw_stat=matrix(data = NA, nrow = length(var_estimates[1,]), ncol = length(var_estimates[1,]))
  gw_p=matrix(data = NA, nrow = length(var_estimates[1,]), ncol = length(var_estimates[1,]))
  gw_prop=matrix(data = NA, nrow = length(var_estimates[1,]), ncol = length(var_estimates[1,]))
  gw_dec=matrix(data = NA, nrow = length(var_estimates[1,]), ncol = length(var_estimates[1,]))
  colnames(gw_stat)=colnames(var_estimates)
  rownames(gw_stat)=colnames(var_estimates)
  colnames(gw_p)=colnames(var_estimates)
  rownames(gw_p)=colnames(var_estimates)
  colnames(gw_prop)=colnames(var_estimates)
  rownames(gw_prop)=colnames(var_estimates)
  colnames(gw_dec)=colnames(var_estimates)
  rownames(gw_dec)=colnames(var_estimates)

  for (i in 1:(length(var_estimates[1,])-1)){
    for (j in (i+1):length(var_estimates[1,])){
      gw=GW_test(q=alpha, loss = loss_series, var_model1 = var_estimates[,i], var_model2 = var_estimates[,j])
      gw_stat[i,j]=gw$T
      gw_p[i,j]=gw$p
      gw_prop[i,j]=gw$prop2
      gw_dec[i,j]=gw$dec
    }
  }

  results=list(teststats=gw_stat, pvals=gw_p, prop_model2=gw_prop, decisions=gw_dec)
  return(results)
}

# funktio, joka laskee CPA-testit eripituisiin estimointi-ikkunoihin perustuville malleille

# alpha=VaR-mallien luottamustaso
# loss_series=realisoituneet tappiot
# var_estimates500=500 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista
# VaR-estimaateista muodostettu matriisi (kunkin VaR-mallin estimaatit sarakkeissa)
# var_estimates1000=1000 havainnon estimointi-ikkunaan perustuvista
# VaR-estimaateista muodostettu matriisi (kunkin VaR-mallin estimaatit sarakkeissa)

```

```

GW_window_length=function(alpha, loss_series, var_estimates500, var_estimates1000){
  gw_stat=matrix(data = NA, nrow = 1, ncol = length(var_estimates500[1,]))
  gw_p=matrix(data = NA, nrow = 1, ncol = length(var_estimates500[1,]))
  gw_prop=matrix(data = NA, nrow = 1, ncol = length(var_estimates500[1,]))
  gw_dec=matrix(data = NA, nrow = 1, ncol = length(var_estimates500[1,]))
  colnames(gw_stat)=colnames(var_estimates500)
  rownames(gw_stat)="500"
  colnames(gw_p)=colnames(var_estimates500)
  rownames(gw_p)="500"
  colnames(gw_prop)=colnames(var_estimates500)
  rownames(gw_prop)="500"
  colnames(gw_dec)=colnames(var_estimates500)
  rownames(gw_dec)="500"

  for (i in 1:length(var_estimates500[1,])){
    gw=GW_test(q=alpha, loss = loss_series, var_model1 = var_estimates500[i], var_model2 = var_estimates1000[i])
    gw_stat[1,i]=gw$T
    gw_p[1,i]=gw$p
    gw_prop[1,i]=gw$prop2
    gw_dec[1,i]=gw$dec
  }

  results=list(teststats=gw_stat, pvals=gw_p, prop_model2=gw_prop, decisions=gw_dec)
  return(results)
}

#####
#Koko tarkastelujakson VaR-estimaatit eri menetelmillä
#Esimerkinä M=1000, q=0.99, nrsim=10000 ja portfolio AM-AP

#AM-AP (=PF1)
AMAP_var_hs_99=Bi_HS(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99)
AMAP_var_vc_99=Bi_VC_EWMA(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, k=0.94)
AMAP_var_fhs_99=Bi_FHS_n(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99)
AMAP_var_gauss_egarch_n_99=Bi_MC_ga_EGARCH_n(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_gauss_egarch_t_99=Bi_MC_ga_EGARCH_t(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_gauss_egarch_emp_99=Bi_MC_ga_EGARCH_emp(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_clayton_egarch_n_99=Bi_MC_cl_EGARCH_n(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_clayton_egarch_t_99=Bi_MC_cl_EGARCH_t(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_clayton_egarch_emp_99=Bi_MC_cl_EGARCH_emp(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_gumbel_egarch_n_99=Bi_MC_gu_EGARCH_n(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_gumbel_egarch_t_99=Bi_MC_gu_EGARCH_t(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_gumbel_egarch_emp_99=Bi_MC_gu_EGARCH_emp(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_t_egarch_n_99=Bi_MC_t_EGARCH_n(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_t_egarch_t_99=Bi_MC_t_EGARCH_t(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)
AMAP_var_t_egarch_emp_99=Bi_MC_t_EGARCH_emp(ret_matrix = PF1, M=1000, q=0.99, nrsim = 10000)

#Eri menetelmillä estimoitujen VaR-estimaattien koonti matriisiin kunkin portfolion osalta
estimates_99_AMAP=cbind(AMAP_var_hs_99[1], AMAP_var_vc_99[1], AMAP_var_fhs_99[1],
  AMAP_var_gauss_egarch_n_99[1], AMAP_var_gauss_egarch_t_99[1],
  AMAP_var_gauss_egarch_emp_99[1], AMAP_var_clayton_egarch_n_99[1],
  AMAP_var_clayton_egarch_t_99[1], AMAP_var_clayton_egarch_emp_99[1],
  AMAP_var_gumbel_egarch_n_99[1], AMAP_var_gumbel_egarch_t_99[1],
  AMAP_var_gumbel_egarch_emp_99[1], AMAP_var_t_egarch_n_99[1],
  AMAP_var_t_egarch_t_99[1], AMAP_var_t_egarch_emp_99[1])
colnames(estimates_99_AMAP)=c("HS", "VC", "FHS", "Gauss_EGARCH_n", "Gauss_EGARCH_t",
  "Gauss_EGARCH_emp", "Clayton_EGARCH_n", "Clayton_EGARCH_t",
  "Clayton_EGARCH_emp", "Gumbel_EGARCH_n", "Gumbel_EGARCH_t",
  "Gumbel_EGARCH_emp", "t_EGARCH_n", "t_EGARCH_t", "t_EGARCH_emp")
rownames(estimates_99_AMAP)=as.character(data_MSCI$Code[1002:length(data_MSCI$Code)])

#####
#Toteumatestien ja CPA-testien tulokset koko ennustejaksolla
#Esimerkinä M=1000, q=0.99 ja portfolio AM-AP

#UC + CC
backtest_AMAP_99=VAR_UC_CC(q=0.99, loss = real_loss_AMAP, var_estimate = estimates_99_AMAP)

```

```

#CPA-testit kullekin malliparille
GW_99_AMAP=GW_collect(alpha = 0.99, loss_series = real_loss_AMAP, var_estimates = estimates_99_AMAP)

#####
#Toteumatestien ja CPA-testien tulokset 2. osaperiodilla
#Esimerkkinä M=1000, q=0.99 ja portfolio AM-AP

#UC + CC
osa2_backtest_AMAP_99=VAR_UC_CC(q=0.99, loss = real_loss_AMAP[781:1824,], var_estimate = estimates_99_AMAP[781:1824,])

#CPA-testit kullekin malliparille
osa2_GW_99_AMAP=GW_collect(alpha = 0.99, loss_series = real_loss_AMAP[781:1824,], var_estimates = estimates_99_AMAP[781:1824,])

#####

#500 ja 1000 havainnon estimointi-ikkunoihin perustuvien menetelmien vertailu CPA-testeillä (pl. VC-malli)
#Esimerkkinä q=0.99 ja portfolio AM-AP

GW_99_e500_vs_e1000_AMAP=GW_window_length(alpha = 0.99, loss_series = real_loss_AMAP,
var_estimates500 = e500_estimates_99_AMAP[-2], var_estimates1000 = estimates_99_AMAP[-2])

```