LOKAALI IDENTIFIOINTI GRAAFEISSA

Pyry Herva

Pro gradu -tutkielma
Helmikuu 2020

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

HERVA, PYRY: Lokaali identifiointi graafeissa
Pro gradu -tutkielma, 50 s.
Matematiikka
Helmikuu 2020

Tässä tutkielmassa esitellään kaksi uutta peittokoodien luokkaa – lokaalisti identifioivat koodit ja lokaalisti paikallistavat-dominoivat koodit – ja todistetaan näihin liittyviä tuloksia eri graafeissa. Tuloksia verrataan vastaaviin tunnettuihin tuloksiin koskien identifioivia ja paikallistavia-dominoivia koodeja. Myös vertailua peittokoodeihin tehdään.

Tutkielma alkaa lyhyellä johdannolla aiheeseen, jonka jälkeen esitellään suurin osa tarvittavista käsitteistä ja määritelmistä toisessa luvussa. Kolmannessa luvussa tutkitaan lyhyesti lokaalisti identifioivia koodeja poluissa ja sykleissä sekä erityisesti niiden suhdetta identifioiviin koodeihin samaisissa graafeissa. Luvussa neljä tarkastellaan identifiointia binäärisissä hyperkuutioissa ja todistetaan tuloksia lokaalisti 1-identifioiville koodeille näissä graafeissa. Viimeisessä luvussa siirrytään joihinkin äärrettömiin hiloihin, joissa tutkitaan lokaalisti 1-identifioivia ja lokaalisti 1-paikallistavia-dominoivia koodeja.

Asiasanat: peittokoodit, identifioivat koodit, paikallistavat-dominoivat koodit, lokaalisti identifioivat koodit, lokaalisti paikallistavat-dominoivat koodit.

Sisältö

1 Johdanto

Sanotaan, että epätyhjä osajoukko C graafin G pisteitä on *r-peittokoodi* (*r-covering code*), jos jokaisen graafin G pisteen etäisyys lähimmästä osajoukon C pisteestä on korkeintaan r. Jos lisäksi jokaiselle graafin G pisteelle u pätee, että ne osajoukon C pisteet, jotka ovat enintään etäisyydellä r pisteestä u, muodostavat yksikäsitteisen joukon, sanotaan, että C on *r-identifioiva koodi*. Jos tämä ehto pätee kaikille graafin G pisteille, jotka eivät ole koodin C pisteitä, sanotaan, että C on *r-paikallistava-dominoiva koodi* (*r-locating-dominating code*). Identifioivan koodin käsitteen esittelivät Karpovsky, Chakrabarty ja Levitin artikkelissa [24]. Paikallistavan-dominoivan koodin käsitteen esitteli puolestaan Slater huomattavasti aikaisemmin artikkeleissa [11, 27]. Näitä koodeja on tutkittu laajasti lukuisissa graafeissa eri peittosäteen r arvoilla vuosien saatossa niiden esittelystä lähtien. Kattava luettelo aiheeseen liittyvästä kirjallisuudesta löytyy nettisivulta [25].

Identifioivia koodeja voidaan soveltaa viallisten prosessorien paikantamisessa multiprosessoriverkossa, kun oletetaan, että korkeintaan yksi prosessoreista on viallinen. Tällöin jokaisen graafin pisteen ajatellaan vastaavan jotakin prosessoria ja graafin viivat kuvaavat prosessorien välisiä yhteyksiä. Olkoon G graafi ja C epätyhjä osajoukko sen pisteitä eli koodi graafissa G. Jokainen koodin C piste tarkistaa kaikki siitä korkeintaan etäisyydellä r olevat pisteet ja lähettää viestin 1, jos jokin niistä on viallinen. Muussa tapauksessa se lähettää viestin 0. Jos C on r-peittokoodi, jokainen graafin G piste tulee käytyä läpi vähintään kerran. Jos lisäksi C on r-identifioiva koodi, niin ne koodin C pisteet, jotka ilmoittivat viallisesta pisteestä, määräävät yksikäsitteisen graafin G pisteen ja näin viallinen prosessori saadaan paikannettua. Jos tässä C on vain r-paikallistava-dominoiva koodi, tilanne on muuten samanlainen, mutta lisäksi jokaisen koodin C pisteen on tarkastettava erikseen itsensä ja lähetettävä viesti 2, jos kyseinen piste on itse viallinen. Muita sovellutuksia ovat esimerkiksi erilaiset palo- ja varashälytysjärjestelmät.

Tässä tutkielmassa esitellään kaksi uutta peittokoodien luokkaa ja tutkitaan niitä joissakin graafeissa. Sanotaan, että r-peittokoodi C graafissa G on *lokaalisti r-identifioiva koodi*, jos graafin G pisteistä u ja v korkeintaan etäisyydellä r olevat koodin C pisteet muodostavat eri joukot aina kun u ja v ovat naapureita. Sanotaan, että r-peittokoodi C graafissa G on *lokaalisti r-paikallistava-dominoiva koodi*, jos graafin G pisteistä u ja v, jotka eivät ole koodin C pisteitä, korkeintaan etäisyydellä r olevat koodin C pisteet muodostavat eri joukot aina kun u ja v ovat naapureita. Näin ollen jokainen r-identifioiva koodi on lokaalisti r-identifioiva koodi ja jokainen r-paikallistava-dominoiva koodi on lokaalisti r-paikallistava-dominoiva koodi. Näiden koodien väliset suhteet eri graafeissa vaihtelevat ja osoittautuukin, että joissakin graafeissa lokaalisti r-identifioivien ja r-identifioivien koodien luokat ovat samat. Osoittautuu myös, että joskus 1-peittokoodien ja lokaalisti 1-paikallistavien-dominoivien koodien luokat ovat samat. Tässä työssä tutkitaan näitä uusia koodiluokkia *poluissa* ja *sykleissä*, *binäärisessä hyperkuutiossa* sekä *äärettömissä hiloissa* lähinnä kun $r = 1$. Saatuja tuloksia vertaillaan vastaaviin tunnettuihin tuloksiin.

2 Perusteet

Tässä työssä tarkasteltavat graafit ovat yksinkertaisia, yhtenäisiä ja suuntaamattomia. Graafin $G = (V_G, E_G)$ pistejoukko on $V_G \neq \emptyset$ ja viivajoukko on $E_G \subseteq \{H \subseteq V_G \mid |H| = 2\}$. Jos graafin G pistejoukko V_G on äärellinen joukko, graafia G sanotaan *äärelliseksi graafiksi*. Jos V_G on ääretön joukko, graafia G sanotaan *äärettömäksi graafiksi*. Graafi on *triviaali*, jos se sisältää vain yhden pisteen ja *epätriviaali* muussa tapauksessa. Kahden graafin $G = (V_G, E_G)$ ja $G' = (V_{G'}, E_{G'})$ sanotaan olevan isomorfiset, jos on sellainen bijektio

$$\alpha\colon V_G \to V_{G'},$$

että $\{u, v\} \in E_G$, jos ja vain jos $\{\alpha(u), \alpha(v)\} \in E_{G'}$. Käytetään merkintää

$$u \longrightarrow v$$

pisteiden $u \in V_G$ ja $v \in V_G$ välisestä *polusta*. Pisteiden u ja v (*graafinen*) *etäisyys* $d_G(u, v) = d(u, v)$ on jonkin lyhimmän niitä yhdistävän polun viivojen lukumäärä. Pisteen etäisyys itsestään on 0. Määritellään r-säteinen u-keskinen pallo joukkona

$$B_r(u) = \{v \in V_G \mid d(v, u) \leq r\}.$$

Sanotaan, että u ja v *r-peittävät* toisensa jos $d(u, v) \leq r$ eli jos $u \in B_r(v)$ ja $v \in B_r(u)$. Lisäksi sanotaan, että osajoukko $S \subseteq V_G$ r-peittää pisteen u, jos u on r-peitetty jollain joukon S pisteellä. Jos $d(u, v) = 1$ eli jos pisteitä $u, v \in V_G$ yhdistää viiva, niin pisteet u ja v ovat *naapureita*. Pisteen u *suljettu naapurusto* on joukko $N[u] = B_1(u)$ ja *avoin naapurusto* on joukko $N(u) = N[u] \setminus \{u\}$.

Epätyhjää osajoukkoa C graafin $G = (V_G, E_G)$ pisteitä sanotaan *koodiksi* (graafissa G). Koodin pisteitä sanotaan *koodisanoiksi*. Joukon $V_G \setminus C$ pisteitä sanotaan *ei-koodisanoiksi*. Koodi C on *r-peittokoodi* eli *r-dominoiva joukko*, jos C r-peittää jokaisen graafin G pisteen eli jos

$$I_{C,r}(u) = B_r(u) \cap C \neq \emptyset$$

kaikilla $u \in V_G$.

2.1 Identifioivat ja paikallistavat-dominoivat koodit

Määritelmä 2.1. Epätyhjä osajoukko C graafin $G = (V_G, E_G)$ pisteitä on *r-identifioiva koodi* (graafissa G), jos joukot

$$I_{C,r}(u) = B_r(u) \cap C$$

ovat epätyhjiä kaikilla $u \in V_G$ ja

$$I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v),$$

kun $u, v \in V_G$ ja $u \neq v$. Sanotaan, että graafi $G = (V_G, E_G)$ on *r-identifioituva* graafi, jos on sellainen $C \subseteq V_G$, että C on r-identifioiva koodi.

Joukkoja $I_{C,r}(u)$ sanotaan yleisesti *r-identifiointijoukoiksi* tai lyhyesti *I-joukoiksi* ja ne on järkevä määritellä vaikkei koodi C olisi edes r-peittokoodi. Silloinhan jotkin näistä joukoista olisivat vain tyhjiä. Sanotaan, että pisteet $u, v \in V_G$ *r-erottuvat* koodin C suhteen tai että C *r-erottaa* pisteet u ja v, jos $I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v)$. Erityisesti siis r-identifioiva koodi graafissa G r-peittää jokaisen graafin G pisteen ja r-erottaa jokaisen parin graafin G pisteitä.

Huomautus 2.2. Ekvivalentisti koodi $C \subseteq V_G$ on r-identifioiva, jos joukot $I_{C,r}(u)$ ovat epätyhjiä kaikilla $u \in V_G$ ja symmetrinen erotus

$$I_{C,r}(u) \triangle I_{C,r}(v) = \big(I_{C,r}(u) \setminus I_{C,r}(v)\big) \cup \big(I_{C,r}(v) \setminus I_{C,r}(u)\big)$$

on epätyhjä aina kun $u \neq v$.

Esimerkki 2.3. Olkoon $G = (V_G, E_G)$ ja oletetaan, että G on epätriviaali. Oletetaan, että $r \geq 0$ ja $B_r(u) \neq B_r(v)$ kaikilla $u, v \in V_G, u \neq v$. Tällöin $C = V_G$ on r-identifioiva koodi graafissa G, sillä $I_{C,r}(u) \neq \emptyset$ kaikilla $u \in V_G$ ja $I_{C,r}(u) = B_r(u) \neq B_r(v) = I_{C,r}(v)$ kaikilla $u, v \in V_G, u \neq v$.

Oletetaan, sitten, että $C \subseteq V_G$ on r-identifioiva koodi graafissa G. Jos olisi sellaiset $u, v \in V_G, u \neq v$, että $B_r(u) = B_r(v)$, niin tällöin olisi myös $I_{C,r}(u) = I_{C,r}(v)$, mikä olisi ristiriita sen oletuksen kanssa, että C on r-identifioiva koodi.

Siis graafi $G = (V_G, E_G)$ on r-identifioituva, jos ja vain jos $B_r(u) \neq B_r(v)$ kaikilla $u, v \in V_G, u \neq v$.

Vaatimalla, että koodi erottaa vain ei-koodisanat toisistaan, saadaan heikompi versio identifioivista koodeista.

Määritelmä 2.4. Epätyhjä osajoukko C graafin $G = (V_G, E_G)$ pisteitä on *r-paikallistava-dominoiva koodi* (graafissa G), jos

$$I_{C,r}(u) \neq \emptyset$$

kaikilla $u \in V_G$ ja

$$I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v),$$

kun $u, v \in V_G \setminus C$ ja $u \neq v$.

Esimerkki 2.5. Koodi $C = V_G$ on r-paikallistava-dominoiva koodi graafissa $G = (V_G, E_G)$. Näin ollen graafeissa, jotka eivät ole r-identifioituvia, voidaan kuitenkin tutkia r-paikallistavia-dominoivia koodeja, sillä tällaisia on aina olemassa.

Olkoon $G = (V_G, E_G)$ äärellinen graafi. Jos G on r-identifioituva, käytetään pienimmän r-identifioivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_r^{ID}(G)$. Vastaavasti käytetään pienimmän r-paikallistavan-dominoivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_r^{LD}(G)$. Sanotaan, että r-identifioiva koodi $C \subseteq V_G$ on *optimaalinen*, jos $|C| = M_r^{ID}(G)$. Vastaavasti r-paikallistava-dominoiva koodi $C' \subseteq V_G$ on optimaalinen, jos $|C'| = M_r^{LD}(G)$

2.2 Lokaalisti identifioivat ja lokaalisti paikallistavat-dominoivat koodit

Esitellään nyt kaksi uutta peittokoodien luokkaa.

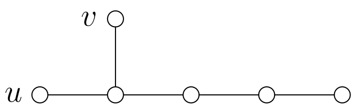
Määritelmä 2.6. Epätyhjä osajoukko C graafin $G = (V_G, E_G)$ pisteitä on *lokaalisti r-identifioiva koodi* (graafissa G), jos

$$I_{C,r}(u) \neq \emptyset$$

kaikilla $u \in V_G$ ja

$$I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v),$$

kun $u, v \in V_G$ ovat naapureita. Sanotaan, että graafi $G = (V_G, E_G)$ on *lokaalisti r-identifioituva* graafi, jos on sellainen $C \subseteq V_G$, että C on lokaalisti r-identifioiva koodi.



Kuva 1: Graafi, joka on lokaalisti 2-identifioituva mutta ei 2-identifioituva.

Esimerkki 2.7. Vastaavaan tapaan kuten esimerkissä 2.3 todetaan, että graafi $G = (V_G, E_G)$ on lokaalisti r-identifioituva, jos ja vain jos $B_r(u) \neq B_r(v)$ aina kun $u \in V_G$ ja $v \in V_G$ ovat naapureita. Tapauksessa $r = 1$ tämä ehto ja esimerkin 2.3 ehto ovat samat, sillä jos $B_1(u) = B_1(v)$, niin u ja v ovat naapureita. Siis G on lokaalisti 1-identifioituva, jos ja vain jos G on 1-identifioituva. Kun $r \geq 2$, näin ei aina ole. Kuvassa 1 on graafi, joka on lokaalisti 2-identifioituva mutta ei 2-identifioituva. Tosiaankin $B_2(u) = B_2(v)$ mutta kuitenkin $B_2(w) \neq B_2(x)$ aina kun w ja x ovat naapureita.

Määritelmä 2.8. Epätyhjä osajoukko C graafin $G = (V_G, E_G)$ pisteitä on *lokaalisti r-paikallistava-dominoiva koodi* (graafissa G), jos

$$I_{C,r}(u) \neq \emptyset$$

kaikilla $u \in V_G$ ja

$$I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v),$$

kun $u, v \in V_G \setminus C$ ovat naapureita.

Osoittautuu, että tietyt ehdot täyttävässä graafissa jokainen 1-peittokoodi on myös lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi. Sanotaan, että graafi G on *kolmiovapaa*, jos se ei sisällä kolmioita eli jos sillä ei ole 3-sykliä indusoituna aligraafina.

Lause 2.9. *Olkoon $G = (V_G, E_G)$ kolmiovapaa graafi. Tällöin koodi $C \subseteq V_G$ on lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi, jos ja vain jos C on 1-peittokoodi.*

Todistus. Jos C on lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi, niin tällöin se on myös 1-peittokoodi.

Oletetaan sitten, että C on 1-peittokoodi graafissa G eli $I_{C,1}(u) \neq \emptyset$ kaikilla $u \in V_G$. Tehdään vastaoletus, että C ei ole lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi. Tällöin on olemassa sellaiset ei-koodisananaapurit $u, v \in V_G \setminus C$, että $I_{C,1}(u) = I_{C,1}(v)$. Koska G ei sisällä kolmioita, niin $B_1(u) \cap B_1(v) = \{u, v\}$. Koska $u, v \notin C$, niin $I_{C,1}(u) = I_{C,1}(v) = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis C on lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi. $\square$

Olkoon $G = (V_G, E_G)$ äärellinen graafi. Jos G on lokaalisti r-identifioituva, käytetään optimaalisen lokaalisti r-identifioivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_r^{L-ID}(G)$. Vastaavasti käytetään optimaalisen lokaalisti r-paikallistavan-dominoivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_r^{L-LD}(G)$.

2.3 Koodisanan osuus

Seuraavan hyödylliseksi osoittautuneen käsitteen esitteli Slater artikkelissa [28].

Määritelmä 2.10. Olkoon C r-peittokoodi graafissa G. Koodisanan $c \in C$ *osuus* (*share*) $s(c)$ määritellään kaavalla

$$s(c) = \sum_{u \in B_r(c)} \frac{1}{|I_{C,r}(u)|}.$$

Seuraava lause osoittaa, kuinka koodisanojen osuuksien avulla saadaan alaraja koodisanojen lukumäärälle.

Lause 2.11. Olkoon C r-peittokoodi äärellisessä graafissa $G = (V_G, E_G)$ ja oletetaan, että $s(c) \leq \alpha$ kaikilla $c \in C$. Tällöin

$$|C| \geq \frac{|V_G|}{\alpha}.$$

Todistus. Olkoon $G = (V_G, E_G)$ äärellinen graafi ja olkoon $C \subseteq V_G$ r-peittokoodi. Laskemalla koodisanojen osuudet yhteen saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{c \in C} s(c) &= \sum_{c \in C} \sum_{u \in B_r(c)} \frac{1}{|I_{C,r}(u)|} \\ &= \sum_{u \in V_G} |I_{C,r}(u)| \cdot \frac{1}{|I_{C,r}(u)|} \\ &= |V_G|.\end{aligned}$$

Koska $s(c) \leq \alpha$ kaikilla $c \in C$, niin

$$|V_G| = \sum_{c \in C} s(c) \leq |C| \cdot \alpha.$$

Siis

$$|C| \geq \frac{|V_G|}{\alpha}.$$

$\square$

3 Lokaalista identifioinnista poluissa ja sykleissä

Tässä luvussa tutkitaan lokaalisti identifioivia koodeja poluissa ja sykleissä. Tuloksia verrataan vastaaviin tunnettuihin tuloksiin koskien identifioivia koodeja. Identifioivia ja paikallistavia-dominoivia koodeja poluissa ja sykleissä on tutkittu esimerkiksi artikkeleissa [2, 7, 15, 13, 19, 22, 26]. Aloitetaan esittelemällä graafit.

Ääretön polku on graafi $\mathcal{P}_\infty = (V_\infty, E_\infty)$, missä $V_\infty = \{u_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ ja $E_\infty = \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Äärellinen n-pituinen polku on graafi $\mathcal{P}_n = (V_n, E_n)$, missä $V_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ ja $E_n = \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid i \in \{0, \ldots, n-2\}\}$. Sykli $\mathcal{C}_n$ saadaan polusta $\mathcal{P}_n$ yhdistämällä sen ensimmäinen ja viimeinen piste. Siis $\mathcal{C}_n = (V'_n, E'_n)$, missä $V'_n = \{u_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ ja $E'_n = \{\{u_i, u_{i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, missä $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ on jäännösluokkarengas $\pmod{n}$.

Tehdään joitain huomioita näiden graafien identifioituvuudesta.

- Graafi G on r-identifioituva, jos ja vain jos se on lokaalisti r-identifioituva, kun G on mikä tahansa polku tai sykli. Tosiaankin, jos G on r-identifioituva, niin silloin se on myös lokaalisti r-identifioituva, sillä jokainen r-identifioiva koodi on erityisesti myös lokaalisti r-identifioiva koodi. Jos taas G on lokaalisti r-identifioituva, on oltava $B_r(u) \neq B_r(v)$ aina kun u ja v ovat naapureita. Poluissa ja sykleissä tästä seuraa, että $B_r(u) \neq B_r(v)$ kaikilla eri pisteillä u ja v. Siis G on myös r-identifioituva. Tämä käy selväksi myös tulevien lauseiden todistuksissa.

- Polku $\mathcal{P}_\infty$ on r-identifioituva ja lokaalisti r-identifioituva kaikilla $r \geq 0$, sillä $B_r(u) \neq B_r(v)$ aina kun $u \neq v$.

- Polku $\mathcal{P}_n$ on r-identifioituva ja lokaalisti r-identifioituva, jos ja vain jos $n \geq 2r+1$, sillä jos $n < 2r+1$, niin $B_r(u_{r-1}) = B_r(u_r) = V_n$ ja jos $n \geq 2r+1$, niin $B_r(u) \neq B_r(v)$ aina kun $u \neq v$.

- Sykli $\mathcal{C}_n$ on r-identifioituva ja lokaalisti r-identifioituva, jos ja vain jos $n \geq 2r+2$, sillä jos $n < 2r+2$, niin $B_r(u) = V'_n$ kaikilla $u \in V'_n$ ja jos $n \geq 2r+2$, niin $B_r(u) \neq B_r(v)$ aina kun $u \neq v$.

Olkoon $C \subseteq V_\infty$ koodi graafissa $\mathcal{P}_\infty$. Tällöin sen tiheys $D(C)$ määritellään kaavalla

$$D(C) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|C \cap K_n|}{|K_n|},$$

missä $K_n = \{u_{-n}, \ldots, u_n\}$. Käytetään optimaalisten r-identifioivien ja lokaalisti r-identifioivien koodien tiheyksistä merkintöjä $\gamma_r^{ID}(\mathcal{P}_\infty)$ ja $\gamma_r^{L-ID}(\mathcal{P}_\infty)$.

3.1 Lokaalisti identifioivat koodit poluissa

Osoittautuu, että poluissa r-identifioivat koodit ja lokaalisti r-identifioivat koodit ovat sama koodiluokka.

Lause 3.1. Olkoon $G = \mathcal{P}_n$ tai $G = \mathcal{P}_\infty$. Koodi C on lokaalisti r-identifioiva graafissa G, jos ja vain jos C on r-identifioiva graafissa G. Näin ollen

$$M_r^{L-ID}(\mathcal{P}_n) = M_r^{ID}(\mathcal{P}_n),$$
$$\gamma_r^{L-ID}(\mathcal{P}_\infty) = \gamma_r^{ID}(\mathcal{P}_\infty).$$

Todistus. Jos C on r-identifioiva koodi graafissa G, niin tällöin se on myös lokaalisti r-identifioiva koodi graafissa G.

Oletetaan sitten, että C on lokaalisti r-identifioiva koodi graafissa G. Tehdään vastaoletus, että C ei ole r-identifioiva koodi. Tällöin on olemassa sellaiset graafin G pisteet u_i ja u_j, että $I_{C,r}(u_i) \bigtriangleup I_{C,r}(u_j) = \emptyset$. Koska C on lokaalisti r-identifioiva, niin $d(u_i, u_j) \geq 2$. Lisäksi $d(u_i, u_j) \leq 2r$, koska on oltava $I_{C,r}(u_i) = I_{C,r}(u_j) \neq \emptyset$. Lisäksi voidaan olettaa, että $i < j$. Siis $2 \leq j - i \leq 2r$. Tällöin

$$I_{C,r}(u_i) \bigtriangleup I_{C,r}(u_{i+1}) \subseteq I_{C,r}(u_i) \bigtriangleup I_{C,r}(u_j).$$

eli $I_{C,r}(u_i) \bigtriangleup I_{C,r}(u_{i+1}) = \emptyset$, mikä on ristiriita, koska C on lokaalisti r-identifioiva koodi. Siis C on r-identifioiva koodi. □

3.2 Lokaalisti identifioivat koodit sykleissä

Luvulle $M_r^{ID}(\mathcal{C}_n)$ on voimassa seuraava alaraja.

Lause 3.2 ([2])**.** Olkoon $r \geq 1$ ja $n \geq 2r + 2$. Tällöin

$$M_r^{ID}(\mathcal{C}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Todistus. Olkoon C r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_n$. Jos $u_i \notin C$, niin tällöin on oltava $u_{i+2r+1} \in C$, koska symmetrisessä erotuksessa $B_r(u_{i+r}) \bigtriangleup B_r(u_{i+r+1}) = \{u_i, u_{i+2r+1}\}$ on oltava vähintään yksi koodisana. Koska $n \geq 2r+2$, niin $i \neq i+2r+1$. Siis jokaista ei-koodisanaa kohti on oltava vähintään yksi koodisana. Koodisana u_{i+2r+1} on yksikäsitteinen, joten

$$M_r^{ID}(\mathcal{C}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

□

Sama alaraja pätee myös luvulle $M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_n)$ samalla todistuksella.

Lause 3.3. Olkoon $r \geq 1$ ja $n \geq 2r + 2$. Tällöin

$$M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Kun n on tarpeeksi suuri lauseen 3.2 alaraja saavutetaan parillisen pituisissa sykleissä.

Lause 3.4 ([2])**.** Olkoon $r \geq 1$ ja $n \geq 2r + 4$ parillinen. Tällöin

$$M_r^{ID}(\mathcal{C}_n) = \frac{n}{2}.$$

Kun $n = 2r + 2$ tarvitaan huomattavasti suurempi koodi, jotta se olisi r-identifioiva syklissä $\mathcal{C}_n$.

Lause 3.5 ([2])**.** Olkoon $r \geq 1$. Tällöin

$$M_r^{ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) = 2r + 1.$$

Todistus. Olkoon $C = V'_{2r+2} \setminus \{u_i\}$, missä $i \in \mathbb{Z}_{2r+2}$. Nyt $I_{C,r}(u_{i+r+1}) = C$ ja $I_{C,r}(u_j) = C \setminus \{u_{j+r+1}\}$, kun $j \neq i + r + 1$. Siis I-joukot ovat epätyhjiä ja yksikäsitteisiä eli C on r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_{2r+2}$ ja näin ollen $M_r^{ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) \leq 2r + 1$.

Todistetaan vielä alaraja $M_r^{ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) \geq 2r + 1$. Olkoon C r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_n$. Tällöin $B_r(u_i) = V'_{2r+2} \setminus \{u_{i+r+1}\}$ kaikilla $u_i \in V'_{2r+2}$ ja jos $i \neq j$, niin

$$B_r(u_i) \bigtriangleup B_r(u_j) = \{u_{i+r+1}, u_{j+r+1}\}.$$

Koska C on r-identifioiva koodi on toisen symmetrisen erotuksen pisteistä oltava koodisana. Näytetään, että graafin pisteistä korkeintaan yksi voi olla ei-koodisana. Oletetaan, että $u_k \notin C$ ja olkoon $j \neq k + r + 1$. Tällöin on oltava

$$B_r(u_{k+r+1}) \bigtriangleup B_r(u_j) = \{u_k, u_{j+r+1}\} \neq \emptyset.$$

Siis on oltava $u_{j+r+1} \in C$, koska u_k oletetiin ei-koodisanaksi. Koska tämä päättely on voimassa kaikilla $j \in \mathbb{Z}_{2r+2} \setminus \{k+r+1\}$, on oltava $C = V'_{2r+2} \setminus \{u_k\}$. Tämä todistaa alarajan ja näin ollen väitteen. $\square$

Lauseiden 3.3 ja 3.4 nojalla

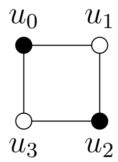
$$M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_n) = M_r^{ID}(\mathcal{C}_n) = \frac{n}{2},$$

kun $n \geq 2r + 4$ on parillinen. Osoittautuukin, että kun n on tarpeeksi suuri, niin lokaalisti r-identifioivien koodien ja r-identifioivien koodien luokat ovat samat. Näin ei kuitenkaan käy lyhyissä sykleissä kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 3.6. Koodi $C = \{u_0, u_2\} \subseteq V_4'$ (kuva 2) on lokaalisti 1-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_4$. Siis

$$M_1^{L-ID}(\mathcal{C}_4) = 2$$

lauseen 3.3 nojalla. Koodi C ei ole kuitenkaan 1-identifioiva. Lauseen 3.5 nojalla onkin $M_1^{ID}(\mathcal{C}_4) = 3$.



Kuva 2: Lokaalisti 1-identifioiva koodi, joka ei ole 1-identifioiva graafissa $\mathcal{C}_4$.

Edellinen esimerkki yleistyy seuraavaksi lauseeksi, joka parantaa merkittävästi lauseen 3.5 tulosta syklissä $\mathcal{C}_{2r+2}$, kun tutkitaankin lokaalisti r-identifioivia koodeja r-identifioivien koodien sijaan.

Lause 3.7. Olkoon $r \geq 1$. Tällöin

$$M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) = r + 1.$$

Todistus. Lauseen 3.3 nojalla $M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) \geq r + 1$.

Ylärajaa varten näytetään, että $C = \{u_0, u_2, \ldots, u_{2r}\}$ on lokaalisti r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_{2r+2}$. Koska jokainen syklin piste on joko koodin C koodisana tai sen naapurit ovat koodisanoja, niin $I_{C,r}(u) \neq \emptyset$ kaikilla pisteillä u. Näytetään vielä, että $I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v)$ aina kun u ja v ovat naapureita.

Olkoon $i \in \mathbb{Z}_{2r+2}$ ja olkoon $u = u_i$ ja $v = u_{i+1}$ eli u ja v ovat naapureita. Nyt kuten lauseen 3.5 todistuksessa

$$B_r(u_i) \bigtriangleup B_r(u_{i+1}) = \{u_{i+r+1}, u_{i+r+2}\}.$$

Koska toinen jakojäännöksistä $i+r+1$ ja $i+r+2$ on parillinen, niin toinen symmetrisen erotuksen pisteistä u_{i+r+1} ja u_{i+r+2} on koodisana. Siis

$$I_{C,r}(u_i) \bigtriangleup I_{C,r}(u_{i+1}) \neq \emptyset.$$

Näin ollen C on lokaalisti r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_{2r+2}$ ja

$$M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_{2r+2}) = r + 1.$$

□

Siis

$$M_r^{L-ID}(\mathcal{C}_n) = \frac{n}{2},$$

kun $n \geq 2r+2$ ja n on parillinen. Seuraava lause osoittaa, että lokaalisti r-identifioivien koodien luokka ja r-identifioivien koodien luokka on sama koodiluokka syklissä $\mathcal{C}_n$, kun n on tarpeeksi suuri.

Lause 3.8. Olkoon $n > 4r$ ja olkoon $C \subseteq V_n$ koodi syklissä $\mathcal{C}_n$. Tällöin C on lokaalisti r-identifioiva koodi, jos ja vain jos C on r-identifioiva koodi.

Todistus. Jos C on r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_n$, niin tällöin se on myös lokaalisti r-identifioiva koodi.

Oletetaan sitten, että C on lokaalisti r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_n$ eli joukot $I_{C,r}(u)$ ovat epätyhjiä kaikilla pisteillä u ja $I_{C,r}(u) \neq I_{C,r}(v)$, kun u ja v ovat naapureita. Tehdään vastaoletus, että C ei ole r-identifioiva. Tällöin on olemassa sellaiset erisuuret $i, j \in \mathbb{Z}_n$, että $I_{C,r}(u_i) = I_{C,r}(u_j)$. Koska C on lokaalisti r-identifioiva koodi, on oltava $d = d(u_i, u_j) \geq 2$. Toisaalta, koska I-joukot ovat epätyhjiä, on oltava $d \leq 2r$. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan olettaa, että $j = i + d$.

Koska $n - d > 2r$, kun $n > 4r$, niin unioni $B_r(u_i) \cup B_r(u_{i+d})$ koostuu polun $u_{i-r} \longrightarrow u_{i+d+r}$ pisteistä ja leikkaus $B_r(u_i) \cap B_r(u_{i+d})$ koostuu polun $u_{i+d-r} \longrightarrow u_{i+r}$ pisteistä. Siis

$$B_r(u_i) \bigtriangleup B_r(u_{i+d}) = \{u_{i-r}, \ldots, u_{i+d-r-1}\} \cup \{u_{i+r+1}, \ldots, u_{i+d+r}\}.$$

Koska

$$B_r(u_i) \triangle B_r(u_{i+1}) = \{u_{i-r}, u_{i+1+r}\} \subseteq B_r(u_i) \triangle B_r(u_{i+d}),$$

on

$$I_{C,r}(u_i) \triangle I_{C,r}(u_{i+1}) = I_{C,r}(u_i) \triangle I_{C,r}(u_{i+d}) = \emptyset,$$

mikä on ristiriidassa sen kanssa, että C on lokaalisti r-identifioiva koodi. Siis C on r-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_n$. $\square$

Esimerkki 3.9. Edellisen lauseen ehto $n > 4r$ on esimerkin 3.6 nojalla välttämätön, kun $r = 1$. Suuremmilla peittosäteen r arvoilla ehtoa voidaan hieman heikentää. Esimerkiksi tapauksessa $r = 2$ riittää vaatia, että $n \geq 7$. Perustellaan tätä hieman. Voidaan olettaa, että $n \in \{7, 8\}$. Edellinen lausehan toimii, kun $n > 8$. Oletetaan, että C on lokaalisti 2-identifioiva koodi syklissä $\mathcal{C}_7$. Tehdään taas vastaoletus, että C ei ole 2-identifioiva eli että on sellaiset eri pisteet u ja v, että $I_{C,2}(u) = I_{C,2}(v)$. Voidaan olettaa, että $u = u_0$ ja $v = u_d$, missä $d = d(u, v)$. Jos $n - d > 4$, niin todistus on sama kuin edellisessä lauseessa. Voidaan siis olettaa, että $d \in \{3, 4\}$. Syklissä $\mathcal{C}_7$ ei ole pisteitä etäisyydellä 4 toisistaan, joten voidaan olettaa, että $d = 3$. Tällöin

$$B_2(u_0) \triangle B_2(u_3) = \{u_0, u_3, u_4, u_6\}.$$

Vastaoletuksen mukaan $I_{C,2}(u_0) \triangle I_{C,2}(u_3) = \emptyset$, joten $|C| \leq 7 - 4 = 3$, mikä on mahdotonta, sillä lauseen 3.3 nojalla $|C| \geq 4$. Kun $n = 8$, menetellään samaan tapaan.

4 Lokaalista identifioinnista binäärisessä hyperkuutiossa

4.1 Binäärinen hyperkuutio ja binääriset koodit

Tässä osiossa tarkastellaan *binääristä n-ulotteista hyperkuutiota* eli *binääristä n-ulotteista Hammingin avaruutta* $\mathbb{F}_2^n$, missä $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ on kertalukua 2 oleva kunta ja n on positiivinen kokonaisluku. Siis binäärinen hyperkuutio sisältää kaikki n-pituiset *binäärisanat*. Tunnetusti $\mathbb{F}_2^n$ on *vektoriavaruus* yli kunnan $\mathbb{F}_2$ ja sillä on luonnollinen kanta $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, missä $\boldsymbol{e}_i = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{F}_2^n$ on se binäärisana, jolle $e_i = 1$ ja $e_j = 0$ aina kun $j \neq i$. Jos ei ole sekaannuksen vaaraa, voidaan merkitä lyhyesti $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Tämän alaluvun esitys seuraa pitkälti kirjaa [10] ja luentomonisteita [16, 17].

Määritellään kahden binäärisanan $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}_2^n$ summa kuten vektoreille eli

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

ja pistetulo

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

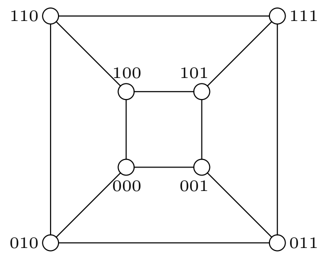
Sanojen $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ *(Hammingin) etäisyys* $d_H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ on niiden kohtien lukumäärä, joissa ne eroavat toisistaan eli

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|.$$

Binäärisanan $\boldsymbol{x}$ *(Hammingin) paino* $w(\boldsymbol{x})$ on siinä esiintyvien ykkösten lukumäärä. Sanojen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ etäisyys on Hammingin painon avulla ilmaistuna

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}).$$

Huomautus 4.1. On luonnollista ajatella binääristä n-ulotteista hyperkuutiota graafina $G = (\mathbb{F}_2^n, E)$, jonka pisteitä ovat kaikki n-pituiset binäärisanat ja $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in E$, jos ja vain jos $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$. Ilman sekaannusta sanotaan, että $\mathbb{F}_2^n$ on graafi, kun viitataan graafiin $G = (\mathbb{F}_2^n, E)$. Kuvassa 3 on piirrettynä hyperkuutio $\mathbb{F}_2^3$.



Kuva 3: Hyperkuutio $\mathbb{F}_2^3$ graafina.

Määritellään r-säteinen $\boldsymbol{x}$-keskinen pallo kuten yleiselle graafille

$$B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n \mid d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \leq r\}.$$

Kutsutaan tätä erityisesti *Hammingin palloksi.* Käytetään r-säteisen Hammingin pallon sanojen lukumäärälle merkintää

$$V(n, r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}.$$

Esimerkki 4.2. Perustellaan nyt, että binäärinen hyperkuutio $\mathbb{F}_2^n$ on kolmiovapaa graafi. Olkoot $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ sellaiset sanat, että $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ ja olkoon $i \in \{1, \ldots, n\}$ se kohta missä nämä kaksi sanaa eroavat eli $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i$. Riittää näyttää, että $B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. Tehdään vastaoletus, että on sellainen $\boldsymbol{z} \in \mathbb{F}_2^n$, että $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z} \in B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y})$. Tällöin on sellaiset $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k \neq i$, että $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k$. Tämä on ristiriita, koska $\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k$. Siis $\mathbb{F}_2^n$ on kolmiovapaa.

Koodia binäärisessä hyperkuutiossa $\mathbb{F}_2^n$ sanotaan *binääriseksi n-pituiseksi koodiksi.* Koodin C *peittosäde* $R(C)$ on pienin sellainen positiivinen kokonaisluku, että jokaisen binäärisanan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ etäisyys jostakin koodisanasta $\boldsymbol{c} \in C$ on korkeintaan $R(C)$ eli

$$R(C) = \max\{d(\boldsymbol{x}, C) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n\},$$

missä $d(\boldsymbol{x}, C) = \min\{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c} \in C\}$. Siis $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ on R-peittokoodi, jos sen peittosäde on korkeintaan R. Käytetään merkintää $K(n, R)$ pienimmän R-peittokoodin koodisanojen lukumäärästä avaruudessa $\mathbb{F}_2^n$.

Lause 4.3 (*Pallopeittoraja*).

$$K(n, R) \geq \frac{2^n}{V(n, R)}.$$

Todistus. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ R-peittokoodi eli jokainen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ on R-peitetty vähintään yhdellä koodisanalla $\boldsymbol{c} \in C$. Siis $\boldsymbol{x} \in B_R(\boldsymbol{c})$ ja näin ollen

$$\bigcup_{\boldsymbol{c} \in C} B_R(\boldsymbol{c}) = \mathbb{F}_2^n.$$

Siis

$$\sum_{\boldsymbol{c} \in C} |B_R(\boldsymbol{c})| \geq |\mathbb{F}_2^n|$$

eli

$$V(n, R)|C| \geq 2^n,$$

josta saadaan

$$|C| \geq \frac{2^n}{V(n, R)}.$$

□

Lause 2.9 ja esimerkki 4.2 antavat seuraavan lauseen.

Lause 4.4. Koodi $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ on lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi, jos ja vain jos C on 1-peittokoodi. Näin ollen

$$M_1^{L-LD}(\mathbb{F}_2^n) = K(n, 1).$$

Esimerkki 4.5. Olkoon $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Tutkitaan pallojen $B_1(\boldsymbol{x})$ ja $B_1(\boldsymbol{y})$ leikkausta

$$B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y})$$

eli sanoja, jotka sekä $\boldsymbol{x}$ että $\boldsymbol{y}$ 1-peittävät. Perustellaan, että tässä leikkauksessa on joko $0, 2$ tai $n + 1$ sanaa.

- Jos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, niin $|B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y})| = |B_1(\boldsymbol{x})| = |B_1(\boldsymbol{y})| = V(n, 1) = n+1$.
- Jos $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$, niin $B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$.
- Jos $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2$, niin $B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_j\}$, missä $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ovat ne kohdat, joissa $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ eroavat.

- Jos $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 3$, niin $B_1(\boldsymbol{x}) \cap B_1(\boldsymbol{y}) = \emptyset$.

Tutkitaan vielä kolmen pallon leikkausta. Olkoot $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}_3$ ja oletetaan lisäksi, että

$$A = B_1(\boldsymbol{x}_1) \cap B_1(\boldsymbol{x}_2) \cap B_1(\boldsymbol{x}_3) \neq \emptyset.$$

Tällöin on oltava $d(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \leq 2$, kun $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Jos $\boldsymbol{x}_1 \in A$, niin tällöin $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$ ja $d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) = 1$. Koska $A \subseteq B_1(\boldsymbol{x}_1) \cap B_1(\boldsymbol{x}_2) = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ ja $A \subseteq B_1(\boldsymbol{x}_1) \cap B_1(\boldsymbol{x}_3) = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3\}$ on oltava $A = \{\boldsymbol{x}_1\}$. Tapaukset $\boldsymbol{x}_2 \in A$ ja $\boldsymbol{x}_3 \in A$ ovat samankaltaisia ja saadaan yllä olevasta vaihtamalla sanojen rooleja sopivasti.

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{y} \in A, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_3$. Nyt on oltava $d(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = 2$, kun $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Muutoinhan muodostuisi kolmio. Nyt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{e}_{k_1} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{e}_{k_1} = \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{e}_{k_3}$, missä k_i on se kohta, missä $\boldsymbol{x}_i$ ja $\boldsymbol{y}$ eroavat. Selvästi $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, sillä $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{x}_3$. Luvut k_i määräytyvät yksikäsitteisesti. Siis pallojen leikkaus A sisältää yksikäsitteisen sanan.

Määritellään koodien suora summa.

Määritelmä 4.6. Olkoon $C_1 \subseteq \mathbb{F}_2^n, C_2 \subseteq \mathbb{F}_2^m$ koodeja. Niiden *suora summa* on koodi

$$C_1 \oplus C_2 = \{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \in \mathbb{F}_2^{n+m} \mid \boldsymbol{c}_1 \in C_1, \boldsymbol{c}_2 \in C_2\} \subseteq \mathbb{F}_2^{n+m}.$$

Koodin $C_1 \oplus C_2$ peittosäde on $R_1 + R_2$, kun R_1 on koodin C_1 peittosäde ja R_2 on koodin C_2 peittosäde.

4.1.1 Lineaariset koodit

Esitetään nyt lyhyesti lineaarisia koodeja koskevat asiat. Tässä vektoriavaruuden $\mathbb{F}_2^n$ alkioita ajatellaan *vaakavektoreina* ellei toisin mainita. Viitataan edelleen kirjaan [10] ja luentomonisteisiin [16, 17].

Määritelmä 4.7. Koodin $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ sanotaan olevan *lineaarinen*, jos se on vektoriavaruuden $\mathbb{F}_2^n$ aliavaruus. Kun lineaarisen koodin C *dimensio* on k, niin $|C| = 2^k$. Lineaarisen koodin C, jonka dimensio on k, *generaattorimatriisi* on matriisi

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(C) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_k \end{pmatrix},$$

missä $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_k\}$ on jokin koodin C kanta. Lineaarista koodia $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$, jonka dimensio on k, sanotaan $[n,k]$-koodiksi. Jos lisäksi halutaan korostaa, että koodin C peittosäde on R, sanotaan, että C on $[n,k]R$-koodi.

Lineaarisen koodin C *duaalikoodi* on koodi

$$C^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \rangle = 0 \text{ kaikilla } \boldsymbol{c} \in C\}.$$

Jos koodin C dimensio on k, niin sen duaalikoodin dimensio on $n-k$ eli $[n,k]$-koodin duaalikoodi on $[n, n-k]$-koodi. Duaalikoodin generaattorimatriisia $\boldsymbol{H}$ sanotaan koodin C *tarkistusmatriisiksi*. Koodi C voidaan kirjoittaa sen tarkistusmatriisin avulla joukkona

$$C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{0}\}.$$

Sanaa $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T$ sanotaan sanan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ *syndromiksi* koodin C suhteen.

Esimerkki 4.8. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ lineaarinen koodi jonka dimensio on k ja olkoon $\boldsymbol{G}$ sen generaattorimatriisi. Koska generaattorimatriisin $\boldsymbol{G}$ vaakarivit muodostavat koodin C kannan, muodostavat ne lineaarisesti riippumattoman joukon eli matriisin $\boldsymbol{G}$ aste on k. Siis vaakarivimuunnoksia tekemällä saadaan vaakariviekvivalentti matriisi, joka sisältää k-pituiset pystyrivit $(1,0,\ldots,0)^T, (0,1,0,\ldots,0)^T, \ldots, (0,0,\ldots,0,1)^T$. Näiden pystyrivien välissä voi kuitenkin olla muita pystyrivejä. Vaihtamalla sopivasti pystyrivien paikkoja saadaan matriisi $\boldsymbol{G}'$, joka on muotoa $(\boldsymbol{I}_k, \boldsymbol{P})$, missä $\boldsymbol{I}_k$ on $k\times k$-identiteettimatriisi ja $\boldsymbol{P}$ on jokin $k\times(n-k)$-matriisi. Tätä muotoa sanotaan *standardimuodoksi*. On huomattava, että matriisit $\boldsymbol{G}$ ja $\boldsymbol{G}'$ voivat määrätä eri koodit. Nämä koodit ovat kuitenkin siinä mielessä ekvivalentit että niiden parametrit ovat samat eli esimerkiksi näiden koodien peittosäteet ovat samat. Kun koodin C generaattorimatriisi on standardimuodossa $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k, \boldsymbol{P})$, niin tällöin sen tarkistusmatriisi on $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{P}^T, \boldsymbol{I}_{n-k})$.

Otetaan käyttöön seuraava perustulos.

Lause 4.9. Olkoon C $[n,k]$-koodi ja olkoon $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{h}_1^T|\boldsymbol{h}_2^T|\ldots|\boldsymbol{h}_n^T)$ sen tarkistusmatriisi, missä $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_n \in \mathbb{F}_2^{n-k}$. Koodin C peittosäde R on pienin sellainen kokonaisluku, että jokainen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^{n-k}$ voidaan kirjoittaa korkeintaan R-pituisena summana matriisin $\boldsymbol{H}$ pystyrivejä.

Määritelmä 4.10. Olkoon $\boldsymbol{H}_s$ sellainen $s \times (2^s - 1)$-matriisi, joka sisältää jokaisen nollasta eroavan s-pituisen binäärisanan pystyrivinään täsmälleen kerran. Koodia $\mathcal{H}_s \subseteq \mathbb{F}_2^{2^s-1}$, jonka tarkistumatriisi on $\boldsymbol{H}_s$, sanotaan *binääriseksi Hammingin koodiksi.* Hammingin koodi on täydellinen $[2^s - 1, 2^s - 1 - s]1$-koodi.

Esimerkki 4.11. Tarkastellaan binääristä hyperkuutiota $\mathbb{F}_2^7$ ja erästä Hammingin koodia $\mathcal{H}_3 \subseteq \mathbb{F}_2^7$. Olkoon tämän Hammingin koodin tarkistusmatriisi

$$\boldsymbol{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarkistusmatriisi $\boldsymbol{H}_3$ on standardimuodossa, joten koodin $\mathcal{H}_3$ generaattorimatriisi on esimerkin 4.8 nojalla

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Lokaalisti identifioivat koodit binäärisessä hyperkuutiossa

Lauseen 4.4 nojalla lokaalisti 1-paikallistavien-dominoivien koodien luokka on sama kuin 1-peittokoodien luokka binäärisessä hyperkuutiossa, joten kaikki 1-peittokoodeja koskevat tulokset ovat myös lokaalisti 1-paikallistavia-dominoivia koodeja koskevia tuloksia (näitä on esimerkiksi kirjassa [10]). Esimerkiksi artikkelissa [21] on tutkittu 1-paikallistavia-dominoivia koodeja binäärisessä hyperkuutiossa. Aloitetaan käymällä lyhyesti läpi joitain tunnettuja tuloksia koskien 1-identifioivia koodeja binäärisessä hyperkuutiossa. Sen jälkeen esitetään vastaavia tuloksia lokaalisti 1-identifioiville koodeille binäärisessä hyperkuutiossa. Käytetään pienimmän binäärisen n-pituisen 1-identifioivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_1(n)$ ja pienimmän binäärisen n-pituisen lokaalisti 1-identifioivan koodin koodisanojen lukumäärästä merkintää $M_1^L(n)$. Koska 1-identifioivat koodit ovat lokaalisti 1-identifioivia koodeja, niin $M_1^L(n) \leq M_1(n)$ aina kun $n \geq 2$ (lukuja $M_1^L(1)$ ja $M_1(1)$ ei ole määritelty).

4.2.1 Tunnettuja tuloksia 1-identifioiville koodeille binäärisessä hyperkuutiossa

Esimerkki 4.12. Tarkastellaan hyperkuutioita $\mathbb{F}_2^n$, kun $n = 1$ tai $n = 2$. Hyperkuutio $\mathbb{F}_2$ on isomorfinen polun $\mathcal{P}_2$ kanssa eikä näin ollen ole 1-identifioituva. Tällöinhän $N[0] = N[1] = \{0, 1\} = \mathbb{F}_2$. Hyperkuutio $\mathbb{F}_2^2$ on puolestaan isomorfinen syklin $\mathcal{C}_4$ kanssa ja näin ollen $M_1(2) = M_1^{ID}(\mathcal{C}_4) = 3$. Yleisesti $\mathbb{F}_2^n$ on r-identifioituva, kun $0 \leq r \leq n-1$.

Esimerkki 4.13. Näytetään, että $M_1(3) = 4$. Oletetaan, että $C \subseteq \mathbb{F}_2^3$ on 1-identifioiva koodi ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{c} = 000$. Koska C on 1-identifioiva koodi, niin sen täytyy 1-erottaa suljetun naapuruston

$$N[\boldsymbol{c}] = \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_3\}$$

sanat ja 1-peittää kaikki painoa kaksi olevat sanat. Tähän tarvitaan vielä vähintään kolme koodisanaa. Siis $|C| \geq 4$.

Toisaalta esimerkiksi koodit $C_1 = \{000, 110, 011, 101\}$ ja $C_2 = \{000, 100, 010, 111\}$ ovat 1-identifioivia koodeja. Näin ollen $M_1(3) = 4$.

Seuraavat kolme lausetta esitettiin ja todistettiin artikkelissa [3]. Sivuutetaan kahden ensimmäisen todistukset. Myöhemmin esitetään vastaavat tulokset lokaalisti 1-identifioiville koodeille ja näiden todistukset ovat hyvin samankaltaiset vanhojen todistusten kanssa.

Lause 4.14. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 1-identifioiva koodi. Tällöin koodi

$$C' = \mathbb{F}_2 \oplus C \subseteq \mathbb{F}_2^{n+1}$$

on 1-identifioiva, jos ja vain jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Lause 4.15. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 1-identifioiva koodi. Tällöin myös koodi

$$C' = \mathbb{F}_2^2 \oplus C \subseteq \mathbb{F}_2^{n+2}$$

on 1-identifioiva ja näin ollen $M_1(n+2) \leq 4M_1(n)$.

Lause 4.16. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ sellainen koodi, että $|I_{C,1}(\boldsymbol{x})| \geq 3$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Tällöin C on 1-identifioiva koodi.

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Oletuksen mukaan on olemassa sellaiset koodisanat $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3 \in C$, että $\boldsymbol{c}_1 \in I_{C,1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{c}_2 \in I_{C,1}(\boldsymbol{x})$ ja $\boldsymbol{c}_3 \in I_{C,1}(\boldsymbol{x})$. Esimerkin 4.5 nojalla $\boldsymbol{x}$ on yksikäsitteinen sana, jonka koodisanat $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ ja $\boldsymbol{c}_3$ 1-peittävät. Näin ollen $I_{C,1}(\boldsymbol{x})$ on yksikäsitteinen ja epätyhjä eli C on 1-identifioiva koodi. $\square$

Seuraava alaraja esitettiin ja todistettiin jo artikkelissa [24], jossa esiteltiin identifioivan koodin käsite. Artikkelissa [3] sille esitettiin uusi todistus.

Lause 4.17. Olkoon $n \geq 2$. Tällöin

$$M_1(n) \geq \frac{n \cdot 2^n}{V(n,2)}.$$

Seuraavat luvun $M_1(n)$ tarkat arvot vielä tunnetaan.

- $M_1(4) = 7$ ([3]).
- $M_1(5) = 10$ ([24]).
- $M_1(6) = 19$ ([14]).
- $M_1(7) = 32$ ([3]).

4.2.2 Lokaalisti 1-identifioivista koodeista binäärisessä hyperkuutiossa

Esimerkki 4.18. Kuten esimerkissä 4.12 todettiin $\mathbb{F}_2$ on isomorfinen polun $\mathcal{P}_2$ kanssa eikä näin ollen ole lokaalisti 1-identifioituva. Hyperkuutio $\mathbb{F}_2^2$ on puolestaan isomorfinen syklin $\mathcal{C}_4$ kanssa ja näin ollen $M_1^L(2) = M_1^{L-ID}(\mathcal{C}_4) = 2 < 3 = M_1(2)$. Koodi $C = \{00, 11\}$ on optimaalinen lokaalisti 1-identifioiva koodi.

Esimerkki 4.19. Perustellaan, että hyperkuutiossa $\mathbb{F}_2^3$ lokaalisti 1-identifioivien koodien ja 1-identifioivien koodien luokat ovat samat. Oletetaan, että $C \subseteq \mathbb{F}_2^3$ on lokaalisti 1-identifioiva koodi ja tehdään vastaoletus, että C ei ole 1-identifioiva. Tällöin on olemassa sellaiset $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^3$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^3$, että $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) = I_{C,1}(\boldsymbol{y})$. Koska C on lokaalisti 1-identifioiva, on oltava $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 2$. Toisaalta ei voi olla $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 3$, sillä tällöin olisi $N[\boldsymbol{x}] \cap N[\boldsymbol{y}] = \emptyset$ eli on oltava $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2$. Yleisyyttä loukkaamatta voidaan sanoa, että $\boldsymbol{x} = 000$ ja $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = 110$. Koska $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) = I_{C,1}(\boldsymbol{y})$, on oltava

$$N[\boldsymbol{x}] \triangle N[\boldsymbol{y}] = \{000, 001, 110, 111\} \subseteq \mathbb{F}_2^3 \setminus C$$

ja näin ollen

$$C \subseteq \mathbb{F}_2^3 \setminus N[\boldsymbol{x}] \triangle N[\boldsymbol{y}] = \{100, 010, 011, 101\} = C'.$$

Nyt erityisesti koodin C' on oltava lokaalisti 1-identifioiva koodi, koska C on lokaalisti 1-identifioiva koodi. Kuitenkin $I_{C',1}(010) = I_{C',1}(011) = \{010, 011\}$ ja $I_{C',1}(100) = I_{C',1}(101) = \{100, 101\}$. Tämä on ristiriita. Näin ollen lokaalisti 1-identifioivien ja 1-identifioivien koodien luokat ovat samat hyperkuutiossa $\mathbb{F}_2^3$ ja $M_1^L(3) = M_1(3) = 4$.

Esimerkki 4.20. Tarkastellaan hyperkuutiota $\mathbb{F}_2^4$ ja koodia $C = \{0000, 0100, 0010, 0111, 1111, 1101\}$. Tutkimalla I- joukkoja nähdään, että C 1-peittää jokaisen avaruuden $\mathbb{F}_2^4$ sanan ja 1-erottaa kaikki naapurit eli C on lokaalisti 1-identifioiva koodi. Koodi C ei ole kuitenkaan 1-identifioiva koodi, sillä esimerkiksi $I_{C,1}(0001) = \{0000\} = I_{C,1}(1000)$. Lisäksi huomataan, että ottamalla koodin C 0-alkuiset sanat ja poistamalla näistä sanoista ensimmäinen koordinaatti, saadaan koodi $C' = \{000, 100, 010, 111\} \subseteq \mathbb{F}_2^3$, joka todettiin aiemmin 1-identifioivaksi koodiksi. Tätä menetelmää sanotaan *lyhentämiseksi* (*shortening*).

Lause 4.21.

$$M_1^L(4) = 6.$$

Todistus. Edellisen esimerkin nojalla riittää näyttää, että $M_1^L(4) \geq 6$. Oletetaan, että $M_1^L(4) < 6$. Tällöin on olemassa lokaalisti 1-identifioiva koodi $C \subseteq \mathbb{F}_2^4$, jolle $|C| = 5$. Selvästikään ei voi olla $|I_{C,1}(\boldsymbol{x})| = 1$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^4$. Voidaan olettaa, että $|I_{C,1}(0000)| \geq 2$. Jos $|I_{C,1}(0000)| = 5$, niin tällöin C ei 1-peitä kaikkia sanoja. Jos $|I_{C,1}(0000)| = 4$, niin jäljellä oleva yksi koodisana ei riitä 1-erottamaan sanaa 1111 naapureistaan.

Käsitellään jäljelle jäävät tapaukset erikseen.

- Oletetaan, että $|I_{C,1}(0000)| = 3$. Nämä kolme suljetun naapuruston $N[0000]$ koodisanaa eivät 1-peitä joukon $N[1111]$ sanoja. Tarvitaan vähintään kolme koodisanaa tämän joukon sanojen 1-peittämiseksi ja 1-erottamiseksi naapureistaan. Tämä on ristiriita.

- Oletetaan, että $|I_{C,1}(0000)| = 2$ ja $0000 \in C$. Voidaan olettaa, että $1000 \in C$. Jotta C 1-erottaisi koodisananaapurit 0000 ja 1000, on koodisanalla 1000 oltava vielä vähintään yksi koodisananaapuri. Tämä koodisana on jokin painoa kaksi oleva sana, jonka ensimmäinen koordinaatti on 1. Nämä kolme koodisanaa eivät 1-peitä suljetun naapuruston $N[0111]$ sanoja. Tarvitaan vähintään kolme koodisanaa näiden viiden sanan 1-peittämiseksi ja 1-erottamiseksi naapureistaan. Tämä on ristiriita.

- Oletetaan, että $|I_{C,1}(0000)| = 2$ ja $0000 \notin C$. Voidaan olettaa, että $1000 \in C$ ja $0100 \in C$. Nämä kaksi koodisanaa eivät 1-peitä joukkojen $N[1111]$ ja $N[0011]$ sanoja. Näiden joukkojen sanat voidaan 1-peittää ja 1-erottaa naapureistaan täsmälleen kolmella koodisanalla kahdella eri tavalla: ottamalla koodisanoiksi pisteet $0011, 0111$ ja 1111 tai pisteet $0011, 1011$ ja 1111. Ensimmäisessä tapauksessa koodi C ei 1-erota sanaa 1000 naapureistaan 1010 ja 1001 ja toisessa tapauksessa koodi C ei

1-erota sanaa 0100 naapureistaan 0110 ja 0101. Siis tarvitaan vielä vähintään kuudes koodisana. Tämä on ristiriita.

Näin ollen $M_1^L(4) \geq 6$, mikä todistaa väitteen. $\square$

Lauseista 4.14 ja 4.15 saadaan versiot myös lokaalisti 1-identifioiville koodeille.

Lause 4.22. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ lokaalisti 1-identifioiva koodi. Tällöin koodi

$$C' = \mathbb{F}_2 \oplus C \subseteq \mathbb{F}_2^{n+1}$$

on lokaalisti 1-identifioiva, jos ja vain jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Oletetaan, että C' on lokaalisti 1-identifioiva. Tehdään vastaoletus, että on sellainen $\boldsymbol{c} \in C$, että $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$ ja todetaan, että tällöin C' ei 1-erota naapureita $(0, \boldsymbol{c})$ ja $(1, \boldsymbol{c})$, mikä on ristiriita. Siis on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Oletetaan sitten, että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$. Olkoon $\boldsymbol{x}' = (a, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{F}_2^{n+1}$, missä $a \in \mathbb{F}_2$ ja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Jos $\boldsymbol{x} \in C$, niin $I_{C',1}(\boldsymbol{x}') = \{(a+1, \boldsymbol{x})\} \cup \{(a, \boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c} \in I_{C,1}(\boldsymbol{x})\}$. Jos $\boldsymbol{x} \notin C$, niin $I_{C',1}(\boldsymbol{x}') = \{(a, \boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{c} \in I_{C,1}(\boldsymbol{x})\}$. Siis $I_{C',1}(\boldsymbol{x}') \neq \emptyset$, koska oletuksen mukaan $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$. Olkoon $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}' = (b, \boldsymbol{y})$ naapureita. Jos $a = b$, niin tällöin $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat naapureita. Koska C on lokaalisti 1-identifioiva koodi, niin $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) \neq I_{C,1}(\boldsymbol{y})$. Tällöin myös $I_{C',1}(\boldsymbol{x}') \neq I_{C',1}(\boldsymbol{y}')$. Oletetaan sitten, että $a \neq b$ eli on oltava $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, koska $\boldsymbol{x}'$ ja $\boldsymbol{y}'$ ovat naapureita. Oletuksen mukaan on sellainen $\boldsymbol{c} \in I_{C,1}(\boldsymbol{x}) = I_{C,1}(\boldsymbol{y})$, että $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Nyt $\{(a, \boldsymbol{c}), (b, \boldsymbol{c})\} \subseteq I_{C',1}(\boldsymbol{x}') \triangle I_{C',1}(\boldsymbol{y}')$ eli $I_{C',1}(\boldsymbol{x}') \triangle I_{C',1}(\boldsymbol{y}') \neq \emptyset$. Siis C' on lokaalisti 1-identifioiva koodi. $\square$

Lause 4.23. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ lokaalisti 1-identifioiva koodi. Tällöin myös koodi

$$C' = \mathbb{F}_2^2 \oplus C \subseteq \mathbb{F}_2^{n+2}$$

on lokaalisti 1-identifioiva ja näin ollen $M_1^L(n+2) \leq 4M_1^L(n)$.

Todistus. Olkoon $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, a, b)$, missä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ ja $a, b \in \mathbb{F}_2$. Jos $\boldsymbol{x} \in C$, niin tällöin esimerkin 4.5 nojalla $\boldsymbol{z}$ on yksikäsitteinen sana, joka on 1-peitetty koodisanoilla $(\boldsymbol{x}, a, b) \in C'$, $(\boldsymbol{x}, a+1, b) \in C'$ ja $(\boldsymbol{x}, a, b+1) \in C'$. Jos $\boldsymbol{x} \notin C$, niin tällöin kaikki koodisanat, jotka 1-peittävät sanan $\boldsymbol{z}$, ovat muotoa $(\boldsymbol{c}, a, b), \boldsymbol{c} \in I_{C,1}(\boldsymbol{x})$. Siis $I_{C,1}(\boldsymbol{z}) \neq \emptyset$ kaikilla $\boldsymbol{z} \in \mathbb{F}_2^{n+2}$ ja $I_{C',1}(\boldsymbol{z}) \neq I_{C',1}(\boldsymbol{z}')$ aina kun $\boldsymbol{z}$ ja $\boldsymbol{z}'$ ovat naapureita, koska C oletettiin lokaalisti 1-identifioivaksi koodiksi avaruudessa $\mathbb{F}_2^n$. □

Lauseen 4.16 ehtoja voidaan hieman heikentää. Saadaan seuraavat kaksi lausetta.

Lause 4.24. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ sellainen koodi, että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$ ja $|I_{C,1}(\boldsymbol{x})| \geq 1$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \backslash C$. Tällöin C on lokaalisti 1-identifioiva koodi.

Todistus. Oletusten mukaan $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ naapureita. Jos $\boldsymbol{c}$ on koodisana, on se 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla ja koska kolme koodisanaa voi 1-peittää yhteisesti korkeintaan yhden sanan esimerkin 4.5 nojalla, on joukko $I_{C,1}(\boldsymbol{c})$ yksikäsitteinen. Siis jos vähintään toinen sanoista $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ on koodisana, koodi C 1-erottaa ne. Jos taas $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat ei-koodisananaapureita, niin ne 1-erottuvat, koska lauseen 4.4 nojalla C on 1-peittokoodina lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi. □

Lause 4.25. Olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ sellainen koodi, että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| = 1$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$ ja $|I_{C,1}(\boldsymbol{x})| \geq 2$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \backslash C$. Tällöin C on lokaalisti 1-identifioiva koodi.

Todistus. Oletusten mukaan $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset$ kaikilla $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ ja $\boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ naapureita. Jos toinen näistä on koodisana, niin on sen I-joukko oletusten nojalla yksikäsitteinen. Jos taas molemmat ovat ei-koodisanoja, niin ne 1-erottuvat, koska lauseen 4.4 nojalla C on 1-peittokoodina lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi. □

4.2.3 Alaraja luvulle $M_1^L(n)$

Luvulle $M_1^L(n)$ saadaan alaraja tutkimalla koodisanojen osuuksia. Aloitetaan todistamalla yläraja lokaalisti 1-identifioivan koodin koodisanan osuudelle.

Lemma 4.26. Olkoon $n \geq 3$ ja olkoon $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ lokaalisti 1-identifioiva koodi. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{3n-2}{3}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Oletetaan, että $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ on lokaalisti 1-identifioiva koodi ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Tällöin koodin C täytyy 1-erottaa avoimen naapuruston

$$N(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_n\}$$

sanat koodisananaapuristaan $\boldsymbol{c}$.

Jos mikään sanoista $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_j$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ ei ole koodisana eli jos $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$, niin tällöin jokainen niistä on 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla, jotta C 1-erottaisi ne naapuristaan $\boldsymbol{c}$ eli on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_j)| \geq 2$ kaikilla $j \in \{1, \dots, n\}$. Siis

$$s(\boldsymbol{c}) = \frac{1}{|I_{C,1}(\boldsymbol{c})|} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_j)|} \leq 1 + \frac{n}{2}.$$

Oletetaan sitten, että koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri eli että $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k \in C$ jollakin $k \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k$ 1-erottaa sanan $\boldsymbol{c}$ joukon $N(\boldsymbol{c}) \setminus \{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k\}$ sanoista. Jotta C 1-erottaisi myös koodisananaapurit $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k$, on toisella niistä oltava vähintään kaksi koodisananaapuria eli on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$ tai $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k)| \geq 3$. Molemmissa tapauksissa $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_l)| \geq 2$ jollakin $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$. Siis suljetussa naapurustossa $N[\boldsymbol{c}]$ on vähintään yksi sana, joka on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla ja vähintään kaksi sanaa, jotka on 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla ja näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + (n-2) = \frac{3n-2}{3}.$$

Kun $n \geq 4$, niin $1 + \frac{n}{2} \leq \frac{3n-2}{3}$.

Tutkitaan tilannetta, kun $n = 3$. Koska koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on kolme naapuria, ei ole mahdollista, että jokainen niistä olisi 1-peitetty täsmälleen kahdella koodisanalla, kun $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$ eli tässäkin tapauksessa

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{3n-2}{3} \left(= \frac{7}{3} \right).$$

□

Edellinen lemma ja lause 2.11 antavat seuraavan lauseen.

Lause 4.27. Kun $n \geq 3$, niin

$$M_1^L(n) \geq \frac{3 \cdot 2^n}{3n-2}.$$

Esimerkki 4.28. Myöhemmin nähdään, että edellisen lauseen antama alaraja saavutetaan, kun $n = 5$, mikä tarkoittaa, että sitä ei voida enää yleisesti parantaa. Myös lauseen 4.17 saavutetaan, kun $n = 5$ ($M_1(5) = 10$) eli sitäkään ei voida yleiseti parantaa. Taulukossa 1 on vertailtu edellisen lauseen antamaa alarajaa luvulle $M_1^L(n)$ ja lauseen 4.17 antamaa alarajaa luvulle $M_1(n)$ sekä pallopeittorajan (lause 4.3) antamaa alarajaa 1-peittokoodin koolle eli luvulle $K(n,1)$, kun $3 \leq n \leq 10$. Edellisen lauseen antaman alarajan luvulle $M_1^L(n)$ ja pallopeittorajan antaman alarajan luvulle $K(n,1)$ suhde on

$$\frac{\frac{3 \cdot 2^n}{3n-2}}{\frac{2^n}{n+1}} = 1 + \frac{5}{3n-2}.$$

Tämä suhde lähestyy lukua 1, kun $n \to \infty$. Lauseen 4.17 antaman alarajan luvulle $M_1(n)$ ja pallopeittorajan antaman alarajan luvulle $K(n,1)$ suhde on puolestaan

$$\frac{nV(n,1)}{V(n,2)} = 2 - \frac{4}{n^2+n+2}.$$

Tämä suhde lähestyy lukua 2, kun $n \to \infty$. Nämä ovat mielenkiintoisia havaintoja ja antavat viitteitä siihen suuntaan, että binäärisessä hyperkuutiossa lokaalisti 1-identifioivien koodien luokka olisi lähempänä 1-peittokoodien luokkaa kuin 1-identifioivien koodien luokkaa.

4.2.4 Ylärajoja luvulle $M_1^L(n)$

Esitetään nyt joitain yleisiä konstruktioita lineaarisille lokaalisti 1-identifioiville koodeille.

Lause 4.29. Olkoon $m \geq 3$ ja $n = 2^m - 2$. Tällöin

$$M_1^L(n) \leq 2^{2^m-m-1}.$$

n	Alaraja luvulle $M_1^L(n)$	Alaraja luvulle $M_1(n)$	Pallopeittoraja
3	4	4	2
4	5	6	4
5	8	10	6
6	12	18	10
7	21	31	16
8	35	56	29
9	62	101	52
10	110	183	94

Taulukko 1: Lauseen 4.27 antamia alarajoja luvulle $M_1^L(n)$ ja lauseen 4.17 antamia alarajoja luvulle $M_1(n)$ sekä pallopeittorajan antamia alaroja luvulle $K(n, 1)$ pienillä luvun n arvoilla.

Todistus. Tarkastellaan koodia $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$, jonka tarkistusmatriisi on

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}_{m-1} \mid \boldsymbol{H}_{m-1}),$$

missä $\boldsymbol{H}_{m-1}$ on binäärisen $(2^{m-1} - 1)$-pituisen Hammingin koodin tarkistusmatriisi. Näin ollen matriisi $\boldsymbol{H}$ sisältää jokaisen $(m - 1)$-pituisen nollasanasta eroavan binäärisanan pystyrivinään täsmälleen kaksi kertaa. Olkoot $\boldsymbol{h}_1^T, \ldots, \boldsymbol{h}_n^T$ matriisin $\boldsymbol{H}$ pystyrivit.

Olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Koska $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i)^T = \boldsymbol{H}\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}_i^T = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{h}_i^T \neq \boldsymbol{0}$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$, niin $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$. Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{x} \notin C$ eli $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{h}_k$ jollakin $k \in \{1, \ldots, n\}$. Koska matriisi $\boldsymbol{H}$ sisältää jokaisen pystyrivinsä kaksi kertaa, niin $h_k = h_l$ jollakin $l \in \{1, \ldots, n\}, l \neq k$. Näin ollen

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_k)^T = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_l)^T$$

eli $I_{C,1}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_l\}$, koska $\boldsymbol{H}$ sisältää jokaisen pystyrivinsä täsmälleen kaksi kertaa. Lauseen 4.25 nojalla C on lokaalisti 1-identifioiva koodi ja lisäksi sen koodisanojen lukumäärä on

$$|C| = 2^{2^m - 2 - (m-1)} = 2^{2^m - m - 1},$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Esimerkki 4.30. Edellisen lauseen nojalla koodi $C \subseteq \mathbb{F}_2^6$, jonka tarkistusmatriisi on

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on lokaalisti 1-identifioiva koodi ja näin ollen

$$M_1^L(6) \leq 16.$$

Lauseen 4.27 nojalla

$$M_1^L(6) \geq \frac{3 \cdot 2^6}{3 \cdot 6 - 2} = 12$$

eli $M_1^L(6) \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$.

Esimerkki 4.31. Olkoon $n = 2^m - 2$. Lause 4.27 antaa alarajan

$$M_1^L(n) \geq \frac{3 \cdot 2^{2^m-2}}{3 \cdot (2^m - 2) - 2} = \frac{3 \cdot 2^{2^m-5}}{3 \cdot 2^{m-3} - 1} = a$$

ja lause 4.29 antaa ylärajan

$$M_1^L(n) \leq 2^{2^m-m-1} = y.$$

Näiden lukujen suhde on

$$\frac{y}{a} = \frac{2^{2^m-m-1} \cdot (3 \cdot 2^{m-3} - 1)}{3 \cdot 2^{2^m-5}} = 2 - \frac{1}{3 \cdot 2^{m-4}}$$

ja $\frac{y}{a} \to 2$, kun $m \to \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että suurilla luvun m arvoilla lauseen 4.29 antama yläraja antaa lähes kaksi kertaa liian suuren koodin, jos optimaalisen lokaalisti 1-identifioivan koodin koko on lähellä alarajaa.

Lause 4.29 antaa ylärajan luvulle $M_1^L(n)$, kun n on tiettyä muotoa. Tutkitaan nyt löydettäisiinkö yleisimpikin konstruktio antamalla sopiva tarkistusmatriisi. Lähdetään taas liikkeelle Hammingin koodin tarkistusmatriisista $\boldsymbol{H}_s$. Tarkastellaan tällä kertaa lineaarista koodia $C \subseteq \mathbb{F}_2^{2^s-1+k}$, jonka tarkistusmatriisi on

$$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{H}_s \mid \mathbf{0}_{s \times k})$$

– siis $(2^s - 1)$-pituisen Hammingin koodin tarkistusmatriisi, jonka perään on lisätty k kappaletta nollasarakkeita. Jos $k = 0$, niin C on $(2^s - 1)$-pituinen

Hammingin koodi, jolloin jokainen sana on 1-peitetty yksikäsitteisellä koodisanalla eikä C näin ollen ole lokaalisti 1-identifioiva koodi. Jos $k = 1$, on jokaisella koodisanalla täsmälleen yksi koodisananaapuri eikä C näin ollen 1-erota näitä koodisananaapureita.

Oletetaan sitten, että $k \geq 2$. Jos $\boldsymbol{c} \in C$, niin $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| = k + 1 \geq 3$. Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{x} \notin C$. Tällöin $|I_{C,1}(\boldsymbol{x})| = 1$, koska jokainen nollasta eroava pystyrivi esiintyy täsmälleen kerran tarkistusmatriisin $\boldsymbol{H}$ pystyrivinä. Näin ollen C on lauseen 4.24 nojalla lokaalisti 1-identifioiva koodi ja lisäksi sen koodisanojen lukumäärä on

$$|C| = 2^{n-s} = 2^{2^s-1+k-s}.$$

Saadaan seuraava lause.

Lause 4.32. Olkoon $n = 2^m + k - 1$, missä $m \geq 2$ ja $k \geq 2$. Tällöin

$$M_1^L(n) \leq 2^{2^m+k-m-1}.$$

Huomautus 4.33. Edellinen lause antaa yksikäsitteisen konstruktion, kun $n \in \{5, 6, 7, 8\}$. Kun $n \geq 9$, saadaan useampi konstruktio. Näistä pienimmän ylärajan antaa kuitenkin se konstruktio, missä m on mahdollisimman suuri ja k mahdollisimman pieni.

Lause 4.34.

$$M_1^L(5) = 8.$$

Todistus. Lauseen 4.27 nojalla $M_1^L(5) \geq 8$. Toisaalta $5 = 2^2 + 2 - 1$ ja lauseen 4.32 nojalla

$$M_1^L(5) \leq 2^{2^2+2-2-1} = 8.$$

□

Esimerkki 4.35. Olkoon $n = 2^m - 2$. Lauseen 4.32 nojalla koodi C_1, jonka tarkistusmatriisi on

$$\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{H}_{m-1} \mid \mathbf{0}_{(m-1)\times(2^{m-1}-1)}\right),$$

on lokaalisti 1-identifioiva koodi. Lauseen 4.29 mukaan myös C_2, jonka tarkistusmatriisi on

$$\boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{H}_{m-1} \mid \boldsymbol{H}_{m-1}),$$

on lokaalisti 1-identifioiva koodi. Nämä ovat samankokoiset koodit mutta olennaisesti erilaiset. Koodi C_1 1-peittää jokaisen koodisanan 2^{m-1}:llä koodisanalla ja jokaisen ei-koodisanan yhdellä koodisanalla kun taas koodi C_2 1-peittää jokaisen koodisanan yhdellä koodisanalla ja jokaisen ei-koodisanan kahdella koodisanalla.

Esimerkki 4.36. Olkoon $n = 2^m + k - 1$, missä $m \geq 2$ ja $k \geq 2$. Taas saadaan lauseesta 4.27 alaraja

$$M_1^L(n) \geq \frac{3 \cdot 2^{2^m+k-1}}{3 \cdot (2^m + k - 1) - 2} = a$$

ja lause 4.32 antaa ylärajan y. Näiden suhde on

$$\begin{aligned}\frac{y}{a} &= \frac{2^{2^m+k-m-1} \cdot (3 \cdot (2^m + k - 1) - 2)}{3 \cdot 2^{2^m+k-1}} \\ &= 1 + \frac{3k-5}{3 \cdot 2^m}.\end{aligned}$$

Huomataan, että kun k on pieni, niin $\frac{y}{a} \to 1$, kun $m \to \infty$. Tämä tarkoittaa, että pienillä luvun k arvoilla päästään lähelle alarajaa. Saadaan esimerkiksi, että

$$M_1^L(9) \in \{62, 63, 64\}.$$

5 Lokaalista identifioinnista äärettömissä hiloissa

Tutkitaan vielä, mitä voidaan sanoa lokaalisti 1-identifioivista ja lokaalisti 1-paikallistavista-dominoivista koodeista joissakin *äärettömissä hiloissa* eli graafeissa, joiden pistejoukkona on $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Määritellään seuraavaksi tutkittavat hilat. Nämä graafit on esitetty kuvassa 4.

- *Neliöhila* on graafi $\mathcal{S} = (\mathbb{Z}^2, E_\mathcal{S})$, missä

$$E_\mathcal{S} = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \mid \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}\}.$$

- *Tiiliseinä* on graafi $\mathcal{H} = (\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{H}})$, missä

$$E_{\mathcal{H}} = \{\{\boldsymbol{u} = (i,j), \boldsymbol{v}\} \mid \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, (-1)^{i+j+1})\}\}.$$

- *Kolmiohila* on graafi $\mathcal{T} = (\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{T}})$, missä

$$E_{\mathcal{T}} = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \mid \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1,1), (-1,-1)\}\}.$$

- *Kuningasgraafi* on graafi $\mathcal{K} = (\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{K}})$, missä

$$E_{\mathcal{K}} = \{\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \mid \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}\}.$$

Olkoon G jokin näistä neljästä äärettömästä hilasta ja olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ koodi graafissa G. Koodin C tiheys $D(C)$ määritellään kaavalla

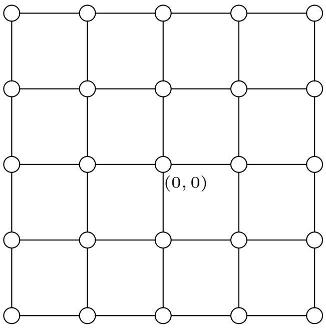
$$D(C) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|},$$

missä $Q_n = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid |i| \leq n, |j| \leq n\}$. Identifioivia koodeja ja paikallistavia-dominoivia koodeja näissä graafeissa on tutkittu laajasti esimerkiksi artikkeleissa [1, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 18, 20, 23, 24, 28]. Taulukossa 2 on listattu optimaalisten 1-identifioivien ja 1-paikallistavien-dominoivien koodien tiheyksiä näissä graafeissa. Merkinnöillä $\gamma_r^{ID}(G)$, $\gamma_r^{LD}(G)$, $\gamma_r^{L-ID}(G)$ ja $\gamma_r^{L-LD}(G)$ tarkoitetaan optimaalisten r-identifioivien, r-paikallistavien-dominoivien, lokaalisti r-identifioivien ja lokaalisti r-paikallistavien-dominoivien koodien tiheyksiä graafissa G. Huomaa, että luvun $\gamma_1^{ID}(\mathcal{H})$ tarkkaa arvoa ei tunneta. Tiedetään kuitenkin, että $\gamma_2^{ID}(\mathcal{H}) = \frac{4}{19}$ ([23]).

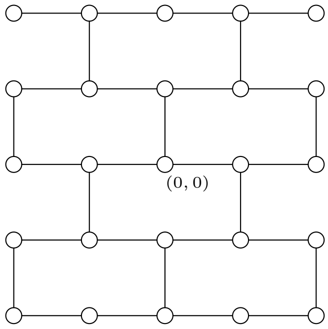
G	$\mathcal{S}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{K}$
$\gamma_1^{ID}(G)$	$\frac{7}{20}$ ([1])	$\frac{5}{12}$ ([12]) - $\frac{3}{7}$ ([8])	$\frac{1}{4}$ ([24])	$\frac{2}{9}$ ([6, 9])
$\gamma_1^{LD}(G)$	$\frac{3}{10}$ ([28])	$\frac{1}{3}$ ([20])	$\frac{13}{57}$ ([18])	$\frac{1}{5}$ ([20])

Taulukko 2: Tunnettuja arvoja optimaalisten 1-identifioivien ja 1-paikallistavien-dominoivien koodien tiheyksille äärettömissä hiloissa.

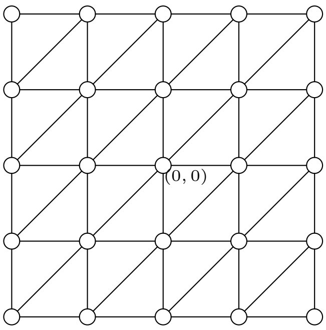
Lauseen 2.11 tulos yleistyy luonnollisella tavalla äärettömille hiloille.



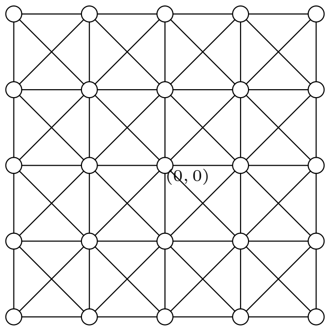
(a) Neliöhila $\mathcal{S}$



(b) Tiiliseinä $\mathcal{H}$



(c) Kolmiohila $\mathcal{T}$



(d) Kuningasgraafi $\mathcal{K}$

Kuva 4: Kuvia äärettömistä hiloista osajoukossa Q_2.

Lause 5.1. Olkoon G jokin esitellyistä äärettömistä hiloista. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ r-peittokoodi graafissa G ja oletetaan, että $s(\boldsymbol{c}) \leq \alpha$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$. Tällöin

$$D(C) \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Todistus. Olkoon C r-peittokoodi graafissa G ja oletetaan, että $s(\boldsymbol{c}) \leq \alpha$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{c} \in C \cap Q_{n+r}} s(\boldsymbol{c}) &= \sum_{\boldsymbol{c} \in C \cap Q_{n+r}} \sum_{\boldsymbol{u} \in B_r(\boldsymbol{c})} \frac{1}{|I_{C,r}(\boldsymbol{u})|} \\
&\geq \sum_{\boldsymbol{u} \in Q_n} |I_{C,r}(\boldsymbol{u})| \cdot \frac{1}{|I_{C,r}(\boldsymbol{u})|} \\
&= |Q_n|.
\end{aligned}$$

Koska oletuksen mukaan $s(\boldsymbol{c}) \leq \alpha$ kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$, niin

$$|Q_n| \leq \sum_{\boldsymbol{c} \in C \cap Q_{n+r}} s(\boldsymbol{c}) \leq |C \cap Q_{n+r}| \cdot \alpha$$

ja näin ollen

$$D(C) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|C \cap Q_n|}{|Q_n|} \geq \limsup_{n \to \infty} \frac{|C \cap Q_n|}{|C \cap Q_{n+r}| \cdot \alpha} \geq \frac{1}{\alpha}.$$

□

Tutkitaan seuraavaksi lukujen $\gamma_1^{L-ID}(G)$ ja $\gamma_1^{L-LD}(G)$ arvoja, kun G on jokin näistä neljästä hilasta.

5.1 Neliöhila ja tiiliseinä

Lause 5.2.

$$\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{S}) = \frac{1}{5}$$

ja

$$\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}.$$

Todistus. Koska $\mathcal{S}$ ja $\mathcal{H}$ ovat kolmiovapaita graafeja, niin lokaalisti 1-paikallistavien-dominoivien koodien luokka on sama kuin 1-peittokoodien luokka näissä graafeissa lauseen 2.9 nojalla.

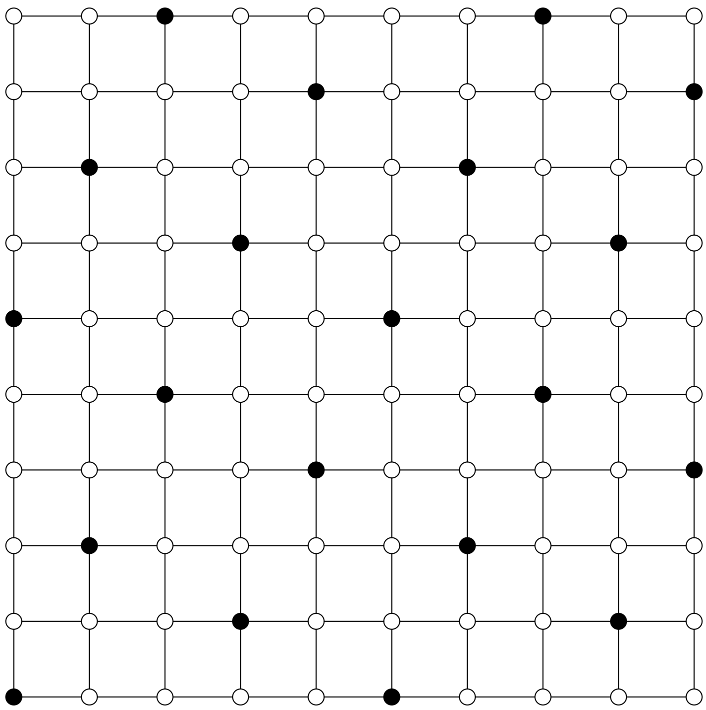
Koodi (kuva 5)

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, 2x + 5k) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

on 1-peittokoodi graafissa $\mathcal{S}$. Koodi (kuva 6)

$$C' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(2x, x + 2k) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

on 1-peittokoodi graafissa $\mathcal{H}$. Nämä koodit ovat optimaalisia, koska koodisanakeskiset 1-säteiset pallot partitioivat joukon $\mathbb{Z}^2$. $\square$

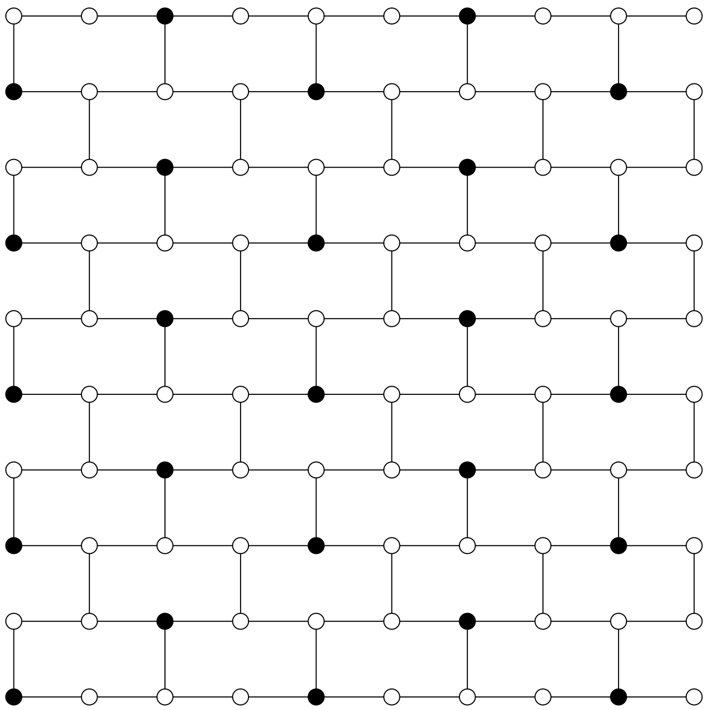


Kuva 5: Optimaalinen 1-peittokoodi ja lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi neliöhilassa.

Lemma 5.3. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{S}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{23}{6}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.



Kuva 6: Optimaalinen 1-peittokoodi ja lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi tiiliseinällä.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{S}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Jos $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$, niin tällöin jokaisella koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapurilla on oltava toinenkin koodisananaapuri, jotta koodi C 1-erottaisi ne naapuristaan $\boldsymbol{c}$. Tällöin $s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 < \frac{23}{6}$. Oletetaan sitten, että koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri eli että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ ja olkoon $\boldsymbol{c}'$ koodisanan $\boldsymbol{c}$ koodisananaapuri. Jotta koodi C 1-erottaisi koodisananaapurit $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c}'$ toisistaan, on toisella niistä oltava vähintään kaksi koodisananaapuria eli on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$ tai $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}')| \geq 3$. Jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$, niin $s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = \frac{10}{3} < \frac{23}{6}$. Jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}')| \geq 3$, niin $s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 3 \cdot 1 = \frac{23}{6}$. $\square$

Edellinen lemma ja lause 5.1 antavat seuraavan lauseen.

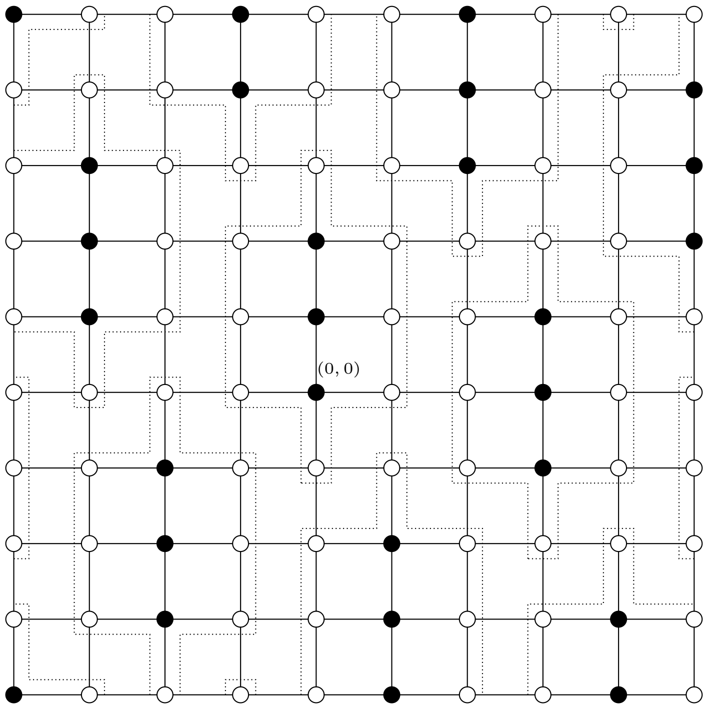
Lause 5.4.

$$\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{S}) \geq \frac{6}{23} \ (\approx 0.26).$$

Kuvassa 7 on esitetty konstruktio lokaalisti 1-identifioivalle koodille neliöhilassa. Näin ollen saadaan seuraava lause.

Lause 5.5.

$$\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{S}) \leq \frac{3}{11} \; (\approx 0.27).$$



Kuva 7: Lokaalisti 1-identifioiva koodi neliöhilassa.

Lemma 5.6. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{H}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{17}{6}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{H}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Jos $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$, niin tällöin jokainen koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapuri on 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla ja tällöin $s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} < \frac{17}{6}$. Oletetaan sitten, että koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri eli että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$ ja olkoon $\boldsymbol{c}'$ koodisanan $\boldsymbol{c}$ koodisananaapuri. Jotta $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c}'$ 1-erottuisivat, on toisella niistä oltava vähintään kaksi koodisananaapuria eli on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$ tai $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}')| \geq 3$. Jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 3$, niin $s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{3} < \frac{17}{6}$. Jos $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}')| \geq 3$, niin $s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 = \frac{17}{6}$. $\square$

Saadaan seuraava lause.

Lause 5.7.

$$\frac{6}{17} \leq \gamma_1^{L-ID}(\mathcal{H}) \leq \frac{3}{7}.$$

Todistus. Edellisen lemman ja lauseen 5.1 nojalla $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{H}) \geq \frac{6}{17}$. Toisaalta, koska jokainen 1-identifioiva koodi on lokaalisti 1-identifioiva, saadaan yläraja $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{H}) \leq \gamma_1^{ID}(\mathcal{H}) \leq \frac{3}{7}$ taulukosta 2. □

5.2 Kolmiohila

Lemma 5.8. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi graafissa $\mathcal{T}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{11}{2}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi graafissa $\mathcal{T}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Jos koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on koodisananaapuri, niin $s(\boldsymbol{c}) \leq 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 5 < \frac{11}{2}$. Oletetaan sitten, että $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$. Koodi C voi 1-peittää korkeintaan kolme avoimen naapuruston $N(\boldsymbol{c})$ pisteistä ainoastaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$, sillä sen on 1-erotettava ei-koodisananaapurit toisistaan. Näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 4 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2}.$$

□

Saadaan seuraava lause.

Lause 5.9.

$$\frac{2}{11} \leq \gamma_1^{L-LD}(\mathcal{T}) \leq \frac{13}{57}.$$

Todistus. Edellisen lemman ja lauseen 5.1 nojalla $\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{T}) \geq \frac{2}{11}$. Toisaalta saadaan taas yläraja $\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{T}) \leq \gamma_1^{LD}(\mathcal{T}) = \frac{13}{57}$ taulukosta 2. □

Lemma 5.10. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{T}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 4$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{T}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Jos $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$, niin jokainen joukon $N(\boldsymbol{c})$ piste on 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla ja näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Oletetaan sitten, että koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri ja olkoon $\boldsymbol{c}' \in N(\boldsymbol{c})$. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} + (1,0)$. Koodisana $\boldsymbol{c}'$ ei 1-peitä joukon $N[\boldsymbol{c}]$ pisteitä $\boldsymbol{c} + (0,1), \boldsymbol{c} + (-1,0)$ ja $\boldsymbol{c} + (-1,-1)$. Voidaan olettaa, että näistä kaksi on 1-peitetty ainoastaan yhdellä koodisanalla eli koodisanalla $\boldsymbol{c}$, sillä muutoinhan olisi $s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4$ kuten edellä. Jos $\boldsymbol{c} + (-1,0)$ on 1-peitetty ainoastaan yhdellä koodisanalla on sen naapureilla $\boldsymbol{c} + (0,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (-1,-1)$ oltava vähintään kaksi koodisananaapuria, sillä C on lokaalisti 1-identifioiva koodi. Voidaan siis olettaa, että $\boldsymbol{c} + (0,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(-1,-1)$ on 1-peitetty ainostaan yhdellä koodisanalla eli koodisanalla $\boldsymbol{c}$ eli että $I_{C,1}(\boldsymbol{c}+(0,1)) = I_{C,1}(\boldsymbol{c}+(-1,-1)) = \{\boldsymbol{c}\}$. Tällöin $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}+(-1,0))| \geq 2$ ja $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'\}$. Koodisana $\boldsymbol{c}'$ 1-peittää joukon $N[\boldsymbol{c}]$ pisteet $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}+(1,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (0,-1)$. Koska $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'\}$, on pisteet $\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c} + (1,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (0,-1)$ 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla, sillä koodin C on 1-erotettava ne naapuristaan $\boldsymbol{c}$.

Siis tässäkin tapauksessa

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

□

Lause 5.11.

$$\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{T}) = \gamma_1^{ID}(\mathcal{T}) = \frac{1}{4}.$$

Todistus. Edellisen lemman ja lauseen 5.1 nojalla $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{T}) \geq \frac{1}{4}$. Toisaalta $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{T}) \leq \gamma_1^{ID}(\mathcal{T}) = \frac{1}{4}$ ([24]). Saadaan väite. □

5.3 Kuningasgraafi

Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$ ja katsotaan avointa naapurustoa $N(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} + (\pm 1, 0), \boldsymbol{x} + (0, \pm 1), \boldsymbol{x}+(\pm 1, \pm 1)\}$ kuningasgraafissa $\mathcal{K}$. Sanotaan pisteitä $\boldsymbol{x}+(\pm 1,0), \boldsymbol{x}+$

$(0, \pm 1)$ pisteen $\boldsymbol{x}$ *sisänaapureiksi* ja pisteitä $\boldsymbol{x} + (\pm 1, \pm 1)$ pisteen $\boldsymbol{x}$ *kulmanaapureiksi.* Jos $\boldsymbol{y}$ on pisteen $\boldsymbol{x}$ sisänaapuri, niin $|N[\boldsymbol{y}] \cap N[\boldsymbol{x}]| = 6$. Jos $\boldsymbol{y}$ on pisteen $\boldsymbol{x}$ kulmanaapuri, niin $|N[\boldsymbol{y}] \cap N[\boldsymbol{x}]| = 4$. Pisteen $\boldsymbol{x}$ sisänaapureita sanotaan *vierekkäisiksi*, jos niiden euklidinen etäisyys on $\sqrt{2}$ ja *vastakkaisiksi*, jos niiden euklidinen etäisyys on 2. Pisteen $\boldsymbol{x}$ kulmanaapureita sanotaan vierekkäisiksi, jos niiden euklidinen etäisyys on 2 ja vastakkaisiksi, jos niiden euklidinen etäisyys on $2\sqrt{2}$. Pisteen $\boldsymbol{x}$ sisänaapuri on pisteen $\boldsymbol{x}$ vierekkäisten kulmanaapurien välissä, jos sen euklidinen etäisyys molemmista on 1.

Lemma 5.12. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi graafissa $\mathcal{K}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{17}{3}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi graafissa $\mathcal{K}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Todetaan aluksi, että joukossa $N(\boldsymbol{c})$ voi olla korkeintaan kaksi pistettä, jotka koodi C 1-peittää ainoastaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$. Oletetaan, että on sellaiset kolme koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapuria $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in N(\boldsymbol{c})$, että $I_{C,1}(\boldsymbol{u}) = I_{C,1}(\boldsymbol{v}) = I_{C,1}(\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{c}\}$. Nämä kaikki eivät voi olla koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapureita, sillä muutoin yksi näistä olisi kahden muun naapuri eikä koodi C 1-erottaisi näitä naapureita. Jos kaksi näistä on koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapureita, on niiden oltava vastakkaisia, sillä vierekkäiset sisänaapurit ovat keskenään naapureita. Mutta tällöin jokainen koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapuri on näistä toisen naapuri eikä koodi C 1-erota näitä naapureita, jos koodi C 1-peittää ne ainoastaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$. Jos kaksi näistä pisteistä on koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita ja yksi koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuri, on näiden kulmanaapurien oltava vierekkäisiä, sillä jos ne olisivat vastakkaisia, olisi jokainen koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuri näistä toisen naapuri. Voidaan siis olettaa, että esimerkiksi $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat koodisanan $\boldsymbol{c}$ vierekkäisiä kulmanaapureita ja $\boldsymbol{w}$ on se koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuri, joka ei ole kulmanaapurien $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ naapuri. Mutta tällöin C ei 1-erota kulmanaapurien $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välissä olevaa koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuria naapureistaan $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$. Kuvan 8 asetelmassa 1 on kuvattu tätä tilannetta, kun $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + (1, 1), \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + (-1, 1)$ ja $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} + (0, -1)$. Jos kaikki nämä pisteet $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ja $\boldsymbol{w}$ ovat koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita, on kaksi näistä vierekkäisiä, eikä koodi C taaskaan 1-erota näistä näiden välissä olevaa sisänaapuria. Näin ollen joukossa $N(\boldsymbol{c})$ voi olla korkeintaan kaksi pistettä, jotka C 1-peittää ainostaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$.

Oletetaan, että $|I_{C,1}(\boldsymbol{c})| \geq 2$. Tällöin juuri todetun nojalla joukossa $N(\boldsymbol{c})$ voi olla korkeintaan kaksi pistettä, jotka koodi C 1-peittää ainoastaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$ ja koska oletuksen mukaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri, joukossa $N[\boldsymbol{c}]$ voi olla korkeintaan kaksi pistettä, jotka koodi C 1-peittää ainoastaan koodisanalla $\boldsymbol{c}$. Näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 2 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{2} < \frac{17}{3}.$$

Oletetaan sitten, että $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$ ja että on olemassa sellaiset kaksi koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapuria $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$, että $I_{C,1}(\boldsymbol{u}) = I_{C,1}(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{c}\}$. Muutoinhan olisi $s(\boldsymbol{c}) \leq 2 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{2} < \frac{17}{3}$ kuten edellä. Näytetään, että tällöin vähintään kaksi joukon $N(\boldsymbol{c})$ pisteistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Tällöinhän

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{3}.$$

Pisteet $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat joko koodisanan $\boldsymbol{c}$ samaa tyyppiä olevia naapureita tai eri tyyppiä olevia naapureita.

Oletetaan aluksi, että molemmat $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita. Nämä eivät voi olla vierekkäisiä koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita, sillä tällöinhän C ei 1-erottaisi niitä niiden välissä olevasta sisänaapurista kuten yllä todettiin. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + (1, 1)$ ja $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + (-1, -1)$. Koska koodi C on lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi, niin sen on 1-erotettava ei-koodisanat $\boldsymbol{c} + (0, 1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1, 0)$ ei-koodisananaapuristaan $\boldsymbol{u}$, jolle $I_{C,1}(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{c}\}$ eli on oltava $\boldsymbol{c} + (-1, 2) \in C$ ja $\boldsymbol{c} + (2, -1) \in C$. Samoin koodin C on 1-erotettava ei-koodisanat $\boldsymbol{c} + (-1, 0)$ ja $\boldsymbol{c} + (0, -1)$ ei-koodisananaapuristaan $\boldsymbol{v}$, jolle $I_{C,1}(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{c}\}$ eli on oltava $\boldsymbol{c} + (-2, 1) \in C$ ja $\boldsymbol{c} + (1, -2) \in C$. Saadaan asetelma 2. Siis $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + (1, -1))| \geq 3$ ja $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + (-1, 1))| \geq 3$.

Oletetaan sitten, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat molemmat koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapureita. Tällöin niiden on oltava vastakkaisia, sillä muutoinhan ne olisivat naapureita. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + (1, 0)$ ja $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + (-1, 0)$. Koodin C on 1-erotettava ei-koodisana $\boldsymbol{c} + (0, 1)$ ei-koodisananaapureistaan $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$, joten on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + (0,1))| \geq 2$ eli $\boldsymbol{c} + (1,2) \in C, \boldsymbol{c} + (0,2) \in C$ tai $\boldsymbol{c} + (-1,2) \in C$. Koska jokainen näistä on pisteen $\boldsymbol{c}+(1,1)$ tai pisteen $\boldsymbol{c}+(-1,1)$ naapuri, on vähintään yksi pisteistä $\boldsymbol{c} + (-1,1), \boldsymbol{c} + (0,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,1)$ 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Tekemällä sama päättely pisteelle $\boldsymbol{c} + (0,-1)$ todetaan, että vähintään yksi pisteistä $\boldsymbol{c} + (-1,-1), \boldsymbol{c} + (0,-1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,-1)$ on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Siis vähintään kaksi joukon $N(\boldsymbol{c})$ pisteistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Asetelma 3 havainnollistaa tätä tilannetta.

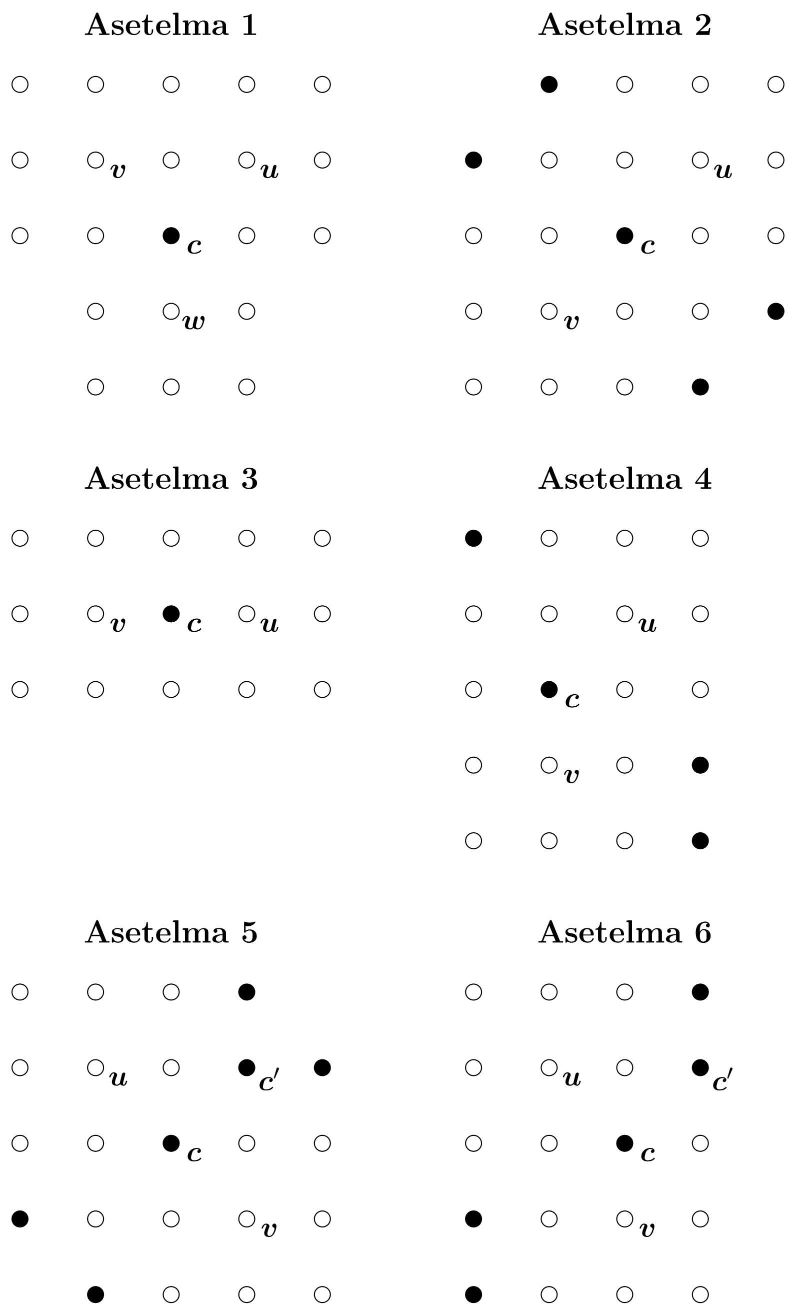
Oletetaan vielä, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat eri tyyppiä olevia koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapureita. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + (1,1)$ ja $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + (0,-1)$. Nyt on oltava $\boldsymbol{c} + (2,-1) \in C$ ja $\boldsymbol{c} + (-1,2) \in C$, jotta koodi C 1-erottaisi ei-koodisanat $\boldsymbol{c} + (1,0)$ ja $\boldsymbol{c} + (0,1)$ ei-koodisananaapuristaan $\boldsymbol{u}$. On oltava myös $\boldsymbol{c} + (2,-2) \in C$, jotta C 1-erottaisi ei-koodisananaapurit $\boldsymbol{c} + (1,0)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,-1)$. Siis $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}+(1,-1))| = 3$. Lisäksi on oltava $|I_{C,1}(\boldsymbol{c}+(-1,1))| \geq 3$, jotta C 1-erottaisi ei-koodisananaapurit $\boldsymbol{c}+(-1,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(0,1)$. Siis tässäkin tapauksessa vähintään kaksi joukon $N(\boldsymbol{c})$ pisteistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Tätä kuvaa asetelma 4. □

Saadaan seuraava lause.

Lause 5.13.

$$\frac{3}{17} \leq \gamma_1^{L-LD}(\mathcal{K}) \leq \frac{1}{5}.$$

Todistus. Edellisen lemman ja lauseen 5.1 nojalla $\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{K}) \geq \frac{3}{17}$. Saadaan yläraja $\gamma_1^{L-LD}(\mathcal{K}) \leq \gamma_1^{LD}(\mathcal{K}) = \frac{1}{5}$ taulukosta 2. □



Kuva 8: Asetelmia kunigasgraafissa. Viivat on jätetty piirtämättä yksinkertaisuuden vuoksi.

Lemma 5.14. Olkoon $C \subseteq \mathbb{Z}^2$ lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{K}$. Tällöin

$$s(\boldsymbol{c}) \leq \frac{19}{4}$$

kaikilla $\boldsymbol{c} \in C$.

Todistus. Olkoon C lokaalisti 1-identifioiva koodi graafissa $\mathcal{K}$ ja olkoon $\boldsymbol{c} \in C$. Oletetaan aluksi, että $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$. Tällöin jokainen koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapuri on 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla, jotta ne 1-erottuisivat naapuristaan $\boldsymbol{c}$. Vähintään kaksi koodisanan $\boldsymbol{c}$ naapureista on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Tämä nähdään toteamalla, että koska $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}\}$ ja $|I_{C,1}(\boldsymbol{c} + (1,0))| \geq 2$, on oltava $\boldsymbol{c} + (2,1) \in C$, $\boldsymbol{c} + (2,0) \in C$ tai $\boldsymbol{c} + (2,-1) \in C$ ja koska koodin C on 1-erotettava piste $\boldsymbol{c} + (1,0)$ naapureistaan $\boldsymbol{c} + (1,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,-1)$, on koodin C 1-peitettävä vähintään yksi pisteistä $\boldsymbol{c} + (1,1)$, $\boldsymbol{c} + (1,0)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,-1)$ vähintään kolmella koodisanalla. Tekemällä samanlainen päättely pisteelle $\boldsymbol{c} + (-1,0)$, todetaan, että koodin C on 1-peitettävä vähintään yksi pisteistä $\boldsymbol{c} + (-1,1)$, $\boldsymbol{c} + (-1,0)$ ja $\boldsymbol{c} + (-1,-1)$ vähintään kolmella koodisanalla. Siis

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} < \frac{19}{4}.$$

Oletetaan sitten, että koodisanalla $\boldsymbol{c}$ on vähintään yksi koodisananaapuri ja olkoon $\boldsymbol{c}' \in N(\boldsymbol{c})$. Oletetaan aluksi, että $\boldsymbol{c}'$ on koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuri. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} + (1,0)$. Koodisana $\boldsymbol{c}'$ ei 1-peitä joukon $N[\boldsymbol{c}]$ pisteitä $\boldsymbol{c} + (-1,1)$, $\boldsymbol{c} + (-1,0)$ ja $\boldsymbol{c} + (-1,-1)$. Näistä korkeintaan yksi voi olla 1-peitetty ainoastaan yhdellä koodin C koodisanalla. Koodin C on 1-erotettava naapurit $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c}'$ eli toinen niistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Samoin koodin C on 1-erotettava naapurit $\boldsymbol{c} + (0,1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,1)$ eli toinen niistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla sekä naapurit $\boldsymbol{c} + (0,-1)$ ja $\boldsymbol{c} + (1,-1)$ eli toinen niistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 1 + 5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} < \frac{19}{4}.$$

Oletetaan sitten, että koodisana $\boldsymbol{c}'$ on koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapuri. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} + (1,1)$. Todetaan heti, että joukossa $N[\boldsymbol{c}]$ on oltava vähintään kaksi pistettä, jotka koodi C 1-peittää vähintään kolmella koodisanalla. Tosiaankin koodisana $\boldsymbol{c}'$ 1-peittää joukon $N[\boldsymbol{c}]$ pisteet $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}'$, $\boldsymbol{c}+(0,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,0)$. Koodin C on 1-erotettava naapurit $\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c'}$ eli toinen näistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Samoin naapureiden $\boldsymbol{c}+(0,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,0)$ on 1-erottuva koodin C suhteen, joten myös toinen näistä on 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Koodisana $\boldsymbol{c}'$ ei 1-peitä joukon $N[\boldsymbol{c}]$ pisteitä $\boldsymbol{c}+(-1,1)$, $\boldsymbol{c}+(-1,0)$, $\boldsymbol{c}+(-1,-1)$, $\boldsymbol{c}+(0,-1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,-1)$. Koska C on lokaalisti 1-identifioivana koodina erityisesti lokaalisti 1-paikallistava-dominoiva koodi, niin edellisen lemman todistuksen nojalla korkeintaan kaksi näistä pisteistä voi olla 1-peitetty ainostaan yhdellä koodisanalla eli koodisanalla $\boldsymbol{c}$. Oletetaan, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat tällaiset pisteet. Muuten olisi $s(\boldsymbol{c}) \leq 1+6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3} < \frac{19}{4}$. Koska ne koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapurit, joita koodisana $\boldsymbol{c}'$ ei 1-peitä, ovat keskenään naapureita, on vähintään toinen pisteistä $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapuri.

Oletetaan, että $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ ovat molemmat koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita. Pisteet $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ eivät voi olla vierekkäisiä koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapureita, sillä silloin koodi C ei 1-erottaisi niiden välissä olevaa koodisanan $\boldsymbol{c}$ sisänaapuria niistä eli on oltava $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}+(-1,1)$ ja $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}+(1,-1)$ (tai toisin päin). Jos $\boldsymbol{c}+(-1,-1)\in C$, niin tällöin se on 1-peitetty neljällä koodisanalla, koska koodin C on 1-erotettava se naapureistaan $\boldsymbol{c}+(-1,0)$ ja $\boldsymbol{c}+(0,-1)$, joista vähintään toinen on 1-peitetty kolmella koodisanalla, jotta koodi C 1-erottaisi ne toisistaan. Samoin todetaan, että koodisana $\boldsymbol{c}'$ on 1-peitetty vähintään neljällä koodisanalla sillä koodin C on 1-erotettava ne naapureistaan $\boldsymbol{c}+(0,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,0)$. Mutta tällöinhän $s(\boldsymbol{c}) \leq 2\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{4} < \frac{19}{4}$. Voidaan siis olettaa, että $\boldsymbol{c}+(-1,-1)\notin C$. Siis $I_{C,1}(\boldsymbol{c})=\{\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}'\}$. Koska koodin C on 1-erotettava piste $\boldsymbol{c}+(-1,0)$ naapuristaan $\boldsymbol{u}$, on oltava $\boldsymbol{c}+(-2,-1)\in C$. Samoin koodin C on 1-erotettava piste $\boldsymbol{c}+(0,-1)$ naapuristaan $\boldsymbol{v}$, joten on oltava $\boldsymbol{c}+(-1,-2)\in C$ ja koska koodin C on 1-erotettava pisteet $\boldsymbol{c}+(0,1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1,0)$ naapuristaan $\boldsymbol{c}$, on oltava $\boldsymbol{c}+(1,2)\in C$ ja $\boldsymbol{c}+(2,1)\in C$. Tätä tilannetta on havainnollistettu kuvan 8 asetelmassa 5. Näin ollen

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 2\cdot 1+3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{4}.$$

Oletetaan vielä, että $\boldsymbol{u}$ on koodisanan $\boldsymbol{c}$ kulmanaapuri ja $\boldsymbol{v}$ sisänaapuri. Kulmanaapuri $\boldsymbol{u}$ ei voi olla $\boldsymbol{c}+(-1,-1)$, koska $\boldsymbol{v}\in\{\boldsymbol{c}+(-1,0),\boldsymbol{c}+(0,-1)\}$ ja pisteet $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ eivät voi olla naapureita, sillä silloin koodi C ei 1-erottaisi niitä. Voidaan olettaa, että $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + (-1, 1)$ ja $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} + (0, -1)$. Muut vaihtoehdot ovat symmetrisiä. Tällöin $I_{C,1}(\boldsymbol{c}) = \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'\}$. On oltava $\boldsymbol{c} + (-2, -1) \in C$, jotta C 1-erottaisi pisteen $\boldsymbol{c} + (-1, 0)$ naapuristaan $\boldsymbol{u}$ ja jotta C 1-erottaisi myös naapurit $\boldsymbol{c}+(-1, 0)$ ja $\boldsymbol{c}+(-1, -1)$, on oltava lisäksi $\boldsymbol{c}+(-2, -2) \in C$. On oltava $\boldsymbol{c} + (1, 2) \in C$, sillä koodin C on 1-erotettava piste $\boldsymbol{c} + (0, 1)$ naapuristaan $\boldsymbol{c}$. Koska koodin C on 1-erotettava naapurit $\boldsymbol{c}+(0, 1)$ ja $\boldsymbol{c}+(1, 1)$, on piste $\boldsymbol{c}+(1, 1)$ 1-peitetty vähintään neljällä koodisanalla ja koska koodin C on 1-erotettava naapurit $\boldsymbol{c}+(1, 0)$ ja $\boldsymbol{c}$, on piste $\boldsymbol{c}+(1, 0)$ 1-peitetty vähintään kolmella koodisanalla. Jotta C 1-erottaisi naapurit $\boldsymbol{c} + (1, -1)$ ja $\boldsymbol{v}$, on piste $\boldsymbol{c} + (1, -1)$ 1-peitetty vähintään kahdella koodisanalla. Tätä havainnollistaa asetelma 6. Tässäkin tapauksessa

$$s(\boldsymbol{c}) \leq 2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}.$$

$\square$

Saadaan seuraava lause.

Lause 5.15.

$$\frac{4}{19} \leq \gamma_1^{L-ID}(\mathcal{K}) \leq \frac{2}{9}.$$

Todistus. Edellisen lemman ja lauseen 5.1 nojalla $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{K}) \geq \frac{4}{19}$. Taulukosta 2 saadaan yläraja $\gamma_1^{L-ID}(\mathcal{K}) \leq \gamma_1^{ID}(\mathcal{K}) = \frac{2}{9}$. $\square$

Viitteet

[1] Y. Ben-Haim, S. Litsyn: *Exact minimum density of codes identifying vertices in the square grid*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 19, pp. 69–82, 2005.

[2] N. Bertand, I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein: *Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles*, European Journal of Combinatorics, Vol. 25, pp. 969–987, 2004.

[3] U. Blass, I. Honkala, S. Litsyn: *Bounds on identifying codes*, Discrete Mathematics, Vol. 241, pp. 119–128, 2001.

[4] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein: *General bounds for identifying codes in some infinite regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 8(1), R39, 2001.

[5] I. Charon, I. Honkala, O. Hudry, A. Lobstein: *The minimum density of an identifying code in the king lattice*, Discrete Mathematics, Vol. 276, pp. 95–109, 2004.

[6] I. Charon, O. Hudry, A. Lobstein: *Identifying codes with small radius in some infinite regular graphs*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 9(1), R11, 2002.

[7] C. Chen, C. Lu, Z. Miao: *Identifying codes and locating-dominating sets on paths and cycles*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 159, pp. 1540–1547, 2011.

[8] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Zémor: *Bounds for codes identifying vertices in the hexagonal grid*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 13, pp. 492–504, 2000.

[9] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein, G. Zémor: *On codes identifying vertices in the two-dimensional square lattice with diagonals*, IEEE Trans. on Comput. 50 (2001) 174–176.

[10] G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn, A. Lobstein: *Covering Codes*, Elsevier 1997.

[11] C. J. Colbourn, P. J. Slater, L. K. Stewart: *Locating dominating sets in series parallel networks*, Congressus Numerantium, Vol. 56, pp. 135–162, 1987.

[12] A. Cukierman, G. Yu: *New bounds on the minimum density of an identifying code for the infinite hexagonal grid*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 161, pp. 2910–2924, 2013.

[13] G. Exoo, V. Junnila, T. Laihonen: *Locating-dominating codes in cycles*, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 49, pp. 177–194, 2011.

[14] G. Exoo, T. Laihonen, S. Ranto: *New bounds on binary identifying codes*, Discrete Applied Mathematics, Vol. 156, pp. 2250–2263, 2008.

[15] S. Gravier, J. Moncel, A. Semri: *Identifying codes of cycles*, European Journal of Combinatorics, Vol. 27, pp. 767–776, 2006.

[16] I. Honkala: *Coding Theory I*, luentomoniste, 2015.

[17] I. Honkala: *Coding Theory II*, luentomoniste, 2013.

[18] I. Honkala: *An optimal locating-dominating set in the infinite triangular grid*, Discrete Mathematics, Vol. 306, pp. 2670–2681, 2006.

[19] I. Honkala: *On r-locating-dominating sets in paths*, European Journal of Combinatorics, Vol. 30, pp. 1022–1025, 2009.

[20] I. Honkala, T. Laihonen: *On locating-dominating sets in infinite grids*, European Journal of Combinatorics, Vol. 27, pp. 218–227, 2006.

[21] I. Honkala, T. Laihonen, S. Ranto: *On locating-dominating codes in binary Hamming spaces*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 6, pp. 265–282, 2004.

[22] V. Junnila, T. Laihonen: *Optimal identifying codes in cycles and paths*, Graphs and Combinatorics, Vol. 28, pp. 469–481, 2012.

[23] V. Junnila, T. Laihonen: *Optimal lower bound for 2-identifying codes in the hexagonal grid*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. 19(2), P38, 2012.

[24] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty, L. B. Levitin: *On a new class of codes for identifying vertices in graphs*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-44, pp. 599–611, 1998.

[25] A. Lobstein: *Watching systems, identifying, locating-dominating and discriminating codes in graphs, a bibliography*, `https://www.lri.fr/~lobstein/debutBIBidetlocdom.pdf`.

[26] D. L. Roberts, F. S. Roberts: *Locating sensors in paths and cycles: the case of 2-identifying codes*, European Journal of Combinatorics, Vol. 29, pp. 72–82, 2008.

[27] P. J. Slater: *Dominating and reference sets in a graph*, J. Math. Phys. Sci. 22 (1988) 445–455.

[28] P. J. Slater: *Fault-tolerant locating-dominating sets*, Discrete Mathematics, Vol. 249, pp. 179–189, 2002.