Todennäköisyyslaskennan ViLLE-tehtäviä: Sähköisen oppimateriaalin kehittämistutkielma

Veli-Matti Katila
Pro Gradu -tutkielma
Matematiikka
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Turun yliopisto
Heinäkuu 2022

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

KATILA, VELI-MATTI:

Todennäköisyyslaskennan ViLLE-tehtäviä: Sähköisen oppimateriaalin kehittämistutkielma

Tutkielma, 87 s., 35 liites.
Matematiikka
Heinäkuu 2022

Tutkielman tarkoituksena on selvittää kirjallisuuden avulla matematiikan sähköisten tehtävien ominaisuuksia, etuja sekä haasteita. Sähköiset tehtävät sekä tieto- ja viestintäteknologian hyödyntäminen osana opiskelua on ilmiö, joka on saavuttanut tärkeän ja vankan aseman opetussuunnitelmissa sekä opetuksessa. Tutkielmassa käydään myös läpi kirjallisuudesta löytyneitä tutkielman kannalta olennaisia ydinasioita matematiikan opiskeluun ja oppimiseen liittyen.

Aikaisempien tutkimusten mukaan sähköisillä tehtävillä on toistaiseksi ristiriitaisia vaikutuksia opiskelijan oppimiseen. Matematiikan opiskelu ja oppiminen ovat hyvin monimutkaisia ja yksilöllisiä prosesseja, jolloin ei voida löytää selkeää yksimielisyyttä siitä, minkälaiset tehtävät ja opetus tuottavat parhaat oppimistulokset. Aiempien tutkimusten valossa voidaan kuitenkin todeta, että sähköisten tehtävien olennaisimmat edut oppimisen kannalta ovat mahdollinen motivaation kasvu ja ylläpito, opiskelijan saama välitön ja adaptiivinen palaute sekä sähköisten tehtävien vuorovaikutteisuus ja joustavuus.

Lisäksi tutkielmassa tuotetaan matemaattisia tehtäviä sähköiseen oppimisympäristöön. Sähköisenä oppimisympäristönä tässä tutkielmassa toimii Turun yliopistossa kehitetty ViLLE-järjestelmä. Matematiikan sähköisiä tehtäviä tuotettaessa tavoitteena on ollut ottaa huomioon kirjallisuudesta löydettyjä sähköisten tehtävien etuja ja hyödyntää niitä tehtävissä. Tuotettuja tehtäviä on viisi kappaletta ja ne ovat kohdistettu Turun yliopiston kurssille *Todennäköisyyslaskennan peruskurssi*. Kurssi on yliopiston perusopintotason kurssi, joka käsittelee todennäköisyyslaskentaa.

Tutkielmassa tuotetut tehtävät esitellään osana raportointia. Jokaisesta tehtävästä on toteutettu esimerkkisuoritus ViLLE-järjestelmässä. Suoritukset käydään kuvien ja selostuksen avulla läpi vaiheittain. Selostuksessa perustellaan tehtävien luonnissa käytettyjä ratkaisuja sekä sähköisiin tehtäviin liittyviä ominaisuuksia.

Asiasanat: matematiikka, todennäköisyyslaskenta, sähköiset tehtävät, sähköiset oppimiympäristöt

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Tämän tutkielman tarkoituksena on tuottaa sähköiseen oppimisympäristöön matemaattisia tehtäviä. Oppimisympäristönä toimii Turun yliopistossa kehitetty ViLLE-oppimisympäristö, jossa tietokoneavusteinen oppiminen on pelillistetty. Tuotetut matemaattiset tehtävät ovat todennäköisyyslaskennan tehtäviä, jotka on suunnattu Turun yliopiston kurssille *TILM3553 Todennäköisyyslaskennan peruskurssi*. Lisäksi tutkielmassa selvitetään kirjallisuuden avulla matematiikan tehtäviin liittyvää pedagogiikkaa ja tietokoneavusteista oppimista sähköisissä oppimisympäristöissä sekä siihen liittyviä pedagogisia ratkaisuja ja niiden vaikutusta oppimistuloksiin.

Nykyisessä suomalaisessa koulutuksessa, aina peruskoulusta korkeakouluihin saakka, tieto- ja viestintäteknologia on nostettu tärkeäksi työkaluksi kaikessa opetuksessa ja oppimisessa. Opetus- ja kulttuuriministeriön hallitusohjelman yhdeksi strategiseksi painopisteeksi on nimetty osaaminen ja koulutus. Erityisesti hallitus näkee tärkeänä tällä hetkellä oppimisympäristöjen modernisoinnin, digitalisaation sekä uuden pedagogiikan mahdollisuuksien hyödyntämisen oppimisessa. (Opetus- ja kulttuuriministeriö 2017.) Digitalisaatiolla tarkoitetaan tässä yhteydessä tieto- ja viestintäteknologisten laitteiden ja sovellusten sekä niiden hyödyntämisen yleistymistä. Näin ollen voitaisiin siis sanoa, että tieto- ja viestintäteknologia (myöh. tvt) ja sen myötä sähköiset oppimisympäristöt ja -alustat ovat tulleet pysyväksi ja merkittäväksi osaksi tämänhetkistä opetusta.

Esimerkkinä digitalisaatiosta toimii ylioppilaskokeiden sähköistäminen. Ruth (2015, 242) kertoo artikkelissaan, että perusteluna ylioppilaskokeen sähköistämiselle on argumentti siitä, että tietotekniikan soveltamisen tulisi olla osa jokaisen ihmisen yleissivistystä. Vaatimukset tietotekniikan soveltamisesta kasvavat jatkuvasti ja nopeasti sekä työelämässä että tavallisessa arjessakin. Myös OECDn (2015, 100) raportissa kerrotaan tietokoneiden käytön yleistyneen niin työpaikoilla kuin jokapäiväisessä elämässä. Tietokonetta käytetään numeroihin, lukumääriin, kaksi- ja kolmeulotteisiin kappaleisiin sekä dataan liittyvissä tilanteissa ja tehtävissä. Digitaalisten oppimateriaalien ja oppimisympäristöjen käyttö opetuksessa ja opiskelussa voisi mahdollistaa tärkeän tavoitteen toteutumisen: opiskelija oppii käyttämään työtapoja, jotka valmistavat yhteiskunnassa toimimiseen ja tulevaisuuden työelämään (Sakomaa 2015, 116).

Suurimmaksi osaksi tietotekniikka on ollut irrallinen osa, jolla ei ole toimivaa kytköstä jokapäiväiseen opetukseen (Ruth 2015, 242). Digitalisaation nopea vauhti ja sen luomat mahdollisuudet haastavat koulujen toimintakulttuurit muutokseen. Perinteiset opettajan ja oppijan roolit muuttuvat samalla kun opetusmenetelmiin ja oppimateriaaleihin kytkeytyvät tarpeet muuttuvat. Jotta muutos kohti toimivaa digitalisoitunutta opetusta tapahtuisi, vaaditaan isompia muutoksia rakenteellisella tasolla. Pelkästään pintapuoleinen tvt-laitteiden käyttö ei onnistu vapauttamaan digitalisaation mukana tulevan muutoksen todellista potentiaalia. Opetukseen liittyvät materiaalit ja rakenteet tulee luoda ja kehittää uudelleen digitalisoituneeseen opetukseen sopivaksi. Lisäksi muutoksia vaaditaan myös opetussuunnitelmaan, arvioinnin viitekehykseen sekä opettajankoulutukseen. (OECD 2015, 62.)

Vuonna 2019 voimaan tullut matematiikan ylioppilaskokeen järjestäminen digitaalisesti on aiheuttanut muutoksia lukion opetukseen ja käytettäviin opetusmenetelmiin sekä oppimisympäristöihin. Ylioppilastutkintolautakunnan (2018, 1) antaman tiedotteen mukaan digitaalisen ylioppilaskokeen tarkoituksena on edelleen saada selville, millä tasolla opiskelija on onnistunut sisäistämään lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot. Digitaalisuus antaa mahdollisuuksia tuottaa erilaisia tehtäviä sekä ratkaisutapoja aiempaan verrattuna. Tiedotteen mukaan parhaiten kokeeseen voi valmistautua opiskelemalla opetussuunnitelman mukaisia taitoja ja tietoja. Opetussuunnitelmassa tvt:n osaaminen katsotaan osaksi matematiikan opiskelua, joten sen opiskelusta on hyötyä myös ylioppilaskokeessa. Lukion opetussuunnitelman (Opetushallitus 2019, 221) mukaan matematiikan opiskelun tehtävänä on kehittää opiskelijan kykyä hyödyntää digitaalisia tietolähteitä ja tietokoneohjelmistoja oppimisessa, ongelmanratkaisussa sekä tutkimisessa. Digitaalisuus sekä tieto- ja viestintäteknologiset apuvälineet ovat nykyään myös merkittävässä roolissa monenlaisissa työtehtävissä aina talonmiehestä lääkäreihin. Tämän pohjalta tutkielmassa on tarkoitus luoda tehtäviä, jotka ovat sähköisessä muodossa ja näin kannustavat opiskelijaa harjoittelemaan sekä hyödyntämään tvt:n käyttöä opiskelussaan ja mahdollisesti myöhemmin työelämässään.

Keväällä 2020 alkanut Korona-pandemia johti tilanteeseen, että lähes kaikki Suomessa tapahtuva opetus siirtyi etäopetukseen. Etäopetusjakso osittain pakotti opettajat tilanteeseen, jossa tvt:stä tuli lähestulkoon pakollinen osa opetusta. Merkittävimpänä syynä tähän oli opetuksen toteuttamisen vaikeus ilman minkäänlaisia tvt-laitteita, joiden avulla opetus pyrittiin toteuttamaan edelleen jollain tavalla vuorovaikutteisena lähiopetuksen puutteesta huolimatta. Opetustyö sisältää tavallisesti paljon vuorovaikutusta opiskelijoiden, muiden opettajien sekä myös huoltajien välillä, jolloin melkein ainoaksi järkeväksi väyläksi toteuttaa vuorovaikutus on tvt-laitteiden avulla etäyhteytenä. Loppukeväästä 2020 tehdyssä kyselytutkimuksessa opetusalan ammattilaisille saivat Kangas, Kemppinen, Mäkelä, Pensar & Tanskanen (2021, 23) tulokseksi, että n. ¾ opettajista oli alkanut käyttämään live-videopuheluita opetusvälineenä. Kyselyssä kysyttiin opettajien asenteita etäopetusta kohtaan. Kaikkein tyytyväisimpiä etäopetukseen olivat korkeakoulujen ja ammattioppilaitosten opettajat. Mielenkiintoista olisi pohtia, mistä tämä johtuu? Onko syynä korkeakouluissa opettajien suhteellisen pieni vastuu opiskelijoiden opiskelusta, toisin kuin alemmilla koulutusasteilla, jossa opettajien tulee enemmissä määrin huolehtia opiskelijoiden hyvinvoinnista ja opetuksessa mukana pysymisestä? Vai onko korkeakouluopetuksessa jo valmiiksi oltu enemmän valmiudessa etäopetukseen? Kankaan ym. (2021, 29) mukaan opettajat pitivät yhtenä etätyöhön siirtymisen parhaana puolena digitaalisen työnteon sovellusten ja laitteiden oppimista sekä niiden hyödyntämistä pedagogisesti työntekoa tukemassa. Pandemia johti monien opettajien kohdalla tilanteeseen, jossa ei ollut muuta vaihtoehtoa kuin opetella hyödyntämään ja käyttämään digitaalisia työkaluja ja apuvälineitä opetuksessa. Tämä opetti monille opettajille keinoja hyödyntää sähköisiä oppimisvälineitä entistä tehokkaammin opetuksessa, myös lähiopetukseen palatessa. Tvt:n mahdollisuuksien sisäistämisen myötä opettajat kokivat pystyvänsä keskittymään entistä tehokkaammin opetuksessa olennaisiin asioihin.

Sähköisten oppimisympäristöjen ja tvt-laitteiden käytön hyödyllisyydestä on tehty melko paljon ja mittaviakin tutkimuksia. Tästä huolimatta tutkimuksissa ei ole onnistuttu toistaiseksi löytämään yhteyttä sähköisten oppimisympäristöjen sekä tvt:n hyödyntämisen ja opiskelijoiden oppimistuloksien välille (OECD 2015; 146, 162). OECDn (2015, 153) raportin mukaan on olemassa viitteitä siitä, että kaikkein parhaimmat oppimistulokset saadaan, kun opiskelijat käyttävät tvt-laitteita ja sähköisiä ympäristöjä rajatusti. Mikäli käyttöaste on suuri tai hyvin pieni saadaan raportin mukaan heikompia oppimistuloksia. Matematiikan kohdalla on olemassa viitteitä, että sosioekonominen tausta huomioon ottaen oppilaat, jotka käyttävät vähemmän tvt-laitteita matematiikan opiskelussa ja tunneilla, suoriutuvat paremmin matematiikan tehtävissä. Tästä poikkeuksena on kolme valtiota; Belgia, Tanska ja Norja, joissa tavataan viitteitä siitä, että tvt:n suurempi käyttöaste korreloi paremman matemaattisen menestymisen kanssa. Mielenkiintoisesti näistä maista Tanska ja Norja ovat maita, joissa OECD:n raportin mukaan tvt:tä hyödynnetään kaikkein eniten opetuksessa. Johtuuko tämä siitä, että näissä maissa tvt:n ja sähköisten oppimisympäristöjen hyödyntäminen on toimivampaa ja tehokkaampaa kuin monissa muissa maissa? Raportissa on viitteitä myös siitä, että mitä enemmän matematiikan opiskelussa käytetään tvt:tä sitä paremmin opiskelijat osaavat hyödyntää tvt:tä matematiikan työkaluna. (OECD 2015, 154–156.)

2 SÄHKÖISET OPPIMISYMPÄRISTÖT JA OPPIMINEN

Teknologinen kehitys on luonut uudenlaisia oppimateriaaleja, opetusmenetelmiä sekä oppimisympäristöjä (Hailikari, Lindblom-Ylänne & Postareff 2015, 48). Perinteisesti matematiikkaa on opiskeltu ja opetettu oppikirjojen avulla. Vuonna 2015 tehdyn tutkimuksen mukaan 85% peruskoulun oppilaista käyttää oppikirjaa yli puolet opiskeluajasta ja 99% oppilaista käyttää matematiikan opiskelussa oppikirjaa. Laskinten sekä matemaattisten tietokoneohjelmien lisääntyessä on syntynyt tarve pohtia, onko matematiikan opiskelun tueksi tarjolla muunkinlaisia oppimateriaaleja kuin perinteinen oppikirja? Olisiko mahdollista luoda materiaaleja, joissa keskityttäisiin laskemis- ja soveltamistaitojen jatkuvan drillauksen sijaan henkilökohtaisen tiedon luomisen prosesseihin ja ongelmanratkaisutaitoihin? (Tossavainen 2015a, 129–130.)

Tavallisesti oppikirjat uusiutuvat, kun sisällöt vanhenevat ja oppikirjojen sisältö ei ole enää linjassa uusimman tiedon kanssa. Matematiikka on yksi harvoista oppiaineista, joka muuttuu hyvin hitaasti ja osa oppisisällöistä on pysynyt samana jopa kaksi ja puoli vuosituhatta. Tästä huolimatta matematiikankin oppikirjat uusiutuvat, vaikka samat oppisisällöt ja matemaattiset säännöt olisivatkin vielä täysin ajantasaisia ja käytössä. Oppikirjat uusiutuvat, sillä käsityksemme siitä, millainen oppimateriaali palvelee parhaiten oppimista, muuttuu kulloinkin pinnalla olevan oppimiskäsityksen mukaan. Viime aikoina selkein syy muutokseen on ollut juuri digitalisaatio sekä teknologistuminen ja niiden mukanaan tuomat muutokset tiedon välittämisen ja esittämisen tapoihin. (Tossavainen 2015b, 187–188.) Digitalisaatio on tuonut mukanaan sähköiset oppimisympäristöt ja oppimateriaalit. Tässä tutkielmassa sähköisellä oppimisympäristöllä tai oppimateriaalilla tarkoitetaan Internetissä tai digilaitteella toimivia palveluja ja sovelluksia, joita käytetään osana opiskelua. Ne tarjoavat työkaluja koulutyön tekemiseen ja tallentamiseen, opiskeluun sekä vuorovaikutukseen toisten opiskelijoiden sekä opettajien kanssa. Sähköiset oppimisympäristöt mahdollistavat muuan muassa mahdollisuuden tehdä ja palauttaa tehtäviä sähköisesti sekä oppimateriaalien verkkojulkaisemisen ja hallinnan.

Silfverberg (2018, 395) toteaa matematiikan osalta teknologian opetuskäytön keskeisimmiksi tehtäviksi apuvälineenä toimimisen laskennassa, piirtämisessä ja tilastoinnissa. Tämän lisäksi hän mainitsee keskeiseksi teknologian hyödyntämisessä kiinnostuksen herättämisen ja ylläpitämisen sekä matematiikkaan liittyvien oppimisympäristöjen tehostamisen ja monipuolistamisen. Sähköiset oppimisympäristöt ovat luoneet mahdollisuuden tuoda opittavat asiat ja ilmiöt lähemmäs oppijaa monipuolisin havainnollistuskeinoin sekä oppilaan oman yksilöllisen kokeilun kautta. Teknologian kehittyminen ja internet ovat mahdollistaneet henkilökohtaisemman tavan opiskella. Oppimisen aikataulutuksen ja ajoituksen vapauden lisäksi kyse on myös erilaisten opiskelijoiden tarpeiden ja kykyjen huomioimisesta (Toivola 2019, 101). Sähköisissä oppimateriaaleissa voidaan opetettavaa asiaa havainnollistaa ja opettaa käyttäen hyödyksi videoita, linkkejä, ääniä ja vuorovaikutteisia mallinnuksia tai kuvioita. Näiden avulla pystytään selittämään ja havainnollistamaan käsitteitä ja ilmiöitä ja niiden välisiä suhteita monipuolisemmin. Kaikkein oleellisinta sähköisissä oppimisympäristöissä on kuitenkin vuorovaikutuksellisuus. Opiskelija pystyy itse kokeilemaan hypoteesejaan ja saamaan palautetta näkemällä toimenpiteidensä ja valintojensa seuraukset välittömästi. (Tossavainen 2015b, 188–189.)

Sähköisten oppimateriaalien vuorovaikutuksellisuuden ja dynaamisuuden pohjana toimii siirtymä tekstikeskeisyydestä visuaalisen viestinnän keinoihin. Tämän lisäksi pelillisyys lisääntyy, minkä toivotaan lisäävän motivaatiota oppimiseen. Tässä tutkielmassa tehtävät luodaan sähköiseen ViLLE-oppimisympäristöön, jossa oppiminen tapahtuu tietokoneavusteisesti ja usein pelillistettynä. Lisäksi ViLLE-oppimisympäristössä opiskelija saa välittömästi vastattuaan palautetta suoriutumisestaan (Oppimisanalytiikan keskus 2021). Tossavaisen (2015b, 191) mukaan sähköisten oppimateriaalien potentiaali ei kuitenkaan piile ainoastaan perinteistä oppikirjaa rikkaammilla havainnollistuksilla ja linkeillä, vaan mahdollisuudessa tukea toisenlaista oppimista. Sähköiset oppimisympäristöt voivat tarjota turvallisen ympäristön harjoitella erilaisia prosesseja ja taitoja, jolloin oppimateriaalit voivat toimia ikään kuin porttina oppimista varten luotuun virtuaalimaailmaan. Tällaisessa virtuaalimaailmassa aito vuorovaikutuksellisuus syntyy, kun oppimisen kohteeksi asetetaan jokin teemakokonaisuus eikä yksityiskohtaisesti määritettyä asiasisältöä. Parhaiten syvällistä oppimista saadaan tuotettua, kun virtuaalimaailman rinnalla käytetään perinteistä oppikirjaa selittämään teemakokonaisuuden peruskäsitteet ja niiden väliset yhteydet. Näin myös tässä tutkielmassa tuotetut tehtävät toimivat vain osana kohdekurssin teemakokonaisuuden oppimista. Tehtävien laadinnassa on nojattu siihen, että opiskelija opiskelee peruskäsitteet ja yleisimmät teoriat perinteisestä oppimateriaalista ja kurssin luennoista, eikä tarkoitus ole siis opettaa kurssin sisältöjä kokonaan ja ainoastaan sähköisten tehtävien muodostamassa kokonaisuudessa.

Hailikari ym. (2015a, 47) toteavat, että oppiminen on monimutkainen prosessi, jossa useat oppijan ja oppimisympäristön tekijät vaikuttavat toisiinsa ja luovat oppimisprosessista ainutlaatuisen ja yksilöllisen. Suurin osa opiskelijoista rakentaa motivaation ja kiinnostuksen oppimiseen ja opittavaan asiaan vasta ollessaan vuorovaikutuksessa oppimisympäristön kanssa. Opiskelijat voidaan jakaa karkeasti kahteen ryhmään: opiskelijat, joilla on korkea sisäinen motivaatio ja vahva henkilökohtainen kiinnostus sekä opiskelijat, joilla on vastaavasti matala sisäinen motivaatiota ja heikko henkilökohtainen kiinnostus. Oppimisympäristöllä ei ole suurta vaikutusta opiskelijoihin, joilla on korkea motivaatio ja vahva kiinnostus, vaan he pystyvät pitämään yllä motivaatiota ja kiinnostusta myös silloin kun oppimisympäristö toimii heikosti tai sisältää ongelmia. (Hailikari ym. 2015, 51.)

Helposti voisi ajatella, että oppiminen on hyvin haastavaa tai jopa joissain tapauksissa mahdotonta, mikäli opiskelijalla ei ole kiinnostusta tai motivaatiota. Hailikarin ym. (2015, 51) mukaan näin ei kuitenkaan ole. Opiskelija on kykeneväinen oppimaan asioita motivaation tai kiinnostuksen puutteesta huolimatta. Laadukas oppiminen on mahdollista, mikäli opiskeluun käytetään aikaa ja vaivaa. Tässä apuna voivat toimia hyvin rakennetut oppimisympäristöt. Oppimisympäristön tulisi antaa opiskelijoille mahdollisuuksia asettaa omia tavoitteita ja linkittää asioita omaan kokemusmaailmaansa sekä löytää vastauksia omiin ongelmiinsa. Sankilan (2015, 252) mukaan teknologia antaa mahdollisuuden kiinnittää huomiota oppijan omaan toimintaan. Tvt:n hyödyntäminen opetuksessa johtaa oppilaan ottamaan aktiivisemman roolin opiskelussa. Aktiivisuus lisää omaehtoista tekemistä ja tavoitteellista opiskelua. Kannustaisiko siis sähköisten oppimisympäristöjen hyödyntäminen opiskelijaa käyttämään aikaa ja vaivaa opiskeluun ja näin oppimaan asioita motivaation tai aihekohtaisen kiinnostuksen puuttuessa?

Oppimisen kannalta tehokkaan opiskelun tulisi sisältää jonkin muotoista opiskelijan osallistamista oppimisprosessiin ja vastuuttaa opiskelijaa omasta oppimisestaan. Usein korkeakoulujen luennot ja opetus koostuu luennoitsijan verbaalisesta vuorovaikutuksesta tilanteessa useimmiten passiivisten opiskelijoiden kanssa. Useiden tutkimusten mukaan tämä passiivinen vastaanottaminen ei ole pedagogisesti paras tapa oppia ja omaksua asioita. Sen sijaan opetustavat, jotka vaativat opiskelijalta aktiivista osallistumista ja materiaalin kanssa työskentelyä tukevat syvemmän tason ajattelua ja johtavat parempiin tuloksiin tiedon ymmärtämisessä, muistamisessa sekä uudelleen käytössä. Tutkimusten mukaan opiskelijoiden tulisi kuuntelun lisäksi lukea, kirjoittaa, keskustella ja osallistua ongelmanratkaisuun. (Ghilay 2017, 59–60.)

Ghilayn (2017, 60) mukaan tällä niin kutsutulla aktiivisella oppimisella on monia hyötyjä; opiskelijat saavat ongelmille itselle henkilökohtaisesti merkityksellisiä ratkaisuja, opiskelijat saavat useammin ja välittömämmin palautetta, useimpia opiskelijoita aktiivinen oppiminen motivoi enemmän kuin epäaktiivinen, opiskelijat pitävät opiskeluun liittyviä tehtäviä tärkeämpinä ja arvostavat niitä, opiskelijat pystyvät paremmin hyödyntämään aiemmin syntyneitä tietorakenteita, mikä on uuden oppimisessa avainasemassa. Ghilay (2017, 66) painottaa teknologian ja tvt:n hyödyntämistä, jotta opiskelijat saadaan toimimaan aktiivisina oppijoina. Tvt-laitteiden ja sähköisten oppimisympäristöjen käyttö opetuksessa usein mahdollistaa ja johtaakin melko suoraan opiskelijan aktiiviseen toimimiseen oppiakseen opiskeltavia sisältöjä. Toki poikkeuksena on esimerkiksi luentotallenteiden katsominen sähköisessä ympäristössä, mikä voi olla passiivista. Tosin nykyään usein näihin tallenteisiinkin saadaan tuotua mukaan aktiivisuutta lisääviä välikysymyksiä tai luentoon liittyviä tehtäviä.

Tossavaisen (2019, 162) mukaan opiskelijan taitava toimiminen sähköisessä oppimisympäristössä ja ympäristön sisältämän asiatiedon omaksuminen on hyvä erottaa toisistaan. Vaikka oppilas näennäisesti osaisi hienosti muodostaa laskuja ja laskea niitä, ei se automaattisesti takaa sitä, että hän olisi ymmärtänyt niiden laskujen ja vastauksien merkityksen tai niiden välisen yhteyden. Tästä syystä opiskelijalle luotujen tehtävien tulisi haastaa enemmän oppilaan sisällöllistä ymmärrystä kuin vain pintapuolista yksityiskohtien osaamista ja ulkoa muistamista.

Hailikari ym. (2015, 53–54) toteavat artikkelissaan, että oppimiseen vaikuttaa myös haasteellisuuden kokemukset. Opiskelun tulee tarjota opiskelijoille sopivasti haasteita. Opiskelun tulee sisältää haasteita, mutta haasteet eivät saa olla liiallisia tai sisällöt kauttaaltaan liian vaikeita. Oppimisen kannalta keskeinen tasapainotila löytyy turhautumisen ja tylsistymisen välistä (Järvilehto 2015, 221). Opiskeltavan asian ollessa liian helppoa voi opiskelija tylsistyä helposti ja toisaalta liialliset haasteet taas voivat saada aikaan turhautumisen. Jatkaminen taas toisaalta samalla, vaikkakin aluksi sopivalla, tasolla liian pitkään johtaa tylsistyneisyyden tilaan. Tällöin opiskelijan on löydettävä uutta haastavampaa oppiainesta. Sopiva haasteellisuus tehtävissä lisää opiskelijan itsesäätelyä sekä halua ymmärtää opiskelemaansa asiaa.

Tässä tutkielmassa on tarkoituksena tuottaa tehtäviä, jotka nojautuvat näihin edellä esille tulleisiin periaatteisiin. Tehtävät olisi hyvä luoda ja kategorisoida opeteltavan aiheen ja vaikeustason suhteen, jotta opiskelija voi valita tavoitteisiinsa ja osaamistasoonsa sopivat tehtävät helposti. Tehtäviä tulee olla monen tasoisia, jotta opiskelija löytää tehtävistä haastetta sopivasti omaan tasoonsa nähden. Lisäksi tehtävien tulisi antaa palautetta ja vinkkejä opiskelijan vastatessa väärin, jolloin opiskelija saa tukea ja vastauksia omiin ongelmakohtiinsa opiskelussa ja pääsee näin eteenpäin. Tehtäviä pyritään luomaan reaalimaailman pohjalta, jolloin opiskelijalle avautuu mahdollisuus linkittää tehtävä omaan kokemus- ja ymmärrysmaailmaansa. Näihin periaatteisiin nojautumisella pyritään luomaan tehtäviä, jotka mahdollistavat oppimisen sekä korkean että matalan motivaation ja heikon kiinnostuksen omaaville opiskelijoille.

2.1 Sähköisen oppimisympäristön hyödyt ja haasteet

Sähköisten oppimisympäristöjen ja -materiaalien suhteen on olemassa monenlaisia mielipiteitä ja argumentteja sekä puolesta että vastaan. Yksi asia on kuitenkin melko varma: ei ole paluuta takaisin tilanteeseen, jossa sähköiset oppimisympäristöt ja tvt:n hyödyntäminen eivät ole osa opiskelijan arkipäivää. Näin ollen on hyvä pohtia, mitä hyötyjä sekä haasteita sähköisiin materiaaleihin ja oppimisympäristöihin liittyy, jotta niitä voidaan hyödyntää parhaalla mahdollisella tavalla.

Sähköisten oppimisympäristöjen käyttö on OECD:n (2015, 74–75) tutkimuksen mukaan tukenut matematiikan opetuksessa erityisesti oppilaslähtöistä opiskelua sekä formatiivista arviointia. Oppilaslähtöistä opiskelua tukee erityisesti tvt:n käyttäminen yhteisöllisessä opiskelussa, projektityöskentelyssä sekä oppilaan omatahtisuuden mahdollistamisessa. Tvt:n hyödyntäminen mahdollistaa jopa opiskelijan tekemisen ja etenemisen adaptiivisen ohjaamisen (Sankila 2015a, 252). Kuosa, Pohjolainen & Rasila (2018, 465) toteavat sähköisten tehtävien eduksi korkeakouluopinnoissa niihin liittyvän matalan osallistumiskynnyksen. Lisäksi sähköisten tehtävien antama anonyymi palaute vähentää riskiä itsensä nolaamiselle epäonnistuneissa ratkaisuyrityksissä verrattuna perinteiseen tapaan esittää opiskelijoiden omat ratkaisut opetusryhmän edessä taululla.

Sähköisiin tehtäviin rakennettu metatieto ja digitaalisuus luo mahdollisuuden ohjata opiskelijaa henkilökohtaisesti palautteen ja seurannan avulla (Sankila 2015b, 26). OECDn tutkimuksessa mainitaan formatiiviseen arviointiin liittyen sähköisten oppimisympäristöjen kyky antaa välitöntä palautetta opiskelijalle suoriutumisestaan. Myös Kinnari-Korpela (2019, 56) pitää sähköisten oppimisympäristöjen kykyä antaa välitöntä palautetta toimivana, sillä se voi motivoida opiskelijaa opiskelussaan ja auttaa häntä tunnistamaan oppimisen kannalta haastavia kurssin osasisältöjä. Lisäksi Kinnari-Korpela kirjoittaa väitöskirjassaan, että välitön palaute on jopa pedagoginen vaatimus sähköisten oppimisympäristöjen hyödyntämiselle. Ghilay (2017, 46) toteaa tvt:n hyödyntämisen lisäävään opiskelijan saamaa palautetta työstään. Opettaja tai perinteiset oppikirjat eivät kykene yhtä tehokkaasti tarjoamaan kurssin jokaisen opiskelijan suorituksille ja ajatuksille palautetta ja ohjausta kuin sähköiset oppimisympäristöt. Kuosa ym. (2018, 465) kirjoittavat, että korkeakouluopinnoissa opiskelija saa harvoin perinteisessä harjoitusryhmässä palautetta, jossa opiskelijan ratkaisuyritystä on analysoitu etsimällä tavallisimpia virheitä ja kertomalla ne opiskelijalle.

Ghilay (2017, 69) toteaa kirjassaan, että erittäin usein opiskelijat eivät kykene omaksumaan ja hallitsemaan kurssin sisältöjä, vaikka opiskelijoilla olisi kurssille tullessa tarvittavat pohjatiedot ja valmiudet. Usein tätä ilmiötä selitetään opiskelijoiden kurssin aikaisen opiskelun vähäisyydellä tai kiinnostuksen puutteella. Ghilay ehdottaa, että tähän problematiikkaan ratkaisu voisi löytyä juuri tehokkaasta ja monipuolisesta palautteesta. Tutkimusten mukaan opiskelijat hyödyntävät parhaiten palautetta, joka on annettu digitaalisessa muodossa.

Sähköisiin oppimisympäristöihin ja oppimateriaaleihin liittyy ominaisuutena tiedon kerääminen käyttäjistään. Oppimisanalytiikka on sähköisten oppimisympäristöjen kautta monipuolistunut ja opettajan työ analytiikan osalta helpottunut. Useat sähköiset oppimisympäristöt keräävät, tiivistävät ja analysoivat automaattisesti informaatiota opiskelijan tekemistä tehtävistä ja suoriutumisesta. Käytännössä analytiikan työkalut tallentavat kvalitatiivista tietoa eri suureista, kuten ajankäytöstä eri osioissa sekä väärien ja oikeiden vastauksien jakautumisesta (Tossavainen 2019, 164). Kerätyn informaation pohjalta voidaan tehdä tärkeitä johtopäätöksiä opiskelijan opiskelusta ja sen edistymisestä. Oppimisanalytiikan tuottamalla tiedolla on kolme erilaista tasoa: tieto yksittäisen oppilaan toiminnasta tietyssä oppimistilanteessa, tieto yksittäinen oppimateriaalikokonaisuuden käytöstä ja muista kvantitatiivisista ominaisuuksista sekä edellisestä tasosta saadun tiedon hyödyntämistä oppimateriaalikokonaisuuden tai opetuksen kehittämiseen tai oppimisprosessien tutkimukseen. (Tossavainen 2019, 163.) Yksi esimerkki oppimisanalytiikkaa hyödyntävästä oppimisympäristöstä on ViLLE-oppimisympäristö. ViLLE:ssä tehtäviä tehdessään opiskelija saa välittömän palautteen suoriutumisestaan ja samalla oppimisympäristö kerää myös merkittävän määrän informaatiota opiskelijoiden ratkaisuista, minkä pohjalta oppimisympäristöä ja sen sisältöjä voidaan muokata entistä paremmiksi. Informaatiota voidaan myös käyttää opiskelijoiden osaamisen arvioinnin tukena.

Tossavaisen (2019, 169; 2015a, 135) mielestä tähän mennessä sähköiset oppimateriaalit ovat osoittautuneet pedagogisilta ratkaisuiltaan painettuja oppikirjoja paremmiksi kahdella tavalla: niihin sisältyy vuorovaikutteisia ja dynaamisia työalustoja tutkimiseen, kokeiluun ja keksimiseen sekä ne lisäävät joustavuutta oppimistyön paikan ja ajan valinnassa korvaamalla sopivissa kohdin opettajan tekemää työtä opiskelijoiden kanssa. Sähköisten oppimisympäristöjen käyttö ei ole paikkaan tai aikaan sidottua eikä vaadi opiskelijoiden kokoamista samaan tilaan tiettyyn kellonaikaan. Tämä luo paljon joustoa, mikä voi olla tarpeen esimerkiksi opiskelijoille, jotka käyvät töissä opiskeluiden ohella (Kuosa ym. 2018, 465). Tossavaisen kanssa samanlaisia huomioita löysivät myös Baki, Güven, Özyurt & Özyurt (2014, 16) tutkimuksessaan. Heidän mukaansa sähköisen oppimisympäristön etuna on nimenomaan niiden kyky luoda struktuuriin liittyviltä ominaisuuksiltaan opiskeluun sopivimman ympäristön. Tällä he tarkoittavat sähköisen oppimisympäristön mahdollistavan yksilöidyn opiskelijakeskeisen oppimisympäristön ja -polun, korkeamman opiskelumotivaation, vaiheittain etenevän ja osaamisvaatimuksia sisältävän etenemisen sekä ympäristön, joka tarjoaa logiikan ymmärtämistä ja tutkimalla oppimista. Oppimisympäristön vuorovaikutteisuuden pedagogisena etuna on tiedon eri esittämismuotojen yhteyksien havaitsemisen mahdollistuminen. Näin opiskelija saa tukea käsitteellisen ymmärtämisen kehitykseen. Esimerkkinä tästä on matematiikassa käytössä olevat GeoGebra-työalustat, jotka havainnollistavat funktion geometrisen ja algebrallisen esityksen välisen yhteyden. Tämänkaltaisia asioita ei pystytä mitenkään sisällyttämään perinteisten oppikirjojen staattisiin kaavoihin ja kuviin. (Tossavainen 2019, 169.) Myös Aizikovitsh-Udi & Radakovic (2012, 4945) totesivat tutkimuksessaan, että GeoGebran avulla opiskelijoille voidaan opettaa monimutkaisia ja abstrakteja matemaattisia käsitteitä käytännönläheisesti ja konkreettisesti.

Sähköisten oppimisympäristöjen etuna on opettajan näkökulmasta niiden muokattavuus (Sakomaa 2015, 116). Tämä mahdollistaa tärkeiden asioiden painottamista, vähemmän tärkeiden asioiden jättämistä pois ja materiaalin muokkaamista yleisemminkin ryhmä- ja oppilastasolla mahdollisimman sopivaksi. Muokattavuuden ohella sähköiset oppimisympäristöt ja oppimateriaalit ovat usein motivoivia monipuolisuutensa vuoksi. Tehtävät voivat olla tyypiltään vaihtelevia ja sisältää monipuolisesti erilaisia materiaaleja aina kuvista erilaisiin interaktiivisiin sisältöihin. Opiskelijan käyttäessä sähköisiä oppimisympäristöjä ja niiden monipuolisia materiaaleja vahvistuu myös opiskelijan monilukutaito, joka on yksi laaja-alaisen osaamisen kulmakivistä (Sakomaa 2015, 116).

Yksi suurimmista haasteista liittyen tvt:n käyttöön opetuksessa ja opiskelussa on laitteiden saatavuuteen sekä internetyhteyteen liittyvät ongelmat (OECD 2015, 61; Sankila 2015b, 27). Ongelmat laitteiden saatavuudessa johtuvat useimmiten opinahjon resurssien puutteesta tai päätetystä linjauksesta olla panostamatta sähköisten materiaalien ja laitteiden käyttöön osana opetustyötä. OECDn (2015, 137–139) raportin mukaan opiskelijan sosioekonomisella taustalla on vahva vaikutus opiskelijan suoriutumiseen sähköisissä oppimisympäristöissä ja tehtävissä. Kuitenkaan erot oppilaiden suoriutumisessa eivät johdu oppilaiden digitaitoihin tai tvt-laitteiden käytön tuttuuteen liittyvistä eroista. Suoriutumiseen liittyvät erot korreloivat sen sijaan opiskelijan kykyyn suoriutua perinteisistä paperille laskettavista tehtävistä eli yleisemmin opiskelijan matemaattiseen kyvykkyyteen. Raportin mukaan sosioekonomisella taustalla onkin enemmän vaikutusta juuri opiskelijoiden suoriutumiseen perinteisistä paperitehtävistä kuin suoriutumiseen sähköisistä tehtävistä. Vaikka sähköiset tehtävät soveltuvat ja tukevat hyvin perusasioiden harjoittelua ja laskurutiinin omaksumista, vaativampia matemaattisia sisältöjä opiskeltaessa opettajan läsnäolo on useimmiten tarpeellista (Kuosa ym. 2018, 465).

Tvt:n käyttö ja sähköiset oppimisympäristöt eivät yksinään vielä onnistu korvaamaan kontaktiopetusta ja opinahjojen sosiaalista puolta. On olemassa tutkimusnäyttöä siitä, että sähköisen oppimisympäristön käyttöön liittyvän alkuihastuksen hiipuessa, opiskelijat jäävät kaipaamaan välitöntä ja aitoa vuorovaikutusta opettajan kanssa oppimistaan tukemaan (Tossavainen 2019, 170). Usein myös kiinnostuksen lopahtaessa alkaa huomio keskittymään muuhun ja tällöin tvt-laitteet tarjoavat runsaasti mahdollisuuksia ohjata huomio pois varsinaisesta opiskelusta. Toisaalta on olemassa myös tutkimusnäyttöä sähköisten oppimisympäristöjen lisäämästä opiskelumotivaatiosta. Bakin ym. (2014, 16) tutkimuksessa opiskelijat eivät kyllästyneet sähköisessä oppimisympäristössä toimimiseen vaan he olivat koko kurssin ajan kiinnostuneita kurssin sisältöjen opiskelusta. Tämä johti myös siihen, että opiskelijat ottivat itse vastuuta oppimisestaan kurssin aikana. Mikä saa aikaan tutkimuksien tulosten erot? Onko sähköisten oppimisympäristöjen suunnittelussa onnistuttu joissain yhteyksissä huomattavasti paremmin tai huonommin kuin toisissa? Sakomaan (2015, 115) mukaan yksi uhkakuva sähköisissä oppimisympäristöissä ja oppimateriaaleissa on keskittyminen vääriin asioihin. Samoin internetissä oleva valtava tietomäärä luo haasteita opiskeluun. Opiskelijoille tulee opettaa taidot löytää kaiken tarjolla olevan tiedon seasta olennainen ja luotettava tieto. Lähdekriittisyyteen liittyvät taidot eivät ole yksinkertaisia, mutta hyvinkin keskeisiä tulevaisuuden kannalta. Nämä ovat taitoja, joita opiskelijoille pitäisi opettaa ja sähköiset oppimisympäristöt voivat toimia alustana taitojen opetukselle.

Erityisesti matematiikkaan liittyy piirteitä, joiden vuoksi siirtyminen täysin sähköisiin materiaaleihin on ongelmallista, ainakin vielä toistaiseksi. Matematiikan kieli sisältää ilmaisurakenteita, symboleja ja kaavoja, joita on työlästä tuottaa ja muokata sähköisillä laitteilla (Tossavainen 2015a, 134). Ylivoimaisesti kaikkein tehokkain tapa tuottaa matemaattista ajattelua on edelleen käsin kirjoittaminen. Lisäksi on olemassa laitteita, kuten Applen tablettitietokone, jonka peruskäyttöliittymässä on toistaiseksi mahdotonta kirjoittaa joitain kaavoja, kuten neliöjuurilausekkeita tai aste-merkin sisältäviä kaavoja.

Vaikka on toki olemassa ohjelmia, kuten ladontajärjestelmä LaTeX, jonka avulla voidaan kääntää ennalta määrättyjä merkkijonoja selkokieliseksi kaavaksi, vie niidenkin käyttäminen moninkertaisen ajan käsin kirjoittamiseen verrattuna. Tämä ongelma voi pahimmillaan johtaa opiskelijan huomion kohteen siirtymiseen matemaattisen ilmaisun sisällöstä ilmaisun tuottamisen haasteisiin (Tossavainen 2015a, 134). Lisäksi matematiikan opiskelussa käsin tekeminen on hyvin olennainen osa ajattelua. Esimerkiksi miellekarttojen tekeminen tai kuvioiden käsin piirtäminen ovat tärkeitä ongelmanratkaisuvälineitä, jotka edelleen useimmiten on paras toteuttaa kynällä ja paperilla. Sähköisten oppimisympäristöjen ja materiaalien käytössä matematiikan opiskelussa piilee tähän liittyen suuri vaara. Sähköisten ohjelmistojen mahdollistaessa algoritmisen ajattelun ulkoistamisen opiskelijan omasta toiminnasta, voi opiskelijan oma matemaattinen ajattelu köyhtyä (Silfverberg 2018, 399). Opiskelija saattaa vain ohjailla sähköistä ohjelmistoa, joka suorittaa numeeriset laskut, lausekkeiden muokkaukset, yhtälöiden ratkaisemisen sekä funktioiden derivoinnin ja integroinnin ilman, että opiskelija itse tietää tai ymmärtää mitä toiminnot matemaattisesti tarkoittavat.

Toisaalta on myös tutkimuksia, joiden mukaan matematiikan opiskelussa sähköisissä oppimisympäristöissä on ehdottomasti etunsa. Dos Santos Ferreira, Karrer & Kataokan (2014, 132) tutkimuksessa tutkittiin todennäköisyyslaskennan opiskelua, jossa käytettiin opiskelun tukena R-ohjelmistoa. Heidän tutkimuksensa mukaan sähköisen ohjelman hyödyntäminen opiskelussa paransi opiskelijoiden ymmärrystä todennäköisyyslaskennan perusteista, kuten satunnaiskokeista, todennäköisyyksien estimaatiosta ja todennäköisyyksien laskemisesta puukuvion avulla. Sen lisäksi sähköisen ohjelmiston käyttö mahdollisti laajemman ymmäryksen todennäköisyyslaskennan ilmiöistä verrattuna pelkän kynän ja paperin käyttöön. Tämä johtui ohjelmiston kyvystä suorittaa laajojen aineistojen simulaatioita ja analyysejä sekä mahdollistaa esimerkiksi klassisessa kolikonheitossa moniulotteisemman kolikon tapaukset. Nämä ovat tehtäviä, joita olisi mahdoton tai ainakin hyvin vaikea suorittaa ilman sähköisiä apuvälineitä.

Sähköisiin materiaaleihin siirtymistä hidastaa monta asiaa. Yksi hidastava tekijä on sähköisten työalustojen sekä tehtävien suunnitteluun ja laatimiseen vaadittava valtava määrä aikaa. Tämä aiheuttaa sen, että palkkatyönä niiden laatiminen on kallista ja ainakaan vielä vuoteen 2015 mennessä yksikään kaupallinen kustantaja ei ollut tarjoutunut sähköistämistyön päärahoittajaksi (Tossavainen 2015a, 136). Materiaaleja on toki tehnyt useampi opettaja ja osa on niitä jakanut myös julkiseen käyttöön. Näiden sähköisten materiaalien ongelmana taas on suuri laadun vaihtelu ja lisäksi ne kattavat vain osan tarpeen olevista matematiikan oppisisällöistä. Tossavainen (2015a, 135) mainitsee vielä ongelmalliseksi sen, että toisinaan sähköisissä materiaaleissa voi olla vaikeampi luoda selkeitä ja helposti luettavia esityksiä tvt-laitteiden näyttöjen ollessa pieniä. Tämä konkretisoituu matematiikassa tärkeiden kuvien ja kuvaajien esityksissä. Näihin täytyy usein liittää sanallista tekstiä avaamaan tai kommentoimaan kuvaa, jotta sen merkitys aukenee opiskelijalle. Painetun oppikirjan aukeamalle tällainen esitys mahtuu helposti ja järkevästi, toisin kuin joissain tapauksissa sähköisiin materiaaleihin.

2.2 ViLLE-oppimisympäristö

Tutkielman tavoitteena on luoda sähköisiä todennäköisyyslaskennan tehtäviä. Niiden alustana käytetään Turun yliopiston tulevaisuuden teknologioiden laitoksella kehitettyä ViLLE-oppimisjärjestelmää, joka on sähköinen oppimisympäristö. ViLLE-järjestelmä on Suomessa melko suosittu oppimisympäristö ja on käytössä yli kolmanneksessa Suomen kouluista. ViLLE on kehitetty hyvin pitkälti tutkimuspohjaisena järjestelmänä, joka tutkii oppimista ja yksi sen tärkeimmistä tehtävistä onkin tarjota informaatiota sekä opettajalle että opiskelijalle. Samalla saadun tutkimustiedon perusteella ViLLE-järjestelmää kehitetään entistä toimivammaksi ja oppimista paremmin tukevaksi. (Oppimisanalytiikan keskus 2019.)

ViLLE sisältää monipuolisesti valmiita oppimiskokonaisuuksia ja tehtäviä useista oppiaineista aina esiopetuksesta yliopistoon saakka. Lisäksi opettajat voivat luoda omia tehtäviä ja jakaa niitä ViLLEn kautta. (Oppimisanalytiikan keskus 2019.) Tehtävien luomiseen on olemassa useampia vaihtoehtoja, sillä tehtävät voidaan luoda esimerkiksi käyttäen pohjana hyvin avointa symbolisen laskennan tehtävätyyppiä, joilloin tehtävän vaiheet ja sisältö luodaan itse käyttämällä koodikieltä, tai tehtäviä voidaan luoda hyödyntämällä ViLLEn valmiita tehtävätyyppejä, joissa tarpeen on vain syöttää kysymykset ja vastausvaihtoehdot. Tämän tutkielman tehtävät luodaan käyttämällä symbolisen laskennan tehtäväpohjaa.

ViLLEstä löytyy yli 100 erilaista tehtävätyyppiä hyödynnettäväksi ja monet tehtävätyypeistä ovat pelillisiä sekä sisältävät visuaalisia ominaisuuksia, mikä innostaa opiskelijoita työskentelemään tehtävien parissa. ViLLEssä on myös tutoriaaleiksi kutsuttuja tehtävien ja erilaisten oppimateriaalien yhdistelmiä. Tehtäviin yhdistetyt oppimateriaalit voivat olla esimerkiksi kuvia, luentomonisteita tai videoita. Tutoriaalit perustuvat konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jossa tarkoituksena on tehdä opiskelijoista aktiivisia oppijoita. Tällöin opettajan roolina on lähinnä heikompien opiskelijoiden ohjaaminen. (Oppimisanalytiikan keskus 2019.)

ViLLEn yhtenä olennaisimpana ominaisuutena on tehtävien automaattinen arviointi. Opiskelijan vastattua tehtävään saa hän välittömästi siitä palautteen. Palaute voi sisältää kannustusta, vihjeitä, vastauksen hahmotusta erimuodoissa sisältäen esimerkiksi visualisointeja, jolloin tuetaan syvällistä oppimista ja käsitteen ymmärryksen kehittymistä. Lisäksi tehtävät ja tehtäväkokonaisuudet pisteytetään automaattisesti ViLLEn toimesta. Automaattisesti arvioitujen tehtävien lisäksi opettajat voivat myös luoda tehtäviä, jotka he itse tarkistavat, kommentoivat ja palauttavat järjestelmän sisällä. ViLLE-oppimisympäristö toimii myös yhteistyön välineenä, sillä tehtäviä voidaan ratkoa myös pareittain tai pienissä ryhmissä ja ViLLE voi toimia alustana harjoitustöiden palautukselle sekä niiden vertaisarvioinnille. (Kaila & Kurvinen 2014, 6–7; Oppimisanalytiikan keskus 2019.)

3 MATEMATIIKAN OPISKELU JA -TEHTÄVÄT

Matematiikan opiskelussa opiskelijan aktiivinen toimiminen muun muassa tehtäviä tekemällä on tärkeässä roolissa. Tosin sen sijaan, että opiskelija vain tekisi itsenäisesti ja aktiivisesti suoraviivaisia laskutoimituksia, olisi hyvä haastaa opiskelijaa tehtävillä, joissa häntä vaaditaan analysoimaan, yhdistelemään ja arvioimaan oppimiaan asioita ja luomaan omia ratkaisumalleja ongelmiin. Tämän lisäksi olennainen ja tärkeä osa matematiikan opiskelua on matemaattinen kielentäminen eli matemaattisen ajattelun ilmaisu luonnollisen kielen, kuviokielen tai matemaattisen kielen avulla suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 410). Matematiikan opiskelijoita tulisi aktiivisesti harjaannuttaa näiden kolmen eri kielimuodon monipuoliseen käyttöön. Matematiikan opetuksen olennaisena tehtävänä on tukea opiskelijaa rakentamaan ja sisäistämään matematiikan sisällöistä selkeästi jäsentynyt ja eksakti tietorakenne, jota voidaan soveltaa ymmärtäen uusissa tilanteissa. Tämän tehtävän toteuttamiseksi tarvitaan matemaattisen kielen lisäksi kuviokielen ja luonnollisen kielen joustavaa ja tarkoituksenmukaista käyttöä matemaattisen ajattelun ilmaisuun. (Joutsenlahti & Tossavainen 2018, 428.)

Matematiikan opiskelussa olennaista on myös virheiden tekeminen. Boaler (2015, 11–12) kirjoittaa, että aivoissa on havaittavissa aktiivisuuspiikkejä ihmisten tehdessä virheitä. Olennaista ei ole se, korjataanko virheitä jälkeenpäin vai ei, vaan ainoastaan kun aivotyöskentelyä haastetaan ja tehdään virheitä, luo se jo itsessään tilaisuuden oppimiselle. Matematiikan tehtäviä luotaessa tämä on syytä muistaa antamalla opiskelijoille tarpeeksi haasteita, jotta heillä on mahdollisuus tehdä virheitä. Haastavat tehtävät ja niiden rinnalle tuotu palaute, erityisesti positiivinen ja jatkamiseen kannustava, ovat loistava yhdistelmä oppimisen aikaan saamiseksi (Boaler 2015, 19). Boaler korostaa kirjassaan myös numeroilla ja matemaattisilla ilmiöillä leikkimistä sekä niiden tutkailua. Usein matemaattisten tilanteiden helpottaminen tai mallien esittäminen yksinkertaisimmassa muodossaan estää opiskelijoita käyttämästä luovuuttaan matematiikassa. Heidän roolinsa muuttuu ajattelevasta ja ongelmia ratkaisevasta kohti metodeja omaksuvaksi ja niitä sokeasti suorittavaksi (Boaler 2015, 42–46). Useimmiten olisi hyödyllistä tutkia ilmiöitä useista erilaisista näkökulmista ja erilaisilla lähestymistavoilla.

Matematiikkaa pidetään usein hyvin erilaisena muihin oppiaineisiin verrattuna. Tämä harha juontaa juurensa opiskelijoiden, vanhempien ja useiden opettajien käsityksiin matematiikasta ”suoritus” aineena, jonka sisältönä on suorittaa laskuja, opetella sääntöjä ja kaavoja sekä vastata kokeissa mekaanisesti oikealla tavalla esitettyyn kysymykseen. Todellisuudessa matematiikka on hyvin paljon muuta kuin edellä mainittua ja usein matemaatikot itse luonnehtivatkin matematiikkaa mallien tieteeksi (Science of Patterns) (Boaler 2015, 21–22). Ajansaatossa kouluissa ja oppilaitoksissa opiskeltava matematiikka on etääntynyt entisestään matemaatikoiden käyttämästä matematiikasta sekä arkeen ja elämään liittyvästä matematiikasta. Kouluissa opiskeltava matematiikka on lähentynyt vahvasti vastaamaan käsitettä ”laskeminen”. Opiskelijat saattavat käyttää tuhansia tunteja opetellessaan menettelymalleja ja sääntöjä, joita he eivät tule opiskelunsa ulkopuolella tarvitsemaan. Boaler (2015, 27) kirjoittaa, että matemaattisen työskentelyn voidaan katsoa koostuvan neljästä vaiheesta: kysymyksen asettelu, todellisen tilanteen muuttaminen matemaattiseksi malliksi, laskutoimintojen suorittaminen ja matemaattisesta mallista siirtyminen takaisin todelliseen maailmaan lopputuloksen arviointia varten. Kouluissa opiskeltavasta matematiikasta 80% on laskutoimintojen suorittamista ja useimmiten kynää ja paperia käyttämällä, vaikka esimerkiksi työnantajien näkökulmasta se on edellä listatuista vaiheista juuri se, jonka teknologiset apuvälineet voivat suorittaa työntekijän puolesta. Boaler (2015, 27) ehdottaakin, että matematiikan opiskelussa olisi syytä käyttää aikaa enemmän kaikkiin muihin matemaattisen työskentelyn vaiheisiin kuin laskutoimintojen suorittamiseen.

Ongelmanratkaisu on olennainen osa matematiikkaa tai jopa sen ydin. Usein todetaankin, että matematiikka kokonaisuudessaan on pohjimmiltaan ongelmanratkaisua (Leppäaho, 2018, 369). Opetuksessa käytettävät tehtävät voidaan ongelmanratkaisuun liittyen jakaa avoimiin ja suljettuihin tehtäviin. Oppikirjoissa olevat tehtävät ovat suurimmaksi osaksi suljettuja. Näissä tehtävissä alku- ja lopputilanne on yksikäsitteisesti määrätty. Avoimessa tehtävässä sen sijaan alku- tai lopputilanne tai jopa molemmat voivat sisältää lukuisia vaihtoehtoja. Leppäaho (2019, 370) toteaa, että avoimet tehtävät tarjoavat enemmän harkinnanvapautta ratkaisemisvaiheessa luonteensa vuoksi, mutta samanaikaisesti myös vaativat opiskelijalta heidän tietojensa monipuolisempaa käyttöä, joka voi aiheuttaa taas enemmän haasteita tehtävän ratkaisuun. Ongelmanratkaisutehtävä on hyvä silloin, kun opiskelija joutuu ponnistelemaan sekä tarkastelemaan jo osaamiaan asioita uudessa valossa (Leppäaho 2019, 370). Toisaalta onnistuneesti luodut tehtävät eivät edistä ongelmanratkaisua, mikäli opiskelija ei ole kiinnostunut niiden ratkaisemisesta. Näin ollen tehtäviä suunnitellessa on tärkeä pitää mielessä tehtävien mielekkyys opiskelijoille.

Osalla opiskelijoista voi esiintyä niin kutsuttua matematiikka-ahdistusta, joka tarkoittaa matematiikkaan kytkeytyviä ahdistuneita ja kielteisiä ajatuksia sekä kokemus siitä, että omat matemaattiset taidot ovat riittämättömät tai heikot (Huotilainen 2019, 282). Nykyajan pedagogiikka korostaa matematiikkaa ongelmanratkaisun välineenä, mikä on hyvä lähestymistapa matematiikka-ahdistuneelle opiskelijalle. Matematiikka-ahdistunutta opiskelijaa tukee kaksi lähestymistapaa matemaattisissa tehtävissä: käytetään paljon arkeen liittyviä ongelmia ja kysymyksiä, jonka kaltaisia ongelmia opiskelija on jo varmasti lukuisia onnistunut ratkaisemaan sekä perustehtävien pitkäjänteinen ratkominen, joka kehittää rutiinia ja helpottaa matematiikan kokonaisuuden hahmottamista. Lisäksi olisi olennaista aina pohtia myös mitä käsillä oleva lasku voisi käytännön tasolla tarkoittaa sekä arvioida oman lopputuloksen järkevyyttä. (Huotilainen 2019, 283.)

Ghilayn (2017, 45) mukaan sähköiset tehtävät pystyvät laajemmin mittaamaan opiskelijan osaamista opiskeltavan kurssin sisällöistä. Tämä tapahtuu, kun käytössä on kysymyksiä, joihin opiskelija ei voi suoraan vastata. Hyvä kysymys perustuu muuhun kuin pelkästään opiskelijan muistinvaraisen osaamisen testaamiseen. Sen tulisi testata opiskelijan todellista ymmärrystä ja kykyä yhdistellä, analysoida ja arvioida omaksumiaan asioita sekä kykyä luoda niiden pohjalta uutta. Tämä on hyvin lähellä niin kutsuttua tutkivaa oppimista. Teknologia mahdollistaa tutkivan lähestymistavan matemaattisiin tehtäviin, jolloin tehtävät muokkautuvat luonteeltaan kohti kokeellisuutta (Silfverberg 2018, 398). Tutkimustehtävän asettelussa olennaista on tehtävän osat, joissa opiskelijan tarkoitus on sähköisten materiaalien mahdollistamilla dynaamisilla ohjelmistoilla kokeilla ja tutkia jotain asiaa tai ilmiötä, tehdä niistä päätelmiä ja tutkia omien päätelmien toimivuutta.

Boaler (2015, 77–90) kirjoittaa keinoista lisätä opiskelijoiden innostusta matematiikkaan muokkaamalla tuttuja tehtäviä eri tavoin. Hän mainitsee kuusi asiaa huomioitavaksi, kun matemaattisia tehtäviä luodaan tai muokataan. Näiden huomioiden avulla matematiikan tehtävät muuttuvat rikkaammiksi ja tukevat oppimista paremmin sekä kasvattavat samalla innostusta matematiikkaa kohtaan.

Ensimmäinen huomio liittyy tehtävien avoimuuteen ja avaamisen, jolla tarkoitetaan rohkaisua huomioimaan erilaisia ratkaisutapoja ja -reittejä sekä havainnollistuksia tilanteille. Matemaattisia tehtäviä voi muuttaa avoimemmaksi esimerkiksi lisäämällä opiskelijalle vaatimuksen avata ratkaisuaan visuaalisella havainnollistuksella tai sanallisella selityksellä. Tämän huomion taustalla on ajatus luovuuden käyttämisestä matematiikassa sekä tarkoitus tuoda esiin matematiikan laajuutta ja monipuolisuutta. Opiskelijoiden ymmärrys käsillä olevista matemaattisista tilanteista tai ilmiöistä lisääntyy usein opiskelijoiden jakaessa vertaisilleen omia havainnollistuksia tai selityksiä ratkaisuistaan.

Toinen huomio liittyy tehtävien muokkaamiseen tutkimuspohjaisiksi. Sen sijaan, että opiskelijat vastaavat kysymyksiin toistamalla opittuja yksikäsitteisiä mekaanisia menetelmiä, kysymys pitäisi asettaa vaatimaan opiskelijalta uuden idean tuottoa ja innovatiivisuutta hyödyntämällä jo opittuja asioita. Useimmat perinteiset matemaattisen sisällön osaamista testaavat kysymykset voidaan muuttaa muotoon, jossa pyydetään opiskelijaa luomaan menettelytapa tai pohtimaan erilaisia ideoita ja käyttämään jotain menettelyä. Tästä esimerkkinä Boaler (2015, 78) mainitsee tehtävän: ”Laske suorakulmion pinta-ala sen sivujen ollessa 12 ja 2.” Tämän perinteisen asettelun sijaan tehtävän voisi esittää tutkimuspohjaisesti muodossa: ”Keksi mahdollisimman monta suorakulmiota, joiden pinta-ala on 24.” Matematiikan opiskelusta tulee monitahoisempaa ja mielekkäämpää, kun tehtävänä ei ole vain toistaa opittua sääntöjä ja menetelmiä.

Kolmas huomio liittyy tietyn käsitteen tai menetelmän opetuksen ja siihen liittyvien tehtävien käänteiseen järjestykseen. Kun opiskelijalle esitetään kysymys aiheesta, jota ei vielä olla opetettu, syntyy oiva mahdollisuus oppimiselle ja intuition käytölle. Ajatuksena on esittää kysymys opiskelijoille vielä tuntemattomasta aiheesta, jonka he joutuvat itse pähkäilemään. Vasta tämän jälkeen opettaja käy asian läpi yhdessä opiskelijoiden kanssa. Tätä metodia voi Boalerin (2015, 81) mielestä käyttää millä tahansa matematiikan alueella ja erityisesti minkä tahansa perusmetodin tai kaavan opetuksessa.

Neljäs huomio liittyy visuaalisen komponentin lisäämiseen. Piirtäminen on tehokas työkalu matemaatikoille ja matemaattisten ongelmien ratkaisijoille. Visuaalinen ymmärrys on matematiikassa olennaista ja lisää matemaattisten ongelmien ja tilanteiden ymmärrykseen aivan uuden tason. Tehtävissä voi käyttää kuvioita ja kaaviokuvio tai myös fyysisiä esineitä ja havaintomateriaaleja. Lisäksi Boaler (2015, 83) mainitsee erityisesti värikoodauksen olevan hyvä ja tehokas visuaalinen työkalu.

Viides huomio liittyy oppilaiden osaamistason huomioimiseen. Matemaattisten tehtävien olisi hyvä olla moniulotteisia, jolloin yksittäinen tehtävä sisältäisi useita haastavuudeltaan vaihtelevia osavaiheita sekä mahdollisuuksien mukaan myös useita ratkaisumahdollisuuksia. Tällöin mahdollisimman moni eritasoinen oppilas löytäisi tehtävästä itselleen sekä haasteita että onnistumisia. Boalerin (2015, 84) mukaan vaatimustasoa voi madaltaa kysymällä opiskelijalta, miten hän näkee tehtävän tai ongelman, jolloin opiskelija aktivoituu miettimään tehtävää. Tämän kaltaiset kysymykset myös tukevat tässä tutkielman osiossa aiemmin esitettyjä huomioita opiskelijan aktivoimisesta. Näiden kysymysten avulla onnistutaan tukemaan kaiken tasoisten opiskelijoiden oppimisprosesseja. Keino eriyttää tehtävää ylöspäin taitavien opiskelijoiden kohdalla, on asettaa tehtäväksi luoda samankaltainen matemaattinen tehtävä, joka on alkuperäistä jollain tavalla haastavampi. Näitä tehtäviä voivat taitavat opiskelijat myös esittää toisilleen tai ratkaista yhdessä, mikä voi lisätä opiskelijoiden motivaatiota samalla vaatien syvällistä ja vaativampaa ajattelua.

Kuudes ja viimeinen huomio liittyy päättelyyn ja todistamiseen. Päättelyn voidaan ajatella olevan yksi olennaisimmista asioista matematiikassa. Kun opiskelijat tarjoavat päättelyitä ja osoittavat kritiikkiä toistensa päättelyille, ovat he luonnostaan matemaattisia toimijoita ja samalla harjoittelevat taitoja, joita tarvitaan työelämässä. Päättely toimii väylänä matemaattiselle ymmärrykselle. Tarkoituksenmukaista olisi siis lisätä tehtäviin vaatimus päättelystä ja oman päättelyn todistamisesta. Todistaminen voidaan myös naamioida muotoon vakuuttaminen. Opiskelijoiden tehtävänä voi olla vakuuttaa kanssaopiskelija omasta päättelystään, jolloin vastavuoroisesti kanssaopiskelijan tehtävä olisi toimia skeptikkona. Huomio päättelyn ja vakuuttelun tärkeydestä on luonteeltaan Boalerin (2015, 86–89) esittämänä hyvin sosiaalinen työkalu. Useimmissa esimerkeissä päättelyä ja skeptistä kritisointia tehdään vuorovaikutuksessa vertaisten kanssa. Toki sosiaalisuus ei ole vaatimuksena, vaan kaikissa itsenäisesti suoritettavissa tehtävissä voidaan myös vaatia päättelyn tekoa ja oman päättelynsä todistamista keinona aktivoida matemaattista ajattelua ja oppimista.

Opetuksen keskeisenä tehtävänä sekä tavoitteena on tukea opiskelijoiden korkeamman tason ajattelutaitojen kehittymistä (Aksela, Kärnä & Tikkanen 2012, 13). Matemaattisia tehtäväkokonaisuuksia rakentaessa on hyvä ottaa huomioon Bloomin tavoitetaksonomia. Siitä on apua erityisesti pohdittaessa, mitä opiskelijoiden halutaan oppivan, minkälaista ajattelua tukea ja minkä tyyppisen tiedon omaksumista opetuksessa milloinkin halutaan painottaa. (Brame 2019, 29–31). Bloomin 1950-luvulla luoma taksonomia jakaa kognitiiviset prosessit vaativuuden mukaan eri tasoille. Tätä taksonomiaa on myöhemmin päivitetty Bloomin oppilaan Andersonin johdolla oppimiseen liittyvän uuden tutkimustiedon mukaisesti 2000-luvulle sopivammaksi. Päivityksen yhteydessä vuonna 2001 alkuperäistä teoriaa ajatteluntaidoista on päivitetty ja teoriaan lisättiin jaottelu erilaisista tiedon luokista.

Bloomin päivitetyssä teoriassa tiedolliset tavoitteet jaotellaan neljään eri luokkaan:

1. *Faktatieto*: Tiedon peruspalaset, kuten määritelmät ja terminologia.
2. *Konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto*: Tiedon peruspalasista muodostettu monimutkaisempi toimiva tietorakenne. Käsitteellinen

tieto sisältää luokituksia, periaatteet ja yleistykset sekä teorioita ja malleja, joita tieteenalat käyttävät ilmiöiden kuvaamiseen, selittämiseen ja ennustamiseen.

3. *Proseduraalinen tieto eli menetelmätieto*: Prosessien toiminnan ymmärtäminen. Esimerkiksi taidot, algoritmit, tekniikat ja menetelmät sekä niiden käytön perusteet.
4. *Metakognitiivinen tieto*: Tieto erilaisista oppimisstrategioista, niiden toimivuudesta ja käyttötilanteista sekä ymmärrys henkilökohtaisista tiedoista ja oppimisprosesseista.

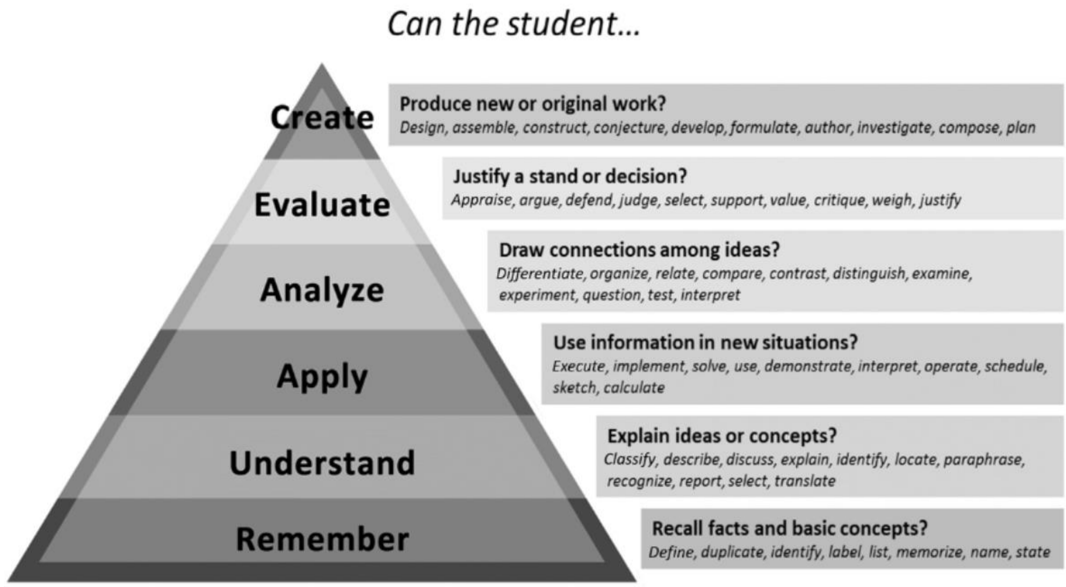
Näitä tietoluokkia voidaan käyttää herättämään pohdintaa siitä, millaisia asioita opiskelijoiden halutaan tietävän ja oppivan. Asiantuntijat onnistuvat jäsentämään tietonsa rikkaaseen tietoverkkoon olennaisten ominaisuuksien avulla, kun taas noviisien tietoverkko on paljon hajanaisempi ja perustuu yleensä pinnallisiin tietoihin. Jos tietoluokkia ei huomioida opetuksessa, voi oppilaiden oppiminen perustua faktojen muistamiseen ilman niiden jäsentämistä merkityksellisiin tietoverkkoihin. Opettajien tulisi tietoisesti priorisoida opetuksessa sellaista käsitteellistä ymmärrystä, joka tukee toimivien tietoverkostojen syntymistä, joista tietoja voidaan helposti siirtää käytettäväksi. (Brame 2019, 32.)

Bloomin tavoitetaksonomia kuvaa kognitiivisia prosesseja kuudella eri tasolla. Nämä tasot (tai kategoriat) kuvataan usein kolmiomallin avulla siten, että alhaalla on yksinkertaisimmat kognitiiviset prosessit ja ylhäällä monimutkaisimmat (Kuvio 1). Kuviossa kolmion vierestä löytyy jokaiselle tasolle esimerkki verbejä, jotka johdattavat käyttämään kyseisellä tasolla toimivia kognitiivisia prosesseja. Päivitetyn Bloomin taksonomian tasot ovat:

1. *Muistaminen:* tietojen palauttaminen muistista tunnistamalla ja muistamalla.
2. *Ymmärtäminen:* merkityksen luominen, kuten tietojen järjestäminen luokkiin tai erilaisten yksinkertaisien metodien käyttö tutuissa tilanteissa.
3. *Soveltaminen:* omaksutun tiedon käyttäminen erilaisissa tilanteissa ja menetelmien sekä algoritmien rutiininomaista käyttämistä.

4. *Analysointi:* ongelman pilkkominen ja eri näkökulmista tutkiminen, perusteluja ja johtopäätöksiä vaativa toiminta, avainkohtien, sopivien mallien ja yhtymäkohtien löytäminen.
5. *Arvionti:* päätösten tekeminen kriteerien ja standardien pohjalta käyttäen tukena perustelua tai kriittistä ajattelua.
6. *Luominen:* suunnittelua ja tuottamista hyödyntäen pienempien palasten kokoaminen yhdeksi kokonaisuudeksi, kuten hypoteesiksi, uudeksi säännöksi tai yleistykseksi.

   (Brame 2019, 30–31; Bartlett 2014, 71–75; Aksela ym. 2012, 13.)



Kuvio 1. Bloomin päivitetty taksonomia kognitiivisille prosesseille. (Brame 2019, 31.)

Näistä tasoista alemman tason ajattelutaitoja ovat muistaminen ja ymmärtäminen. Esimerkkinä näille tasoille tyypillisistä tehtävistä ovat rutiininomaiset laskutehtävät sekä käsitteiden määrittelytehtävät. Soveltamisen, analysoinnin, arvioinnin ja luomisen katsotaan olevan korkeamman tason ajattelutaitoja. Niitä vaativat tehtävätyypit ovat usein esimerkiksi avoimia tai ongelmanratkaisutehtäviä. (Brame 2019, 31; Aksela ym. 2012, 13.) Akselan ym. (2012, 14) mukaan vaikka ajattelutaitojen tasot etenevät hierarkkisesti muuttuen helpommasta vaativammiksi, pidetään usein ymmärtämisen ja soveltamisen tasoja osittain päällekkäisinä. Jotkin ymmärtämisen tasolle kuuluvista tehtävistä saattavat olla tiedollisesti haastavampia kuin helpoimmat soveltamista edellyttävät tehtävät. Tutkimusten mukaan arvioilta 60% matematiikan kysymyksistä ja tehtävistä ovat alemmalle tasolle kuuluvia, 20% ovat korkeammalla tasolla ja loput 20% proseduraalisia

(Bartlett 2014, 75). Tämä herättää huolta siinä mielessä, että suurin osa kysymyksistä ja tehtävistä haastaa oppilailta vain alemman tason ajattelutaitoja. Jotta kysymyksien ja tehtävien käytöstä opetuksessa tulisi tehokkaampi työkalu, pitäisi panostaa enemmän korkeamman tason ajattelutaitoja vaativiin kysymyksiin ja tehtäviin sekä niiden laatuun.

Opiskelijoiden toivotaan tietysti muistavan ja ymmärtävän opiskeltavan kurssin sisältöjä, mutta sen lisäksi heidän odotetaan myös pystyvän parempaan kuin ainoastaan muistamaan ja ymmärtämään sisältöjä (Brame 2019, 31). Tässä kohtaa Bloomin tavoitetaksonomian kognitiivisten prosessien tasot sekä eri tietoluokat voivat auttaa meitä suunnittelemaan ja hahmottamaan, mitä tämä opiskelijoiden ”parempi” suoritus voisi olla ja miten siihen päästäisiin. Alkuperäinen taksonomia oli yksiulotteinen sisältäen ainoastaan kognitiivisten prosessien jaottelun, mutta päivitetty versio on kaksiulotteinen sisältäen kognitiivisten prosessien lisäksi myös tietoluokat, jotka muodostava yhdessä 24 uutta solua taulukkoon (Darwazeh 2017, 16). Näissä soluissa kuvataan verbien avulla kognitiivisia toimintoja, jotka ottavat huomioon eri tietoluokat. Kuviossa 2 on esitetty kaksiulotteinen taulukko päivitetystä taksonomiasta. Päivitetyn taksonomian kaksiulotteisuus tukee paremmin opettajien ja kouluttajien kykyä suunnitella laajemmin ja kattavammin opetustaan. Aksela ym. (2012, 14) kirjoittavat aiheesta, että päivitetty taksonomia helpottaa mielekkään opetuksen suunnittelua. Sen avulla voidaan luokitella oppimisen tavoitteita sekä sen arvioinnissa hyödynnyttäviä tehtäviä näissä kahdessa ulottuvuudessa.

	The Cognitive Process Dimension					
The Knowledge Dimension	Remember	Understand	Apply	Analyze	Evaluate	Create
Factual Knowledge	List	Summarize	Classify	Order	Rank	Combine
Conceptual Knowledge	Describe	Interpret	Experiment	Explain	Assess	Plan
Procedural Knowledge	Tabulate	Predict	Calculate	Differentiate	Conclude	Compose
Meta-Cognitive Knowledge	Appropriate Use	Execute	Construct	Achieve	Action	Actualize

Kuvio 2. Päivitetyssä Bloomin taksonomiassa olevien kognitiivisten prosessien sekä tietoluokkien dimensiot. (Darwazeh 2017, 17.)

4 TODENNÄKÖISYYSLASKENTA

Todennäköisyysteoria on matematiikan osa-alue, jonka keskeisimpänä tehtävänä ja tarkoituksena on kuvata sekä tutkia satunnaisilmiöihin liittyviä matemaattisia malleja. Todennäköisyysmallit pyrkivät kuvaamaan satunnaiskokeita eli kokeita, joita voidaan toistaa (äärettömän monta kertaa) ja joiden lopputulosta ei voida edes täysin kontrolloidussa tilanteessa yksikäsitteisesti ennustaa satunnaisuuden vuoksi. (Gut 2007, 1.) Näiden mallien avulla pyritään kuvaamaan ja toisaalta erottamaan satunnaisilmiöiden systemaattiset ja satunnaiset piirteet (Mellin 2006, 8). Todennäköisyysteoriasta on olemassa useita luonnehdintoja, joista osa on syvällisiä sekä eksakteja ja osa pinnallisempia ja pelkistettyjä. Esimerkiksi Applebaum (2014, 4) luonnehtii todennäköisyysteoriaa: ”Todennäköisyysteorian yksi keskeisimmistä tavoitteista, kuten arvata saattaa, on laskea todennäköisyyksiä”. Tässä tutkielmassa todennäköisyysteoria termin sijaan puhutaan todennäköisyyslaskennasta, joskin se on tieteessä vähemmän formaali kirjoitusasu. Todennäköisyyslaskennan teorian pohjan voidaan katsoa rakentuvan käsitteen satunnaisuus pohjalta. Reaalimaailman ilmiön voidaan katsoa olevan stokastinen eli satunnainen, mikäli sillä on seuraavat kolme ominaisuutta:

1) Ilmiön on mahdollista päätyä alkutilasta useisiin erilaisiin lopputiloihin. Ilmiöllä pitää siis olla useita erilaisia vaihtoehtoisia tuloksia.
2) Ilmiön alkutilanteesta ei voida tarkasti määrittää tai laskea ilmiön lopputilaa. Ilmiön vaihtoehtoisten lopputulosten toteutumista ei voida siis ennustaa.
3) Vaikkei ilmiön lopputulosta voida ennustaa tarkasti, eri lopputilojen suhteelliset frekvenssit käyttäytyvät ilmiön toistuessa säännönmukaisesti. Ilmiön lopputilojen suhteelliset frekvenssit pitää siis olla määritettävissä. (Mellin 2006, 9.)

Todennäköisyyslaskennan historia on alkujaan uhkapeleissä, kun uhkapelurien kiinnostus tuurin ja todennäköisyyksien tutkimiselle muiden huijaamiseksi tai voittamiseksi syntyi (Rohatgi & Saleh 2000, 1). Tällöin ei kuitenkaan todennäköisyyslaskenta matematiikan alana kehittynyt juuri lainkaan, sillä tuon ajan matemaatikkojen mielenkiinto teorian kehittämiselle ei uhkapeleihin liittyvien ilmiöiden kohdalla saanut sijaa kombinatoristen päättelyiden pohtimisen rinnalla. Useampi matemaatikko, kuten Laplace, Joseph Bertrand, Pierre de Fermat ja John Graunt, ovat kehitelleet teorioita liittyen todennäköisyyslaskentaan, mutta useimmat niistä ovat olleet aukollisia tai alkeellisia. Todennäköisyyslaskennan nykyinen teoriapohja on iältään suhteellisen nuori ja sen luojana toimi A. N. Kolmogorov. Vuonna 1933 hän aksiomatisoi todennäköisyyslaskennan teoksessaan *Foundations of the Theory of Probability*. Komogorovin lähestyi todennäköisyyslaskentaa mittateorian kautta, mikä teki todennäköisyysteorian perusteista loogisesti yhtenäisen sekä samalla nosti todennäköisyyslaskennan osaksi modernia matematiikkaa. (Rohatgi & Saleh 2000, 1–2; Pfeiffer 2009, 5–6.)

Nykyään todennäköisyyslaskenta on erittäin tehokas ja tärkeä matemaattinen työkalu, jonka avulla voidaan ymmärtää maailmaa, ja jota ei voida kuvata deterministisillä laeilla (Skorokhod 2004, 5). Todennäköisyyslaskennan avulla on löydetty tarkasti määrättyjä ominaisuuksia tilanteista, jotka on ajateltu aiemmin olevan täysin sattuman varassa. Sattuma on aina ollut vahvasti läsnä ihmisten jokapäiväisessä elämässä. Ihmisen syntymä, kuolema ja itseasiassa koko elämä on sattumaketju, jota ei voida laskea tai ennustaa hyödyntämällä deterministisiä lakeja. Todennäköisyysmallit ja -menetelmät koskettavat monia nykyelämän osa-alueita (Pfeiffer 2009, 5). Monenlaiset satunnaisprosessit, luotettavuusmallit ja kokeellisen työskentelyn tilastolliset huomiot ovat erittäin tärkeässä roolissa tekniikan ja fysiikan aloilla. Jopa monissa yritys- ja henkilöstöjohtamisen päätöksentekoprosessien ongelmatilanteissa käytetään apuna sovelletusti useita todennäköisyyslaskentaan perustuvia menetelmiä ja työkaluja. Myös tilastollisen analyysin menetelmissä käytetään perustana todennäköisyyslaskennan analyysejä.

Todennäköisyyslaskennan ymmärtäminen on tärkeää jokaiselle meistä. Dos Santos Ferreira ym. (2014, 132) toteavat, että ihmiset tarvitsevat todennäköisyyslaskennan ymmärrystä jokapäiväisessä elämässään. Huonoimmassa tapauksessa todennäköisyyslaskentaan liittyvät käsitteelliset virheet tai ymmäryksen puute voivat vaikuttaa negatiivisesti ihmisten arkielämän henkilökohtaisiin päätöksiin. Myös Aizikovitsh-Udi & Radakovic (2012, 4943) kirjoittavat, että todennäköisyyslaskennan taitoja tarvitaan monissa elämään liittyvissä teemoissa; terveys, talous ja politiikka. He toteavat, että useimmiten ihmisten intuitiiviset virheet todennäköisyyksiin liittyen johtuvat ihmisten heuristisesta lähestymistavasta tapahtumien tutkailuun. Esimerkiksi usein ihmiset arvioivat tapahtuman todennäköisyyden sen mukaan, miten hyvin tapahtuman kuvaus toteuttaa heidän käsityksensä mahdollisesta lopputuloksesta tai tapahtuman aikaansaamasta prosessista. Usein ihmiset sivuuttavat tapauksien perustodennäköisyydet ja niiden huomioimisen, jolloin he päätyvät heuristisen arvauksensa seurauksena täysin väärään lopputulokseen. Tähän kaikkeen pohjautuen voidaan todeta todennäköisyyslaskennan opiskelun olevan hyvin tärkeää, mutta usein myös tavallisesta koulutyöstä poikkeavaa, sillä todennäköisyyslaskennan periaatteet liittyvät vahvasti ihmisten arkielämään (Dos Santos Ferreira ym. 2014, 132).

Jotta opiskelijat voivat oppia todennäköisyyslaskennan teoriaa ja sen ymmärrystä, täytyy heidän opiskelussaan käsitellä todennäköisyyteen liittyviä konsepteja ja käyttää niitä kriittisesti eri yhteyksissä. Todennäköisyyslaskentaa voidaan oppia, kun opiskelu perustuu kolmen peruskäsitteen ymmärtämiseen; käsitys sattumasta ja satunnaisuudesta sekä todennäköisyyden tulkinnasta (Dos Santos Ferreira ym. 2014, 132).

Todennäköisyyslaskennan opiskelussa olennaisia ovat erilaisten aineistojen simulointi ja analysointi. Näin opiskelijalle havainnollistuu tutkittava ja opiskeltavana oleva asia konkreettisemmin. Dos Santos Ferreiran ym. (2014, 132–133) toteavat, että useiden tutkimusten mukaan tvt:n käyttäminen todennäköisyyslaskennan opetuksessa ja opiskelussa lisää opiskelijoiden kykyä ymmärtää abstrakteja ja vaikeita konsepteja. Tämä pohjautuu juuri sähköisten oppimisympäristöjen ja sovellusten kykyyn luoda simulaatiota vaikeista tai jopa muutoin fyysisessä maailmassa mahdottomista tilanteista sekä tvt:n aikaan saamaan aktiivisen oppimiseen, joka mahdollistaa tiedon rakentumisen opiskelijoilla. Tietokonesimulaatioiden ja satunnaisgeneraattoreiden käyttäminen opiskelussa johtaa myös kahden toisiaan täydentävien matemaattisten tasojen käyttämiseen: teoreettisen ja empiirisen (Dos Santos Ferreira ym. 2014, 133). Myös Aizikovitsh-Udin & Radakovicin (2012, 4945) tutkimuksessa osoitettiin, että ehdollista todennäköisyyttä ja Bayesin laskusääntöä opiskeltaessa oli dynaamisesta sähköisestä esityksestä apua oppimisessa. Interaktiiviset Venn-diagrammit auttoivat visuaalisuudellaan ymmärtämään riippuvuuden sekä ehdollisuuden vaikutuksia päättelyprosessiin. Tutkimuksessa todettiin myös yleisemmällä tasolla, että dynaamiset visualisaatiot luovat mahdollisuuden matemaattisten konseptien syvällisempään ymmärrykseen. Tämä asia on syytä, ottaa huomioon suunniteltaessa tutkielmassa luotavia sähköisiä tehtäviä.

4.1 Todennäköisyyslaskennan peruskurssi

Tässä tutkielmassa tuotetut tehtävät suunnataan Turun yliopiston tilastotieteen kurssille *TILM3553 Todennäköisyyslaskennan peruskurssi, 4op*. Kurssi on perusopinto-tason kurssi ja useimmiten ensimmäinen todennäköisyyslaskentaa käsittelevä kurssi matematiikkaa ja tilastotiedettä opiskeleville opiskelijoille. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kurssi sisältää hyvin pitkälti perusteita todennäköisyyslaskennan osa-alueilta. Kurssi on tarkoitettu suoritettavaksi osana tilastotieteen tutkinto-ohjelman perusopintoihin tai matematiikan tutkinto-ohjelman aineopintoihin. Lisäksi kurssi soveltuu myös sivuaineena tilastotiedettä tai matematiikkaa lukeville opiskelijoille. (Turun yliopisto 2020.)

Turun yliopiston (2020) opinto-oppaassa on kerrottu Todennäköisyyslaskennan peruskurssin osaamistavoitteet sekä keskeiset sisällöt. Opinto-oppaassa kurssin tiedossa on kirjattu kurssin osaamistavoitteeksi: ”Opiskelija oppii muodostamaan tapahtumia ja laskemaan näiden todennäköisyyksiä soveltamalla todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä. Tämän lisäksi opiskelija oppii muodostamaan erilaisista tapahtumista satunnaismuuttujia, tunnistamaan tunnetuimpia parametrisiä todennäköisyysjakaumia, käsittelemään satunnaismuuttujien todennäköisyysjakaumia sekä laskemaan näiden tunnuslukuja.” Kurssin jälkeen opiskelijan tulisi siis osata todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet ja laskusäännöt sekä satunnaismuuttujiin liittyvät peruskäsitteet, jakaumat ja niihin liittyvien tunnuslukujen laskemisen.

Kurssin keskeiset sisällöt ovat opinto-oppaassa listattu seuraavalla tavalla: ”Todennäköisyyden matemaattisia perusteita (satunnaiskokeet ja niihin liittyvät tapahtumat, riippumattomuus, ehdollinen todennäköisyys), satunnaismuuttujat ja niiden tunnusluvut, tärkeimpiä diskreettejä ja jatkuvia jakaumia sekä keskeinen raja-arvolause ja normaaliapproksimaatio.” (Turun yliopisto 2020.) Tämän tutkielman tehtävien ideointia ohjaa edellä mainitut kurssin osaamistavoitteet sekä keskeiset sisällöt. Tutkielmassa tuotettavat sähköiset tehtävät eivät tule kattamaan kurssin kaikkia sisältöjä, vaan ne toteuttavat kurssin sisältöjä valikoidusti siten, että tehtävät nojaavat tämän tutkielman teoriaosassa kerrottuihin sähköisten tehtävien etuihin ja oppimista tehostaviin ominaisuuksiin.

5 SÄHKÖISET TEHTÄVÄT

Tätä tutkielmaa varten on tuotettu viisi sähköistä tehtävää liittyen tutkielman kohdekurssin sisältöihin. Kaikki tehtävät on suunnattu todennäköisyyslaskennan peruskurssille ja ovat yliopiston ensimmäisen todennäköisyyslaskennan kurssin sisältöjen mukaisia. Tehtävät on suunniteltu tuomaan esiin sähköisten tehtävien parhaita puolia ja ottamaan huomioon sähköisten tehtävien mahdollistamat edut. Yhtä tehtävää kokonaisuutena nimitetään termillä ViLLE-kierros ja yksi kierros koostuu useammista vaiheista. Kysymysmuotoja on kolmenlaisia: monivalintoja, joissa valitaan joko yksi tai useampia oikeita vastauksia, sekä avoin kysymys, johon voidaan vastata lukuarvolla, matemaattisilla symboleilla tai näiden sekoituksilla. Selostus sisältää kuvat kierroksen kaikista vaiheista ja eri palauteviestit. Jokaisen vaiheen jälkeen ViLLE tarkistaa opiskelijan vastaukset automaattisesti ja antaa vastauksen oikeellisuuden perusteella opiskelijalle palautetta. Kierroksen lopuksi ViLLE pisteyttää opiskelijan suorituksen kokonaisuutena riippuen siitä, kuinka paljon opiskelija teki virheitä. Tässä raportissa tehtävät esitellään yksi kerrallaan ja jokaisen tehtävän selostus alkaa lyhyellä tiivistyksellä tehtävän ideasta, todennäköisyyslaskentaan liittyvistä kohdesisällöistä sekä tehtävän tavoitteista oppimisen suhteen. Tämän jälkeen esitetään kuvina esimerkkikierros tehtävästä. Jokaisen vaiheen kuvien jälkeen selostetaan lyhyesti lisää kyseisestä vaiheesta; sen sisällöstä, tavoitteista sekä ominaisuuksista erityisesti sähköisten tehtävien näkökulmasta.

Ensimmäiset neljä tehtävää muodostavat kaksi laajempaa tehtäväkokonaisuutta. Näissä kokonaisuuksissa käsitellään samoja todennäköisyyslaskennan teemoja ja sisältöjä sekä muutoinkin tehtävän aihepiiri pysyy samana. Laajemman tehtäväkokonaisuuden etuna on aihepiirin pysyminen samana. Opiskelijan ei tarvitse joka tehtävässä orientoitua uuteen ilmiöön tai tehtäväskenaarioon. Näin tehtävän fokus pysyy paremmin matemaattisissa sisällöissä ja niiden pohtimisessa. Tällöin pystytään syventymään myös vaiheittain paremmin matemaattiseen sisältöön, kun huomiota ei vie orientoituminen uuteen tilanteeseen. Tehtäväkokonaisuudet on myös pilkottu erillisiin kierroksiin, sillä muutoin tehtävästä tulisi turhan pitkä ja opiskelijalle se voisi tuottaa turhautumista tai huonompia kokonaispisteitä. Useat opiskelijat ovat motivoituneita keräämään ViLLE-pisteitä. Mikäli opiskelija haluaa täydet pisteet kierrokselta, mutta tekee pitkän kierroksen lopussa virheen, joutuu hän aloittamaan koko tehtävän alusta saadakseen täydet pisteet. Näin myös tehtävän matemaattinen sisältö ja opiskeltavat asiat saadaan pilkottua pienemmiksi eikä yksittäinen tehtävä sisällä valtavasti erilaisia käsiteltäviä asioita kerralla harjoiteltavaksi.

Kaikissa tehtävissä toistuu tietyt sähköisten tehtävien parhaat puolet. Näistä kerrotaan yleisesti seuraavaksi eikä jokaisen tehtävän kohdalla uudelleen toistaen. Yksi sähköisten tehtävien ominaisuus, joka esiintyy kaikissa tämän tutkielman tehtävissä, on tehtävän toistettavuuden mielekkyys. Sähköiseen tehtävään on melko helposti koodattavissa muuttuvia lukuarvoja tai sisältöjä. Kun opiskelija aloittaa tehtävän alusta tai tekee saman tehtävän uudestaan, muuttuu kaikissa tehtävissä lähes kaikki lukuarvot, jolloin samoilla vastausten arvoilla ei voi tehtävää suorittaa uudelleen. Muutamassa tehtävässä muutokset ovat laajempia. Riippuen tehtävän lukuarvoista kysymykset ja eri vaiheiden palautteet muuttuvat erilaiseksi. Näin saadaan vielä enemmän vaihtelua tehtävää uudelleen suorittaessa. Tehtävän arvojen tai sisällön muuttumisen etuna on, että tehtävä pysyy toistettaessa mielekkäämpänä. Samaa oppikirjan tehtävää toistaessa opiskelija suorittaa samaa tehtävää samoilla arvoilla kerta toisensa jälkeen, jolloin se alkaa nopeasti jäämään mieleen ja suoritus muuttuu mekaanisemmaksi. Tällöin varsinainen oppiminen heikkenee, kun opiskelija ei joudu itse aktiivisesti pohtimaan tehtävän suoritusta niin paljoa. Oppiminen tehostuu, kun opiskelija joutuu kerta toisensa jälkeen pohtimaan tehtävää aktiivisesti vähintäänkin uusien muuttuneiden arvojen takia. Entisestään oppiminen tehostuu, kun tehtävän sisältö muuttuu enemmän kuin vain arvojen osalta. Tällöin tehtävää voidaan esimerkiksi lähestyä eri näkökulmasta ilmiön tai matematiikan oppisisältöjen säilyessä samana. Tällöin opiskelussa huomio keskittyy enemmän matematiikan sääntöjen tai ilmiön ymmärtämiseen vain oikeiden vastausten metsästämisen sijaan. Toisaalta, jos opiskelija haluaa painottaa harjoitteluaan jonkin matematiikan säännön tai kaavan mekaaniseen suorittamiseen, tehostaa muuttuvat arvot tämänkin kaltaista oppimista.

Yksi kirjallisuudenkin (Ghilay 2017, Kinnari-Korpela 2019, Sankila 2015b) mukaan tärkeimmistä sähköisten tehtävien ominaisuuksista on välitön ja adaptiivinen palaute. Palautteen välittömyyden etuna on, että opiskelija saa heti vastattuaan tietää, miten hyvin hän hallitsi kysytyn asian. Vastauksen ollessa oikein ja opiskelijan saadessa siitä palaute, voi hän hyvillä mielin jatkaa eteenpäin ja nojautua siihen, että aiemmat tehtävän vaiheet ovat oikein. Tästä on etua etenkin, jos myöhemmissä tehtävän vaiheissa tarvitaan aiempien vaiheiden välituloksia. Opiskelija tietää niiden olevan oikein, jolloin hänen ei tarvitse vasta tehtävän lopussa tuskailla ja alkaa pohtimaan, missä kohtaa on tullut virhe. Virheellisten käsitysten sekä esimerkiksi huolimattomuusvirheiden löytäminen on näin ollen helppoa, sillä niistä tulee aina välitön palaute. Tämä vähentää riskiä motivaation pienenemiselle sekä auttaa opiskelijaa heti kohdentamaan huomiota väärin menneeseen kohtaan tai virheeseen matemaattisessa ajattelussaan.

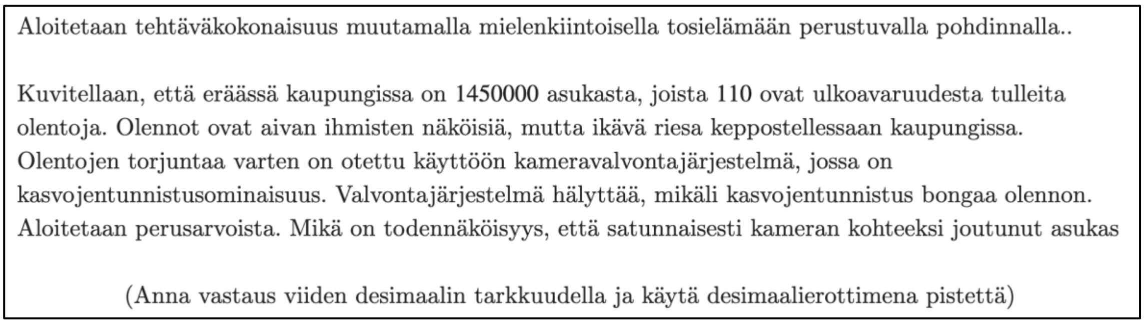
Jokaisen tehtävän sisältämien vaiheiden jälkeen opiskelija saa myös adaptiivisen palautteen, jota voidaan koodaamalla helposti muokata ja kohdentaa. Opiskelija saa jokaisessa vaiheessa erilaista palautetta riippuen onko hänen vastauksensa oikein vai väärin. Oikean viestin vastauksessa voidaan opiskelijaa kehua ja kannustaa, jolloin motivaatiota tehtävän tekemiseen saadaan pidettyä yllä. Perinteisissä tehtävissä useimmiten opiskelija saa tietää tehtävänsä olevan oikein vasta tehtävän tehtyä. Tällöin joutuu tekemään kovasti töitä ennen kuin palaute saapuu opiskelijalle. Huonolla tuurilla tehtävä voi myös olla väärin, jolloin opiskelija joutuu etsimään tekemäänsä virhettä eikä välttämättä kauhean helposti keksi millä tavoin hänen pitäisi muuttaa ajatteluaan tai mihin suuntaan viedä sitä. Tässä auttaa sähköisessä tehtävässä tuleva väärän vastauksen viesti. Palaute tulee välittömästi opiskelijan antaessa virheellisen vastauksen. Lisäksi voidaan tehtävän tekijän toimesta eritellä ja valita palautteen sisältö. Palautteessa voidaan pyrkiä muistuttamaan opiskelijaa tyypillisistä virheistä, jotta ne voidaan karsia pois suorituksesta tai opiskelijalle voidaan antaa vihjeitä ja tukea, mihin suuntaan ajattelua kannattaa viedä. Tarkoituksena ei ole antaa opiskelijalle oikeita vastauksia vaan ainoastaan tukea opiskelijaa sopivasti, jotta hän itse löytää oikean ratkaisun kysyttyyn asiaan. Tämä tukee opiskelijan omaa aktiivista oppimista ja auttaa opiskelijaa ymmärtämään tehtävässä harjoiteltavaa asiaa. Väärän vastauksen viestin sisältöä voidaan myös muuttaa monia kysymyksiä sisältävässä vaiheessa sen mukaan mihin kysymyksiin opiskelija on osannut vastata oikein ja mihin taas ei. Näin opiskelijan saama palaute on kohdennettua ja vastaa parhaiten hänen tuen tarpeisiinsa, jotta hän saa tehtävän suoritettua. Tämän tutkielman tehtävien tarkemmassa esittelyssä on vielä syvennytty vaihekohtaisesti erilaisten palautteiden sisältöihin ja niiden taustalla oleviin ajatuksiin.

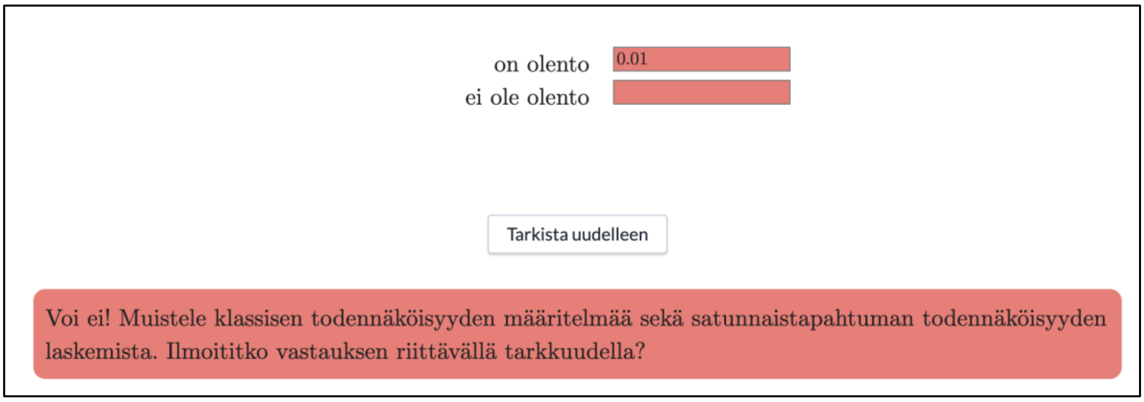
ViLLE pisteyttää kierrokset automaattisesti opiskelijan suoriutumisen perusteella. Tämä on oiva tapa opiskelijalle, sekä opettajalle, seurata oppimista. Opiskelija näkee mitkä tehtävät ja minkälaiset sisällöt ovat sujuneet hyvin ja missä on vielä harjoittelemista. Samalla pisteytyssysteemi voi toimia opiskelijaa motivoivana tekijänä, sillä monet opiskelijat haluavat kerätä itselleen mahdollisimman paljon ViLLE-pisteitä. Esimerkiksi Turun yliopiston monilla kursseilla voidaan tarpeeksi suuresta ViLLE-pistesaldosta antaa lisäpisteitä tai kompensaatiota tenttipisteisiin tai kurssin kokonaispisteisiin. Näin ollen siis monet opiskelijat tekevät heille haastavia tehtäviä toistamiseen saadakseen täysin onnistuneen kierroksen. Samalla opiskelija aktiivisesti myös harjoittelee tehtävässä esitettyjä oppisisältöjä ja oppii ne hallitsemaan, sillä se on usein vaatimus täysille pisteille tietyltä kierrokselta.

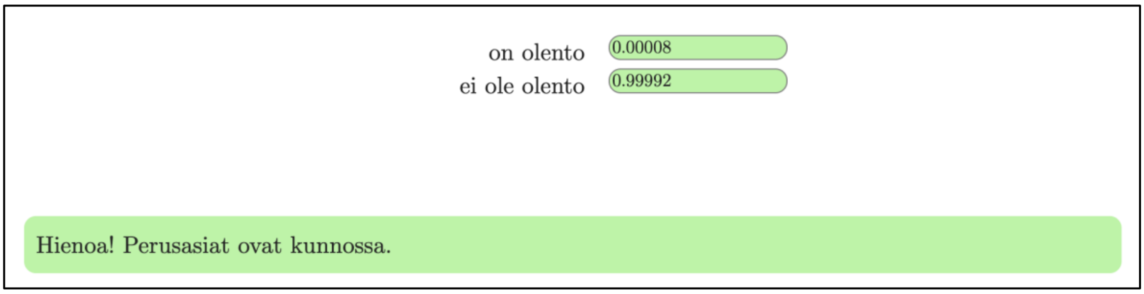
5.1 BRF osa 1

Ensimmäinen tehtäväkokonaisuus on nimeltään BRF, joka tulee sanoista Base Rate Fallacy. Nimi on lyhennetty, jotta opiskelijat eivät lähtisi tehtävää ennen tai sen aikana etsimään internetistä tietoa kyseessä olevasta ilmiöstä, vaan pohtisivat ja ratkaisisivat tehtäväkokonaisuuden itsenäisesti omilla tiedoilla tai kurssimateriaaliin nojautuen. Tälle ilmiölle ei ole olemassa kirjallisuudessa selkeää vakiintunutta suomennosta. Tässä tutkielmassa ilmiö nimetään suomeksi termillä perusarvojen laiminlyönti. Tehtäväkokonaisuus käsittelee ilmiötä siitä, miten perusarvojen laiminlyönti sekä virheellinen positiivisuus osana todennäköisyyksien arviointia johtaa helposti vääränlaisiin tulkintoihin. Erilaisten mahdollisten lopputulosten ja niiden todennäköisyyksien arviointi on olennainen osa päätöksentekoa tilanteissa, joihin liittyy epävarmuutta. Usein kuitenkin näissä tilanteissa, joissa pitää arvioida subjektiivisesti ehdollista todennäköisyyttä, tekevät ihmiset systemaattisesti virheitä todennäköisyyksien arvioinnissa. Perusarvojen laiminlyönti kuvaa ihmisten taipumusta painottaa yksilöivää informaatiota ohi perusarvojen. Käytännössä ihmiset siis tarttuvat yksilöivään informaatioon erittäin merkittävänä tietona, vaikka sen vaikutus kyseiseen tilanteeseen olisi todella pieni verrattuna perusarvojen vaikutukseen. (Yang & Wu, 2020.)

Tämä tehtäväkokonaisuus sisältää erilaisia todelliseen elämään viittaavia tilanteita, joissa ilmiö nousee esiin. Näissä tilanteissa yksilöivä informaatio on virhemarginaaliin liittyvät todennäköisyydet, kuten esimerkiksi virheellinen positiivisuus. Perusarvojen laiminlyöntiä ei suoranaisesti käsitellä luentomateriaaleissa, mutta ilmiön tutkiminen vaatii todennäköisyyslaskennan perusteiden hallintaa. Näin ollen tehtäväkokonaisuus on siis hieman soveltavampi ja vaatii opiskelijalta taitoja pohtia sekä tutkiskella hänelle esitettävää ilmiötä perustietojen pohjalta. Tehtäväkokonaisuuden tavoitteena on tutustuttaa opiskelija perusarvojen laiminlyöntiin ilmiönä sekä harjoittaa todennäköisyyslaskennan tietojen soveltamista tilanteissa, jotka koskettavat arkielämää. Lisäksi opiskelijalle esitetään keinoja välttää perusarvojen laiminlyönnin tapahtuminen ja samalla vahvistetaan Bayesin lauseen käyttöä ja kokonaistodennäköisyyden laskemista ehdollisen todennäköisyyden tapauksissa.







Tehtäväkokonaisuuden ensimmäinen osa painottuu perusarvojen laiminlyönti -ilmiön esittelyyn useampien arkielämään liitettävissä olevien tilanteiden avulla. Tosielämään kytkeytyvät tehtävät, jotka opiskelija ymmärtää ja jotka hän pystyy jollain tasolla konkretisoimaan, ovat usein motivoivampia tehdä kuin abstraktit ja käsitteelliset tehtävät. Lisäksi matematiikan käsitteet ja säännöt ovat usein helpompia sisäistää ja muistaa, kun ne pystytään tuomaan konkreettiselle tasolle. Ensimmäinen esimerkkitilanne liittyy kasvojentunnistusjärjestelmään, minkä ensimmäisessä vaiheessa opiskelijalta testataan satunnaistapahtuman todennäköisyyden laskemisen taitoja. Virheellisen vastauksen viestissä on pyritty muistuttamaan mahdollisesti yleisestä virheestä eli vastauksen epätarkkuudesta.

Olennon tunnistuksessa voi tapahtua 1% todennäköisyydellä virhe. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kameran tulkitessa asukkaan olennoksi hälytys käynnistyy 99% varmuudella. Toisaalta jonkun muun asukkaan kuin olennon osuessa kameraan hälytys käynnistyy 1% kerroista.

Kuvitellaan nyt tilanne, että kameravalvontajärjestelmän hälytys käynnistyy. Millä todennäköisyydellä kameraan osunut asukas on olento ulkoavaruudesta?

(Anna vastaus desimaalilukuna yhden prosentin tarkkuudella) 0.99

Tällä kertaa ei osunut oikeaan. Ei kuitenkaan syytä huoleen. Tässä tehtävän kohdassa hyväksytään kaikki vastaukset, jotta pääsemme tehtävässä eteenpäin.

Tähän kysymykseen oikea vastaus on luokkaa 1%.

Suurin osa ihmisistä kuitenkin vastaa tähän kysymykseen 99%.

Pohdi omaa päättelyäsi, mihin perustat kirjoittamasi vastauksen?

Tässä vaiheessa esitetään virhemarginaaliin liittyvät arvot, jotka ovat yksilöivää informaatiota. Virheellinen positiivisuus on tässä tapauksessa todennäköisyys, jolla hälytys käynnistyy, vaikka kyseessä ei ole haluttu kohde. Tutkimusten mukaan (esim. Yang & Wu, 2020) ihmiset usein asettavat ehdollisen todennäköisyyden arvioinnissa painopisteen yksilöivälle informaatiolle, jolloin siis yleisin vastaus tähän tehtävään olisi 99%, vaikka perusarvoihin nojautuen voidaan melko helposti huomata, että marginaalisen pienellä olentojen määrällä ei satunnainen kamerahälytys voi olla niin suurella todennäköisyydellä olento. Tämä tehtävän vaihe on koodattu päästämään opiskelija läpi kaikilla vastausehdotuksilla. Ajatuksena on, ettei opiskelijalta vielä tässä kohtaa vaadita ilmiön ymmärtämistä ja ilmiöön sisältyvän arviointivirheen väistämistä. Tarkoituksena on vain herätellä opiskelijaa pohtimaan, mitä pyritään tukemaan oikean vastauksen viestin sisällöillä. Oikean vastauksen viestissä opiskelijalle kerrotaan, saiko hän vastauksensa oikein vai väärin sekä todetaan, että kaikki vaihtoehdot tuottavat oikean vastauksen tässä kohtaa.

> Otetaan toinen esimerkki tosielämästä. Eräässä osavaltiossa yksi 1050:sta kuskista ajaa humalassa. Poliisit testaavat tieliikenteessä ajavien kuljettajien mahdollista rattijuoppoutta puhallustestillä. Testi onnistuu aina osoittamaan, mikäli kuljettaja on humalassa ajaessaan. Tästä huolimatta testeistä 4% näyttää rattijuopumusta myös täysin selväpäisten kuskien kohdalla.
>
> Oletetaan, että poliisi pysäyttää satunnaisen autoilijan puhalluttaaksen tämän. Testi osoittaa kuskin olevan humalassa. Millä todennäköisyydellä kuski todella on humalassa?
>
> (Anna vastaus desimaalilukuna ja yhden prosentin tarkkuudella) 0.04
>
> Tällä kertaa vastauksesi ei ollut oikein. Tämä ei haittaa. Tässä vaiheessa kaikki vastaukset tulkitaan oikeiksi, jotta tehtävä etenee.
>
> Vastasitko kenties 96% tai 2%? Suurin osa ihmisistä päättelee vastauksen tässä tapauksessa
>
> olevan 96%, vaikka todellisuudessa se on vain 2%.
>
> Mihin arvoihin perustit päätelmäsi? Muistitko huomioida perusarvot?

Tässä vaiheessa säilyy sama tematiikka sekä ajatus, mutta esillä oleva tilanne muuttuu. Käsittelyssä on poliisien toteuttaman puhallustesti, jossa esiintyy myös virheellistä positiivisuutta tietyllä todennäköisyydellä. Arvot ovat hieman eri luokkaa, joten opiskelija joutuu pohtimaan tilannetta hieman eri näkökulmasta. Tässäkin vaiheessa kaikki vastausehdotukset ovat sallittuja ja opiskelija saa siitä tiedon sekä tiedon oman vastauksensa oikeellisuudesta. Tässä kohtaa osa opiskelijoista oletettavasti alkaa pääsemään käsiksi ilmiöön ja alkavat sitä mahdollisesti ymmärtämään.

Otetaan viimeinen tapaus, johon syvennymme hieman tarkemmin. Tuhannen ihmisen kaupungissa, Alphavillessä, on valloillaan C-virus. Viruksen saa 60% kaupungin asukkaista. Torjunta- ja jäljitystoimenpiteenä kaupungin terveydenhuolto on kehittänyt kotitestin, joka tunnistaa 98%:sesti oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös 6%:lla terveistä ihmisistä.

Kaupungin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee päättää tehdä kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on C-virus?

(Anna vastaus desimaalilukuna ja yhden prosentin tarkkuudella) 0.96

Erinomaista! Tämä meni nappiin.

Miten päättelit vastauksesi? Oliko vastauksesi kenties lähimpänä 0%, 50% vai 100%?

Nyt jälleen ja viimeisen kerran aihe muuttuu. Ajatuksena on edelleen vahvistaa ilmiön näkyvyyttä ja samalla esitellä erilaisia tilanteita, joissa ilmiö todellisessa elämässä näkyy. Tilanteen aihe on pyritty valitsemaan ajankohtaiseksi ja sitä kautta mielenkiintoa herättäväksi.

Alphavillestä 250km länteen on toinen tuhannen asukkaan kaupunki, Beetatown. C-virus leviää myös sinne, mutta Beetatownin asukkailla on huomattavasti parempi vastustuskyky. Ainoastaan 6% asukkaista sairastuu C-virukseen. Beetatownissa kehitetään myyntiin kotitesti, joka on hämmästyttävän samanlainen kuin Alphavillessä. Beetatownin kotitesti tunnistaa 98%:sesti oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös 6%:lla terveistä ihmisistä.

Beetatownin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on C-virus?

(Anna vastaus desimaalilukuna ja yhden prosentin tarkkuudella) 0.4

Tällä kertaa vastauksesi ei osunut oikeaan. Tässä vaiheessa kuitenkin kaikki vastaukset hyväksytään oikeina.

Eikö kotitestin oikeellisuuden pitäisi olla samaa luokkaan kuin Alphavillessä? Vai eikö? Testin pitäisi edelleen antaa positiivinen tulos myös 6%:lla terveistä ihmisistä. Hetkinen...

Tällä kertaa aihetta ei vaihdeta, mutta perusarvoja muutetaan. Tarkoituksena on tuoda esiin uusi ominaisuus ilmiöön liittyen. Osaako opiskelija reagoida tilanteeseen, jossa perusarvo (viruksen levinneisyys) muuttuu ja todellisuudessa muuttaa tilannetta hyvinkin paljon. Opiskelijat, jotka ovat aiempien vaiheiden avulla ymmärtäneet jo jollain tavalla ilmiötä, saavat tässä tehtävän vaiheessa hieman lisää haastetta ja mahdollisuuden laajentaa ymmärrystään. Myös näissä virustestaukseen liittyvissä tehtävän vaiheissa vastauskenttä hyväksyy vielä kaikki vastausehdotukset ja oikean vastauksen viestillä pyritään herättämään opiskelijan omaa ajattelua ja tukemaan tilanteen pohtimista. Oikean vastauksen viestissä todetaan myös opiskelijan ehdottoman vastauksen oikeellisuus sekä kaikkien vastauksien kelpaavaan oikeiksi.

Tutkitaan C-virus tapauksia hieman tarkemmin, jotta saamme konkreettisia lukuarvoja päättelymme tueksi. Aloitetaan laskemalla Alphavillen perusarvot ja niiden avulla edelleen kotitestin positiivisen tuloksen oikeellisuus. Olennaista on huomioida tilanteen perusarvot, jotka ovat tässä tapauksessa populaation koko, viruksen tarttumisen todennäköisyys sekä näistä lasketut positiivisten testitulosten lukumäärien odotusarvot.

Voit ilmoittaa kahden ensimmäisen kohdan vastaukset kokonaislukuna.

E(Oikeiden positiivisten tulosten lukumäärä)= 0

E(Virheellisten positiivisten tulosten lukumäärä)=

Mikä on näistä laskettu todennäköisyys, että testitulos on oikein?

Tarkista uudelleen

Hmmm...muistele prosenttilaskujen kaavoja. Huomasithan, että tässä lasketaan Alphavillen arvoja.

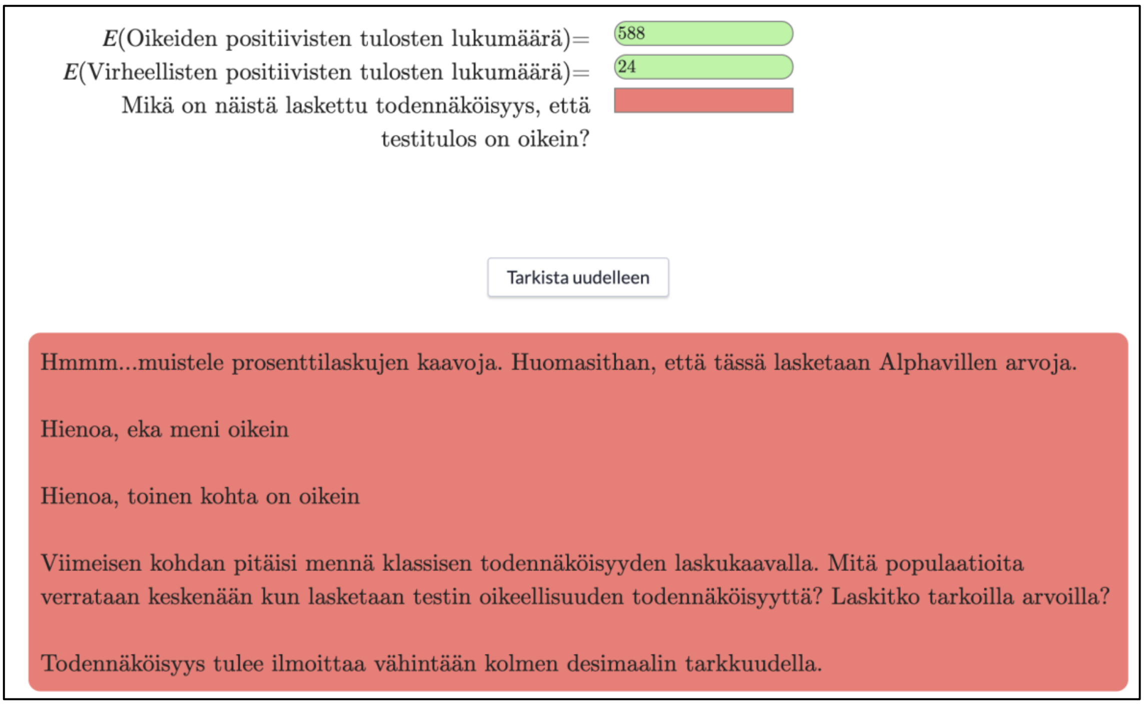
Voi voi, eka meni väärin

Muistitko huomioida toisessa kohdassa mistä populaation osasta virheellinen positiivisuus lasketaan?

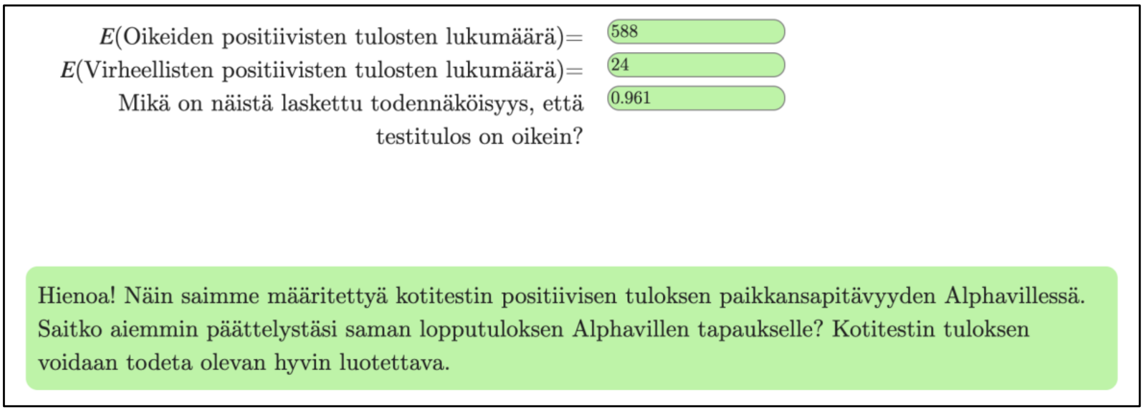
Viimeisen kohdan pitäisi mennä klassisen todennäköisyyden laskukaavalla. Mitä populaatioita verrataan keskenään kun lasketaan testin oikeellisuuden todennäköisyyttä? Laskitko tarkoilla arvoilla?

Todennäköisyys tulee ilmoittaa vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Tässä tehtävän vaiheessa aletaan virustestaus tilannetta pilkkomaan pienemmiksi palasiksi ja sitä kautta purkamaan tilannetta. Apukysymyksien avulla saadaan tehtävä pilkottua pienemmiksi ja helpommin lähestyttäväksi, mikä voi toimia sopivana tukena opiskelijalle ja johtaa sitä kautta ymmärrykseen.



Virheellisen vastauksen viestissä pyritään vähentämään yleisiä huolimattomuusvirheitä, kuten vastauksen epätarkkuutta tai arvojen poimimista väärästä kohtaa tehtävänantoa. Myös jokainen vaihe, joka menee oikein, tuottaa positiivista palautetta opiskelijalle suoriutumisesta.



Oikean vastauksen viestissä pyritään vetämään lankoja yhteen ja saamaan opiskelija vertaamaan aiempaa vastaustaan vastaukseen, jonka hän sai tässä vaiheessa tuotettua tuetummin ja vaiheittain. Tavoitteena olisi herättää opiskelija pohtimaan mahdollista eroa vastausten välillä ja siihen vaikuttanutta syytä tai vaihtoehtoisesti, jos vastaukset ovat samat, pohtimaan tuottiko opiskelija vastauksen samalla vai eri tavalla.

Lasketaan seuraavaksi vastaavat arvot Beetatownin tapauksessa.

E(Oikeiden positiivisten tulosten lukumäärä)= 653
E(Virheellisten positiivisten tulosten lukumäärä)=
Mikä on näistä laskettu todennäköisyys, että testitulos on oikein?

Tarkista uudelleen

Tapahtuiko kenties huolimattomuusvirhe? Osuivatko kaikki numerot oikeille paikoille? Arvot löytyvät samalla prosessilla kuin Alphavillen kohdalla.

Muistithan laskea viimeisen kohdan tarkoilla arvoilla, vaikka olisit ilmoittanut aiemmat kohdat kokonaislukuna.

Todennäköisyys tulee tässäkin ilmoittaa vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Lopuksi tehtävässä lasketaan vielä vastaavat arvot tapaukselle, jossa perusarvoja oli muutettu. Laskeminen toimii tässä kohtaa kertaavana, mikä vahvistaa opiskelijan todennäköisyyslaskennan hallintaa.

E(Oikeiden positiivisten tulosten lukumäärä)= 58
E(Virheellisten positiivisten tulosten lukumäärä)= 56
Mikä on näistä laskettu todennäköisyys, että testitulos on oikein? 0.51

Loistavaa! Näin saimme määritettyä kotitestin positiivisen tuloksen paikkansapitävyyden vastaavasti Beetatownille. Saitko aiemmin päättelystäsi saman lopputuloksen? Testitulos ei Beetatownissa olekaan enää lainkaan niin luotettava, vaan itseasiassa positiivisen tuloksen kohdalla onkin todennäköisempää ettei testitulos pidä paikkaansa kuin että se pitäisi paikkaansa.

Mistä erot kaupunkien välillä sitten johtuvat?

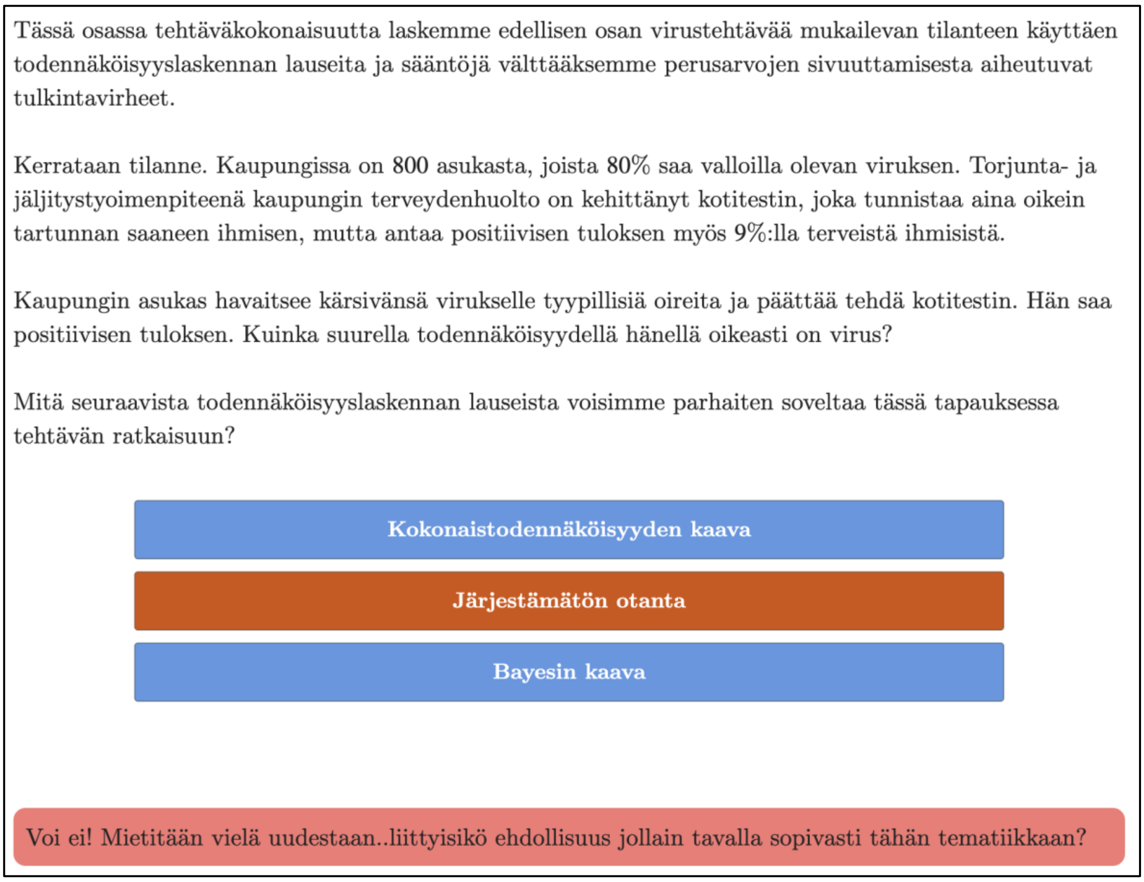
Saatoitkin jo arvata...perusarvoista. Tartunnan todennäköisyys ja näin ollen sairastuneiden asukkaiden lukumäärät erosivat kaupunkien välillä. Tämä aiheuttaa virheellisen positiivisen tuloksen todennäköisyyden tulkintaan merkittävän eron. Usein omassa päättelyssämme sivuutamme perusarvot kun saamme jotain mielenkiintoisempaa tai "olennaisempaa" informaatiota, kuten tässä tapauksessa virheellisen positiivisuuden todennäköisyyden arvon 6%. Unohdamme, että se on on vain suhdeluku, jonka todellinen vaikutus määräytyy perusarvojen perusteella.

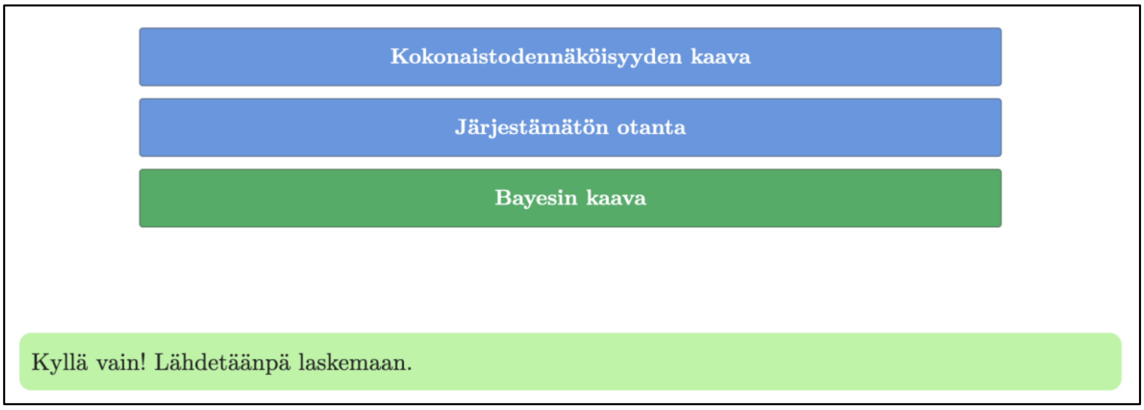
Tämä tehtäväkokonaisuus jatkuu seuraavassa ViLLe-tehtävässä: BRF Osa 2

Opiskelijan saatua oikeat vastaukset, pyritään vielä viimeistään tässä kohtaa vetämään langat yhteen esitellyn ilmiön suhteen. Opiskelijaa kehotetaan vertaamaan eri kaupunkien välillä olevia eroja todennäköisyyden arvoissa ja sitä kautta huomaamaan, että perusarvoilla on iso vaikutus ehdolliseen todennäköisyyteen ja edelleen, miksi on tärkeää olla sivuuttamatta niitä, vaikka tilanteeseen tarjottaisiin uutta yksilöivää tietoa. Tehtävä on rakennettu niin, että opiskelijan suorittaessa tehtävää uudelleen tehtävän eri vaiheissa olevat arvot muuttuvat. Tällöin tehtävän toistaminen pysyy mielekkäänä, mikäli opiskelija haluaa vahvistaa osaamistaan tekemällä tehtävän alusta uudelleen. Muuntuvat arvot pysyvät tässä tehtävässä kuitenkin hyvin samansuuntaisina, jotta perusarvojen laiminlyönnin vaikutus pysyy samanlaisena ja todelliseen elämään kytkeytyvät tilanteet ovat uskottavia.

5.2 BRF osa 2

Tämä tehtävä kytkeytyy hyvin vahvasti edelliseen tehtävään ja suositeltavaa olisi tehdä tehtävät kokonaisuutena peräkkäin. Tässä tehtävässä tarkkaillaan edeltävästä tehtävästä tuttua virustestausta, mutta tämän tehtävän tarkoituksena on esitellä keino, jolla välttää harhautumasta olennaisista asioista todennäköisyyksien arvioinnissa. Tehtävässä opiskelijalta testataan Bayesin kaavan hallintaa ja kerrataan sitä sekä sen käyttöä ehdollisia todennäköisyyksiä laskettaessa. Tehtävän vaiheet on pyritty muodostamaan pilkkomalla Bayesin kaavan käyttö järkeviksi ja pienemmiksi palasiksi. Näin tehtävän vaiheiden edetessä päästään askel kerrallaan lähemmäs Bayesin kaavan hyödyntämistä ja lopuksi lasketaan kaavan avulla tehtävässä kysytty ehdollinen todennäköisyys.





Tehtävän ensimmäisessä vaiheessa opiskelijalle esitellään tehtävän aihe ja sidotaan se edelliseltä ViLLE-kierrokselta (BRF osa 1) tuttuun virusepidemiatapaukseen. Tässä tehtäväkokonaisuuden osassa arvot poikkeavat edellisessä osassa olleista. Mikäli arvot olisi pidetty samana, olisi kummankin tehtäväkokonaisuuden osan toistettavuus kärsinyt huomattavasti. Toistettavuus on tässä kohtaa merkityksellisempi ominaisuus kuin kahden tehtävän osan yhdistäminen yhdeksi tiiviiksi kokonaisuudeksi. Tehtävän tärkeä tavoite on mahdollistaa opiskelijalle Bayesin kaavan ymmärryksen ja soveltamisen vahvistaminen. Arvojen muutoksesta huolimatta tehtävä myös tuottaa samoja huomioita kuin saataisiin arvot säilyttämällä. Tehtävän ensimmäisessä vaiheessa opiskelijalta testataan kykyä löytää oikea todennäköisyyslaskentaan liittyvä sääntö, jonka soveltaminen sopii parhaiten tehtävän ratkaisemiseen. Matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa tärkeässä roolissa on tilanteeseen sopivien säännönmukaisuuksien ja teorioiden löytäminen ja niiden soveltaminen.

Muistin virkistämiseksi: kun selvitetään A_i ehdollista todennäköisyyttä ehdolla B Bayesin kaava näyttää tältä: $P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)}$.

Käytetään tässä kyseisessä tapauksessa seuraavia merkintöjä: V="henkilöllä on virus", T="henkilö on terve", Pos="testitulos positiivinen" ja Neg="testitulos negatiivinen".

Mitä meidän tulee tehtävänannosta poimia tai muutoin selvittää etukäteen, jotta voimme käyttää Bayesin kaavaa ja selvittää positiivisen testin paikkaansapitävyyden?

$p(V)$

$p(Pos|T)$

$p(T|Pos)$

$p(Pos|V)$

$p(Neg)$

$p(T)$

$p(Pos)$

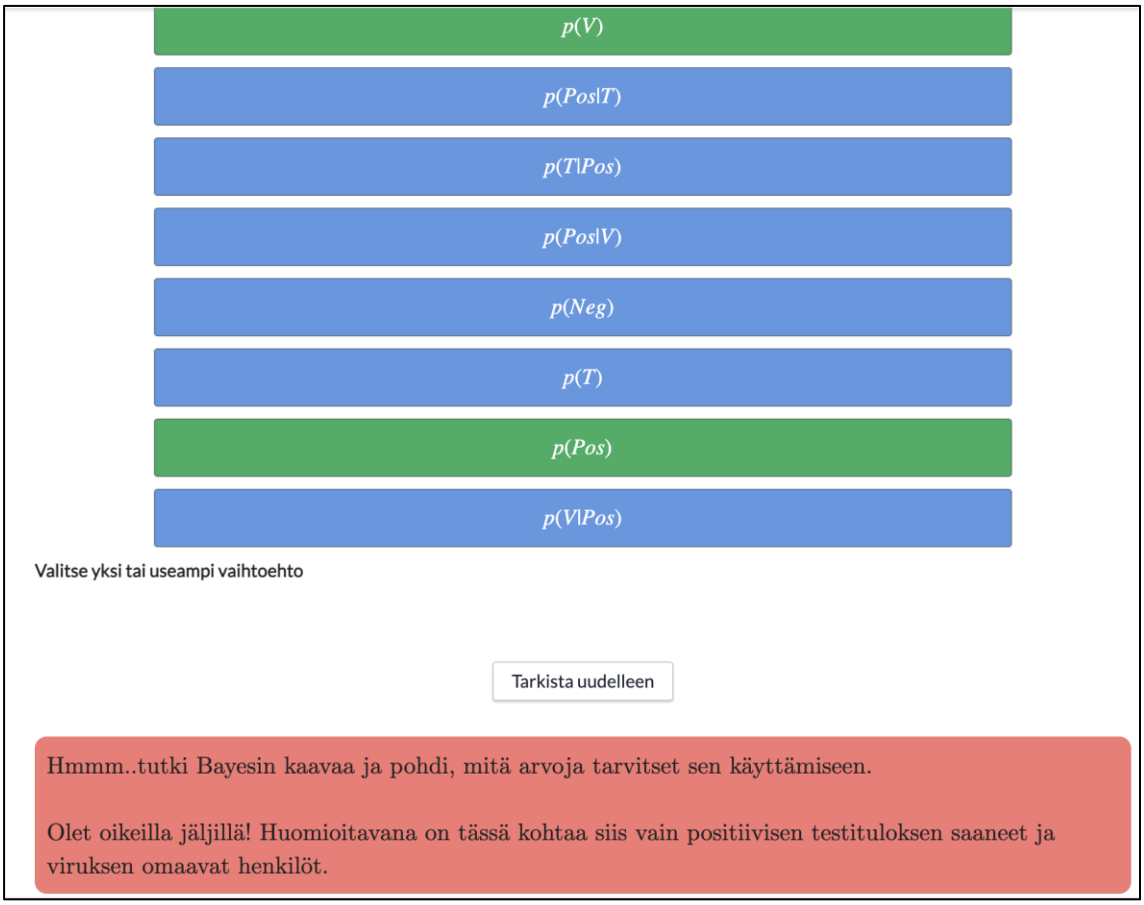
$p(V|Pos)$

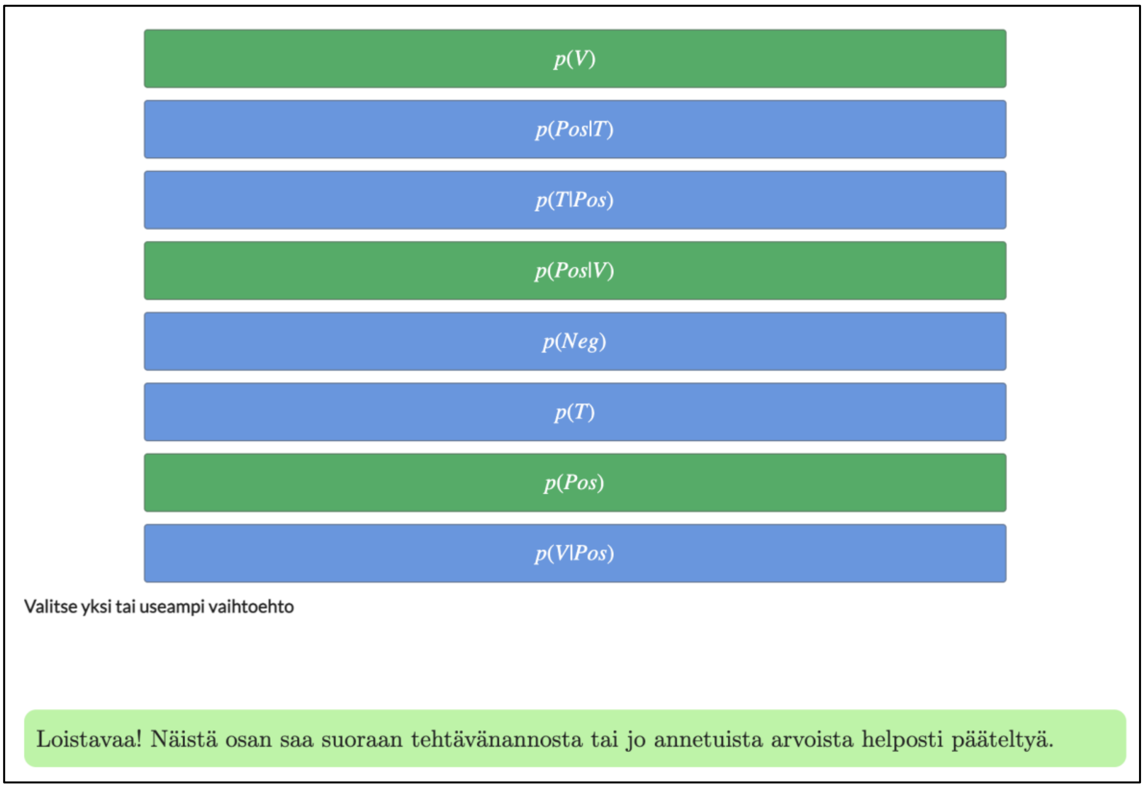
Valitse yksi tai useampi vaihtoehto

Tarkista uudelleen

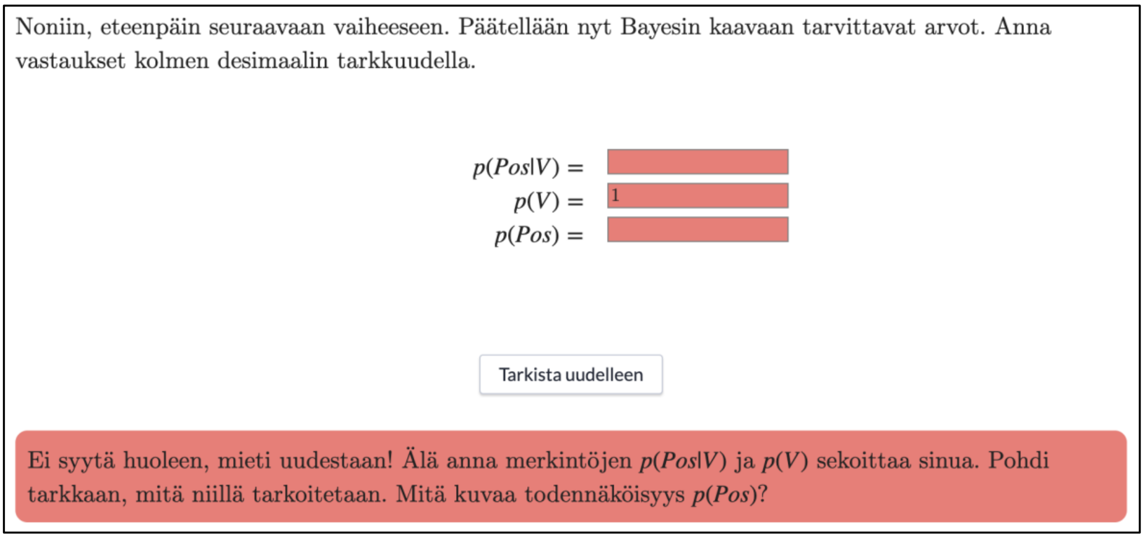
Hmmm..tutki Bayesin kaavaa ja pohdi, mitä arvoja tarvitset sen käyttämiseen.

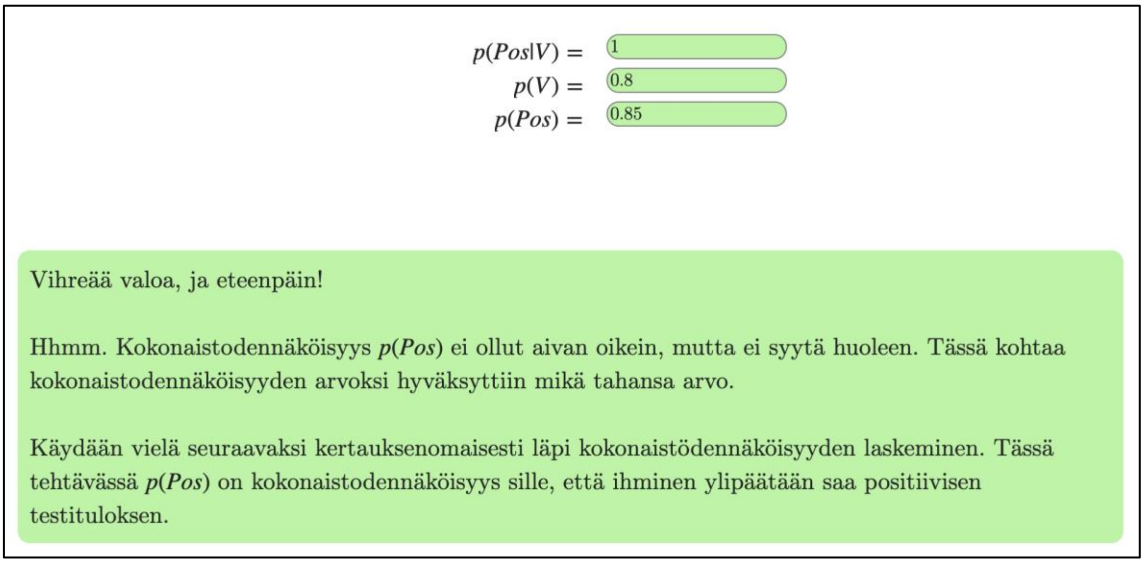
Huomasithan, että nyt tutkittavana on vain positiivisen testin saaneet, eikä terveitäkään tarvitse ottaa tässä kohtaa huomioon.



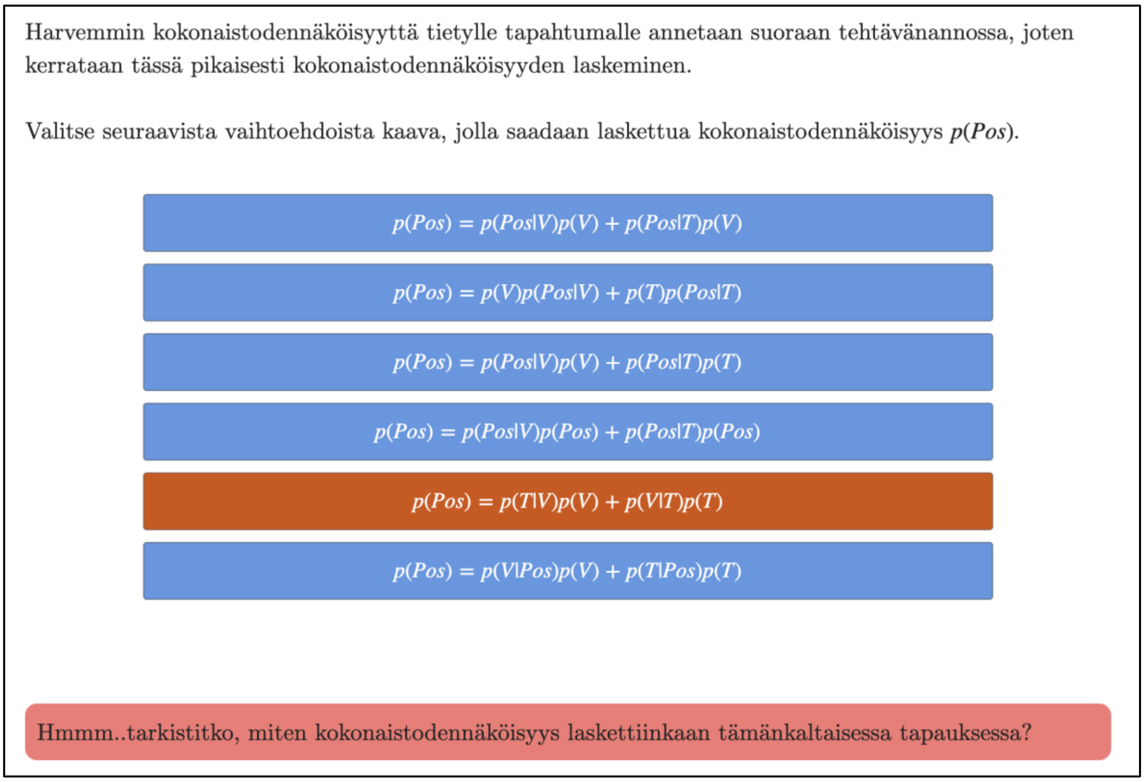


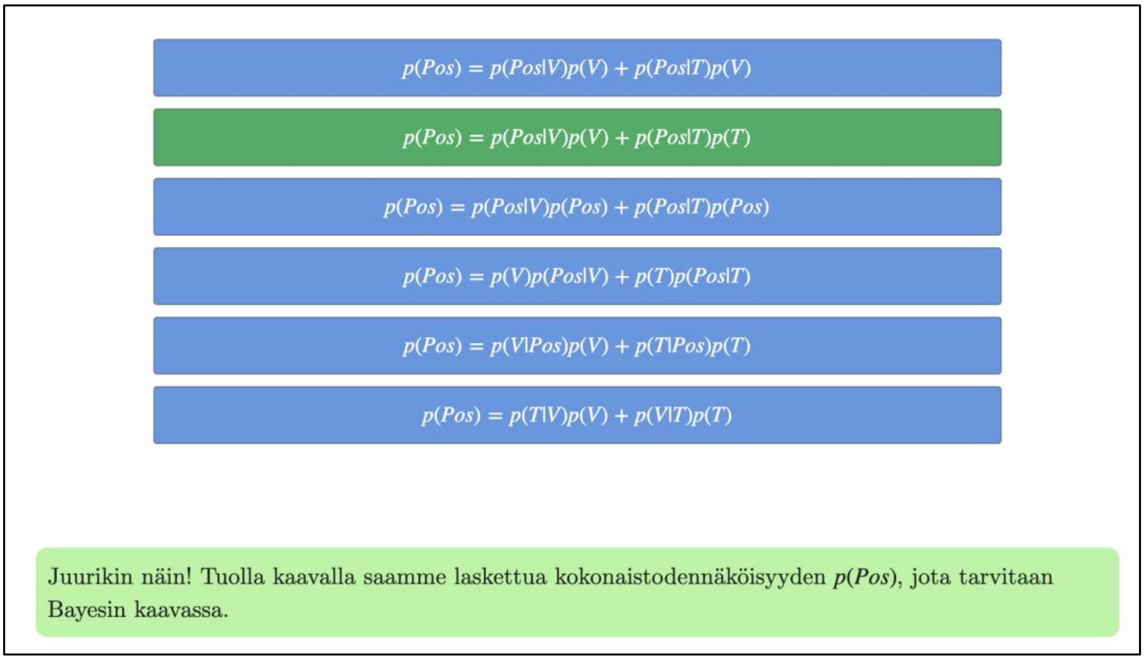
Tehtävän toisessa vaiheessa lähdetään kokoamaan Bayesin kaavaa tähän tehtävään kuuluvista palasista. Kun opiskelija on onnistunut löytämään oikean säännönmukaisuuden tai teorian, jota soveltaa, ei ole itsestään selvyys, että hän osaa yhdistää sen tehtävän tilanteeseen ja lähtee sitä soveltamaan. Tässä tehtävässä tätä prosessia pyritään vahvistamaan pilkkomalla Bayesin kaavan soveltaminen pienempiin osiin ja etenemällä vaihe kerrallaan. Mikäli opiskelijan on haastava hahmottaa Bayesin kaavan soveltamista yleisestä versiosta spesifiin tapaukseen tai tilanteeseen, voi opiskelija erityisesti tätä vaihetta toistamalla vahvistaa tätä yhteyttä. Väärän vastauksen viestissä pyritään ohjaamaan opiskelijaa oikeaan suuntaan sopivia muuttujia valitessa. Viestejä on kaksi erilaista riippuen opiskelijan valinnoista, joten ohjaus tapahtuu vaiheittain riippuen siitä, kuinka lähellä opiskelija on oikeita vastauksia.



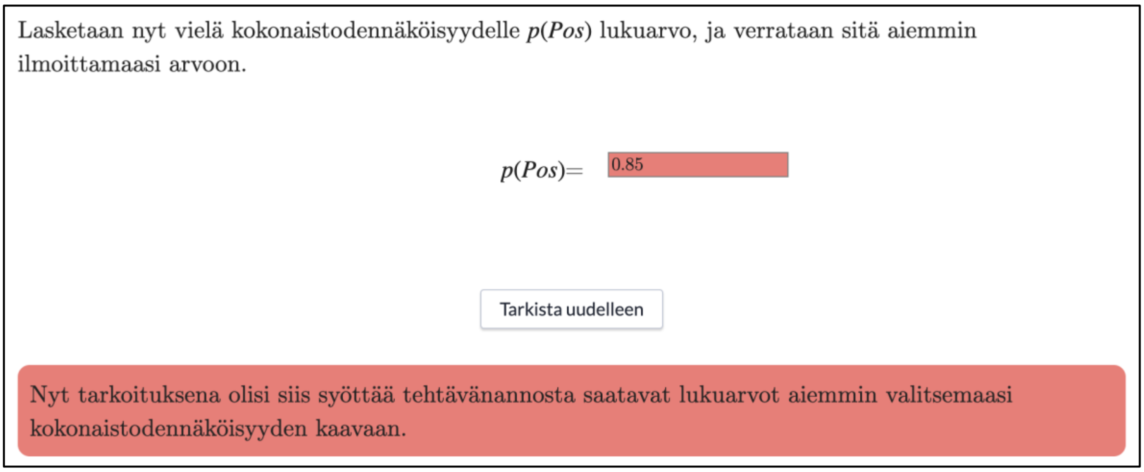


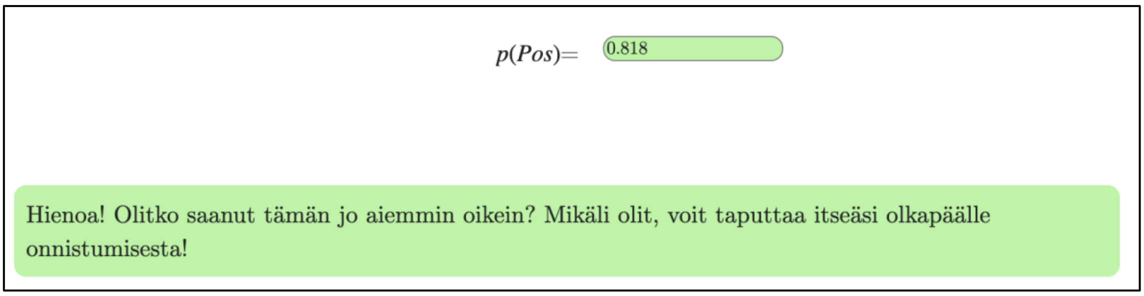
Tässä vaiheessa haetaan tarvittaville todennäköisyyksille oikeat arvot tehtävänannosta poimimalla ja niistä arvoista edelleen päättelemällä. Tämä osio testaa opiskelijan ymmärrystä valitsemiensa todennäköisyyksien ja niiden merkintöjen suhteen. Viimeisessä kohdassa opiskelijalla on mahdollisuus osoittaa osaamistaan laskemalla kokonaistodennäköisyys $p(Pos)$, vaikka sitä ei vielä tässä kohtaa tehtävää olla käyty tarkemmin läpi. Mikäli opiskelija saa kokonaistodennäköisyyden oikein, kerrotaan se hänelle palautteessa. Vastaavasti väärästä vastauksesta opiskelijaa informoidaan myös, vaikka tehtävän tarkistusfunktio hyväksyykin kaikki vastaukset oikeina kokonaistodennäköisyydelle. Opiskelijalle annetaan tässä kohtaa siis mahdollisuus hyödyntää ja osoittaa osaamistaan, mikäli sitä löytyy, mutta toisaalta samaan aikaan vajaammilla tiedoilla varustetun opiskelijan tapauksessa ei vaadita kuitenkaan osaamista vaan kokonaistodennäköisyyden laskeminen käydään seuraavassa vaiheessa yhdessä läpi.



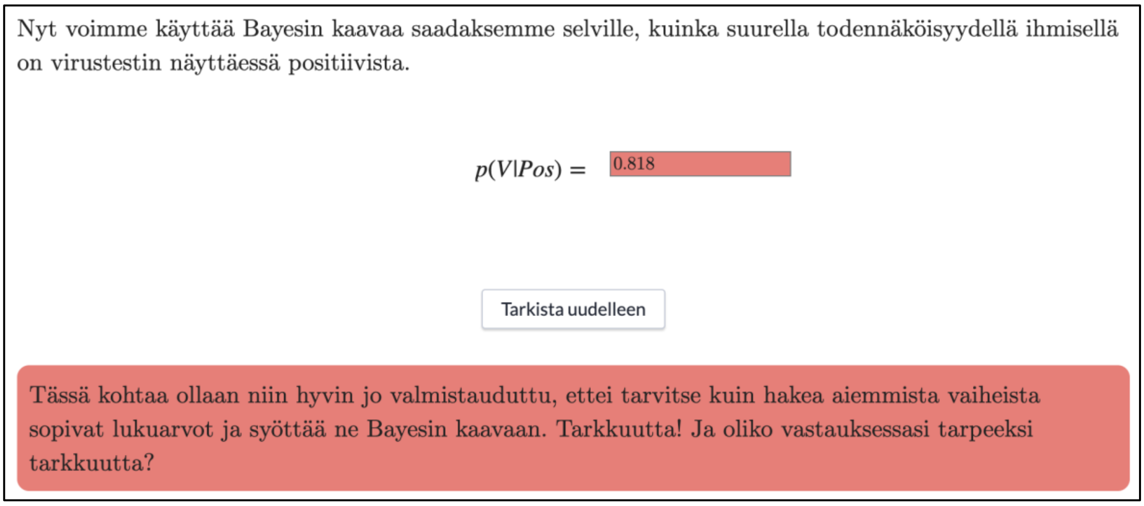


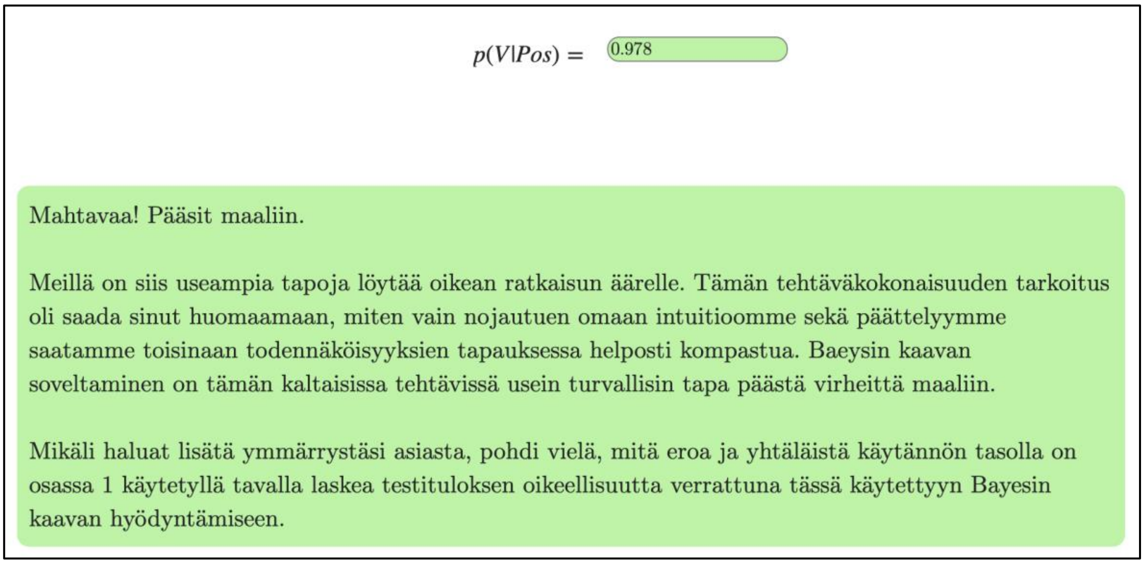
Tässä tehtävän vaiheessa opiskelijan tehtävänä on tunnistaa oikea kaava kokonaistodennäköisyyden laskemiseksi. Vaihtoehtoja on useampia, joista pitäisi löytää oikea ja joissa kaikissa on käytetty tehtävään liittyviä merkintöjä. Kaavaa ei voi siis poimia suoraan luentomonisteesta, vaan opiskelijan täytyy osata kohdentaa yleinen kaava tämän tehtävän merkintöihin sopivaksi. Kuvassa näkyvän oikean vastauksen lisäksi on myös toinen oikea vastaus, joka on saatu edellisestä hyödyntämällä kertolaskun kommutatiivisuutta. Toinen oikea vastaus on lisätty tehtävään, jotta vaihtoehtoja olisi enemmän ja tehtävän kohta muuttuisi hieman moniulotteisemmaksi. Lisäksi vastaus ei olisi niin sidottu vain yhteen ja ainoaan esitysmuotoon, joka löytyy luentomonisteesta, vaan opiskelijalla olisi enemmän vapautta ja myös ymmärrystä siitä, että samoja lainalaisuuksia voidaan esittää erilaisissa muodoissa esimerkiksi juuri kommutatiivisuutta hyödyntämällä.





Tehtävän toiseksi viimeisessä vaiheessa opiskelijan tehtävänä on laskea edellisessä kohdassa valitsemaansa kaavaa käyttämällä kokonaistodennäköisyydelle arvo. Tässä kohtaa opiskelijalta vaaditaan kykyä löytää oikeat lukuarvot kaavaa varten. Opiskelijan tulee siis ymmärtää, mitä kaavassa olevat merkinnät tässä tehtävässä tarkoittavat. Mikäli opiskelija on jo aiemmin saanut kokonaistodennäköisyyden oikein, pitäisi tämän kohdan sujua ilman suurempaa päänvaivaa. Toisaalta tämän tehtävän vaiheen on tarkoitus tukea opiskelijoita, joille kokonaistodennäköisyyden laskeminen ja sen käyttäminen osana Bayesin kaavaa ei ole vielä täysin vahvistunut.





Tehtävän viimeisessä vaiheessa vedetään langat yhteen ja opiskelijan tehtävä on koota aiemmin tehtävässä selvitetyt Bayesin kaavan käytön palaset ja lasketut arvot yhteen. Oikean vastauksen viestissä pyritään vielä vahvistamaan opiskelijan ymmärrystä tämän tehtäväkokonaisuuden tarkoituksesta sekä tarjoamaan opiskelijalle mahdollisuus viedä pohdintaansa halutessaan vielä hieman pidemmälle tehtävän aihepiirin suhteen. Opiskelijan toistaessa tehtävää uudestaan arvot muuttuvat, mutta sama päättelyketju Bayesin kaavan käytön suhteen säilyy. Näin opiskelija voi toistojen avulla vahvistaa Bayesin kaavan käytön hallintaa ja siihen liittyvien vaiheiden ymmärrystä.

5.3 Rahapelejä osa 1

Rahapelejä tehtäväkokonaisuus muodostuu kahdesta osasta, jotka on suunniteltu tehtäväksi peräjälkeen. Tehtäväkokonaisuus lähestyy todennäköisyyslaskentaa ja siihen liittyviä säännönmukaisuuksia ja laskukaavoja erilaisten rahapelien kautta. Erityisesti tehtäväkokonaisuus keskittyy odotusarvon käsitteeseen ja sen hyödyntämiseen satunnaistapahtumien lopputuloksen ennustamisessa. Rahapeleillä tarkoitetaan tässä yhteydessä erilaisia satunnaisuutta sisältäviä pelejä, joissa panoksena on rahan voittaminen tai häviäminen. Tehtävän aihepiiriksi on valittu rahapelit, sillä ne ovat hyviä ja usein myös tyypillisiä käytännön sovelluksia eri todennäköisyyslaskennan teorioiden ja säännönmukaisuuksien havainnollistamiseen sekä hahmottamiseen. Rahapelit ja niiden pohtiminen voi olla myös aihepiiriinä opiskelijaa kiehtova, jolloin motivaatio tehtävän tekemiseen kasvaa.

Tehtäväkokonaisuuden ensimmäisessä osassa esitellään kaksi rahapeliä. Tehtävä alkaa noppapelillä, jossa opiskelijan tehtävänä on pohtia kannattaako peliä pelata vai ei. Tämän jälkeen tehtävän erivaiheissa käydään läpi matematiikan näkökulmasta pohtien, miksi peliä kannattaa pelata tai ei kannata pelata. Tehtävän lopussa on klassinen kirjekuoriparadoksi, jossa edelleen vahvistetaan odotusarvon käyttöä lopputuloksen ennustamisen välineenä sekä samalla esitellään opiskelijalle paradoksi ja sen tausta.

Tehtävän alussa opiskelijalle esitellään noppapeliskenaario. Opiskelijan tehtävänä on päätellä kannattaako peliin tarttua vai ei. Tehtävä on rakennettu niin, että tehtävää toistaessa tehtävänannossa annetut arvot pelille muuttuvat, joten pelissä on kolme erilaista vaihtoehtoista kulkua: kannattaa pelata, ei kannata pelata tai molemmat vaihtoehdot ovat yhtä hyviä ja huonoja. Noppapeli koostuu tehtävän kolmesta ensimmäisestä vaiheesta ja sen kaikki kolme eri versiota esitetään tässä raportissa. Tehtävänkulun eri versioista olevat kuvat on nimetty selkeyden vuoksi; *Vaihtoehto 1, Vaihtoehto 2* ja *Vaihtoehto 3*. Näistä ensimmäinen edustaa versiota, jossa kannattaa pelata, toisessa ei kannata ja kolmannessa valinnalla ei ole matemaattisesti merkitystä. Näillä erilaisilla tehtävän kuluilla saadaan tehtävä pidettyä toistettaessa mielenkiintoisena, ja opiskelija voi halutessaan myös tutustua kaikkiin kolmeen skenaarioon ja näin saada laajempaa ymmärrystä rahapelien kannattavuuden arvioinnista todennäköisyyslaskennan keinoin. Tehtävä, jossa alkuarvot muuttuvat ja näin ollen vaikuttavat tehtävän kulkuun, on järkevintä toteuttaa sähköisesti. Tämänkaltainen tehtävä olisi kyllä mahdollista tehdä myös esim. oppikirjaan, mutta tehtävän ulkoasu ei olisi tällöin niin mielekäs ja selkeä. Sähköisesti toteutettuna tehtävä osaa itse tulkita alkuarvot ja siitä riippuen syöttää erinäköisiä ja vain tehtävän kulun kannalta olennaiset asiat sisältäviä vaiheita opiskelijalle. Perinteisessä versiossa vaihtoehtoinen tehtävänkulku ei tulisi automaattisesti vaan tehtävänantoon pitäisi kirjata tämä kaikki auki esimerkiksi tyylillä ”Mikäli pelin voittosumma on x ja tappio y, vastaa seuraavaan kysymykseen … tai mikäli pelin voittosumma on a ja tappio b, vastaakin seuraavaan kysymykseen … jne.” Näin ollen siis perinteisesti toteutettuna tämä tehtävä olisi monimutkaisempi, vaikeampi tulkita ja huomattavasti pidempi.

Vaihtoehto 1

Tässä tehtäväkokonaisuudessa pelataan muutamia rahapelejä ja tutkitaan niihin liittyviä todennäköisyyslaskennan sääntöjä ja ominaisuuksia.

Aloitetaan noppapelistä. Hämärän näköinen tyyppi ehdottaa sinulle loistavaa mahdollisuutta voittaa rahaa kuusisivuista noppaa heittämällä. Säännöt ovat yksinkertaiset:

-Saat heittää noppaa kerran

-Mikäli silmäluvuksi tulee 1 tai 2, saat voittona 1.5€

-Mikäli silmäluvuksi tulee jokin muu, joudut maksamaan 0.5€

Pohdit hetken tarjousta ennen kuin teet päätöksen...

Kannattaa pelata

Kannattaa jättää välistä

Hmm. Nyt olisi kyllä ollut oiva tilaisuus kasvattaa varallisuuttasi.

Kannattaa pelata

Kannattaa jättää välistä

Hyvin valittu! Varallisuutesi kasvoi juuri. Menikö tämä tuurilla vai osaisitko perustella valintasi?

Vaihtoehto 2

Tässä tehtäväkokonaisuudessa pelataan muutamia rahapelejä ja tutkitaan niihin liittyviä todennäköisyyslaskennan sääntöjä ja ominaisuuksia.

Aloitetaan noppapelistä. Hämärän näköinen tyyppi ehdottaa sinulle loistavaa mahdollisuutta voittaa rahaa kuusisivuista noppaa heittämällä. Säännöt ovat yksinkertaiset:

-Saat heittää noppaa kerran

-Mikäli silmäluvuksi tulee 1 tai 2, saat voittona 1.75€

-Mikäli silmäluvuksi tulee jokin muu, joudut maksamaan 1.0€

Pohdit hetken tarjousta ennen kuin teet päätöksen...

Kannattaa jättää välistä

Kannattaa pelata

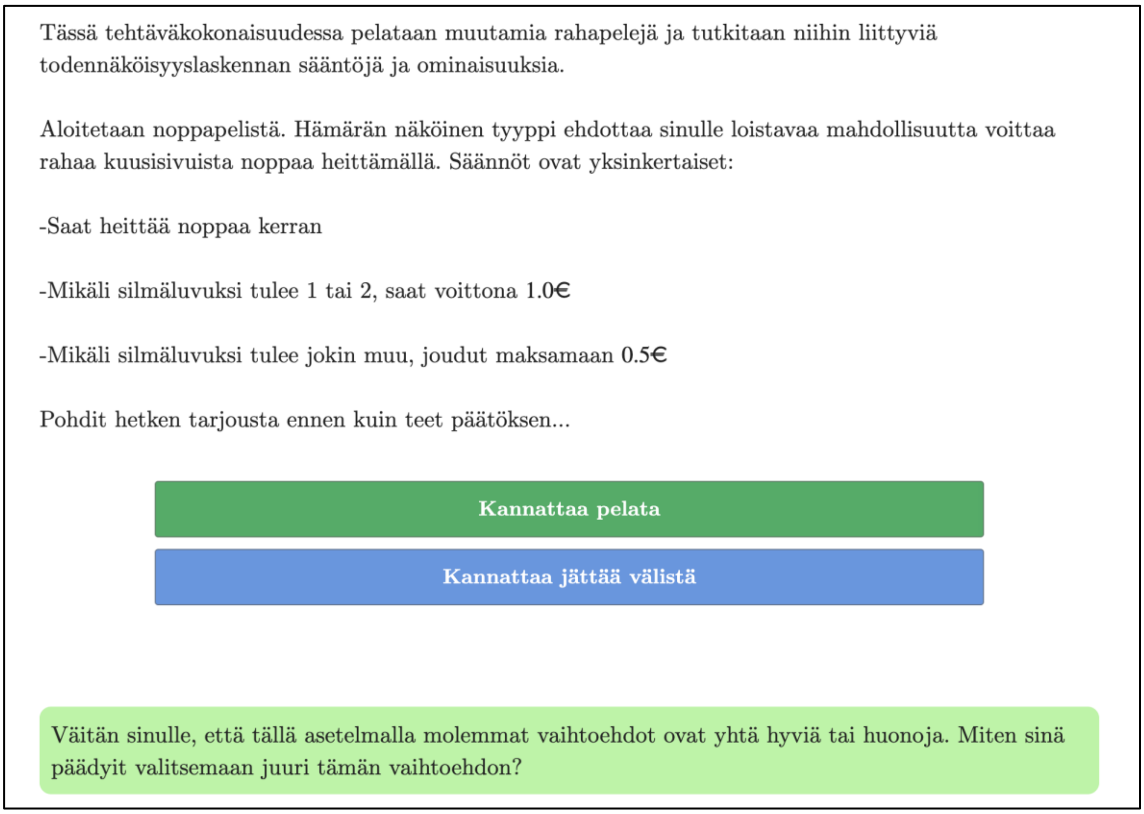
Nyt sinua viilattiin linssiin..voit sanoa hyvästi rahoillesi :(Otappa joku toinen.

Kannattaa jättää välistä

Kannattaa pelata

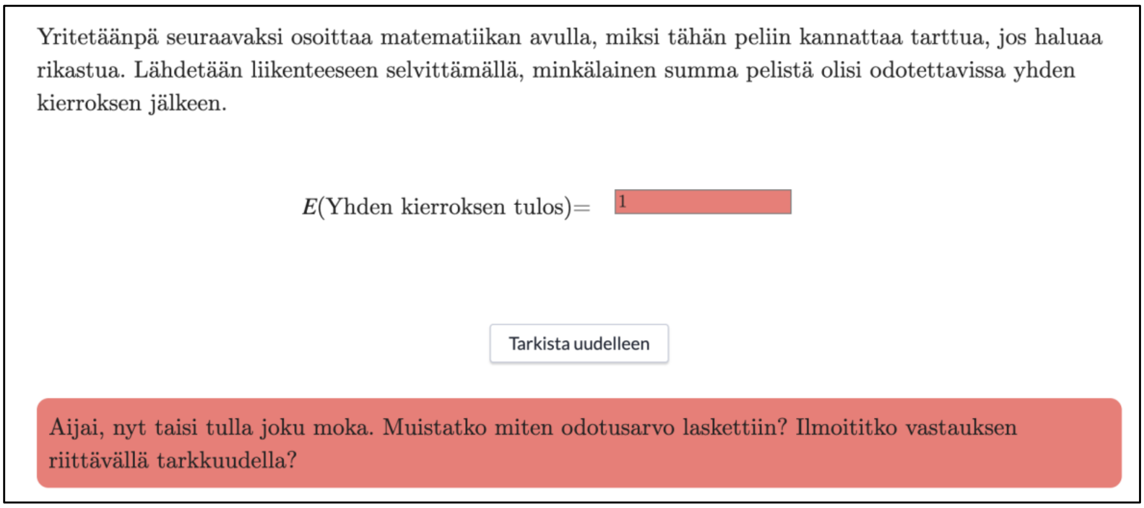
Hienoa! Rahasi ovat turvassa. Vastasitko arpomalla vai osaisitko perustella valintasi?

Vaihtoehto 3



Tehtävä alkaa noppapelin selostuksella sekä koko tehtävän olennaisimmalla ja tehtävän alustavalla kysymyksellä. Opiskelijalla on tässä vaiheessa mahdollisuus arvata oikea vastaus melko helposti, sillä vaihtoehtoja on vain kaksi, mutta tarkoituksena olisi, että opiskelija miettii ja koittaa tehdä ratkaisunsa perustellen. Joka tapauksessa seuraavissa vaiheissa vaaditaan jo perusteluja, joten tällöin opiskelijalta ei riitä enää pelkkä arvaus. Myös oikean vastauksen viestissä haastetaan opiskelijaa pohtimaan itse, miksi ja miten ratkaisuunsa päätyi.

Vaihtoehto 1



E(Yhden kierroksen tulos)= 0.167

Hienoa! Huomaamme nyt, että pelattuasi yhden kierroksen tätä peliä odotuksena on, että jäät lievästi voitolle.

Vaihtoehto 2

Yritetäänpä seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi tähän peliin ei kannata tarttua. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen

E(Yhden kierroksen tulos)= −0.8

Tarkista uudelleen

Aijai, nyt taisi tulla joku moka. Muistatko miten odotusarvo laskettiin? Ilmoititko vastauksen riittävällä tarkkuudella?

E(Yhden kierroksen tulos)= −0.083

Hienoa! Huomaamme nyt, että pelattuasi yhden kierroksen tätä peliä odotuksena on, että jäät lievästi häviölle.

Vaihtoehto 3

Yritetään seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi valinnalla pelata tai olla pelaamatta ei ole loppujen lopuksi mitään merkitystä. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen.

E(Yhden kierroksen tulos)= 1

Tarkista uudelleen

Aijai, nyt taisi tulla joku moka. Muistatko miten odotusarvo laskettiin? Ilmoititko vastauksen riittävällä tarkkuudella?

> Yritetään seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi valinnalla pelata tai olla pelaamatta ei ole loppujen lopuksi mitään merkitystä. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen.
>
> $E(\text{Yhden kierroksen tulos}) =$ 0
>
> Hienoa! Huomaamme nyt, että pelatessasi tätä peliä odotuksena on, että et voita etkä häviä rahaa.

Tehtävän toisessa vaiheessa opiskelijan tehtävänä on laskea odotusarvo yhden pelikierroksen odotusarvo. Tavoitteena on tuottaa opiskelijalle ymmärrys siitä, että odotusarvolla pystytään monissa tilanteissa arvioimaan satunnaistapahtuman lopputuloksen odotettua arvoa. Väärän vastauksen viesteissä pyritään ohjaamaan opiskelijaa oikeaan suuntaan ja muistutetaan vastauksen riittävästä tarkkuudesta.

Vaihtoehto 1

> Mutta hetkinen, mitäpä jos peliä pelaisi todella monta kierrosta? Muuttuisiko peli jossain kohtaa kuitenkin tappioksesi? Mitä tuumit?
>
> **Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy vähintään yhtä onnekkaana toistojen lisääntyessä.**
>
> **Pelkään pahoin, että tilanne saattaa muuttua onnettomammaksi pelin jatkuessa.**
>
> Nyt taisi mennä metsään...

> **Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy vähintään yhtä onnekkaana toistojen lisääntyessä.**
>
> **Pelkään pahoin, että tilanne saattaa muuttua onnettomammaksi pelin jatkuessa.**
>
> Juurikin näin! Tässä pelissä edellinen nopan heitto ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen, joten odotusarvo säilyy samana. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää.

Vaihtoehto 2

Mutta hetkinen, mitäpä jos koetta toistaisi useamman kerran? Kääntyisikö se loppujen lopuksi voitoksesi? Mitä tuumit?

Uskoisin, että lopputulos muuttuu toistojen myötä paremmaksi.

Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy yhtä onnettomana toistojen lisääntyessä.

Nyt taisi mennä metsään...

Uskoisin, että lopputulos muuttuu toistojen myötä paremmaksi.

Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy yhtä onnettomana toistojen lisääntyessä.

Juurikin näin! Tässä pelissä edellinen nopan heitto ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen, joten odotusarvo säilyy samana. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää.

Vaihtoehto 3

Mutta hetkinen, mitäpä jos peliä pelattaisiin vain yksi kierros? Tulisiko tällöin lopputulokseksi 0€?

Kyllä näin on.

Ei tietenkään.

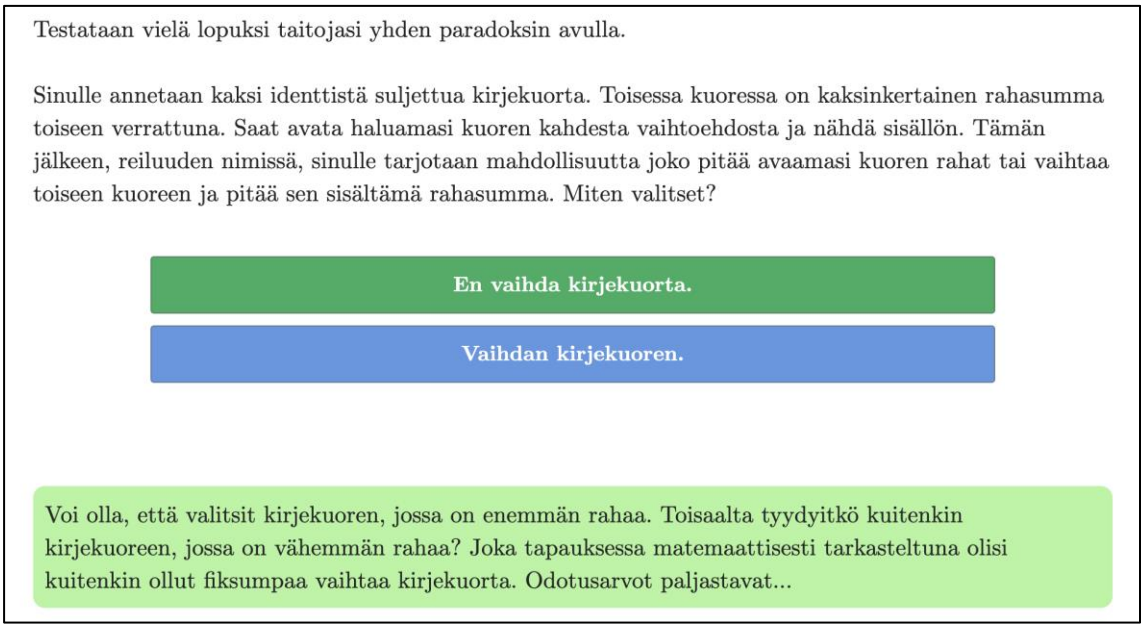
Nyt taisi mennä metsään...

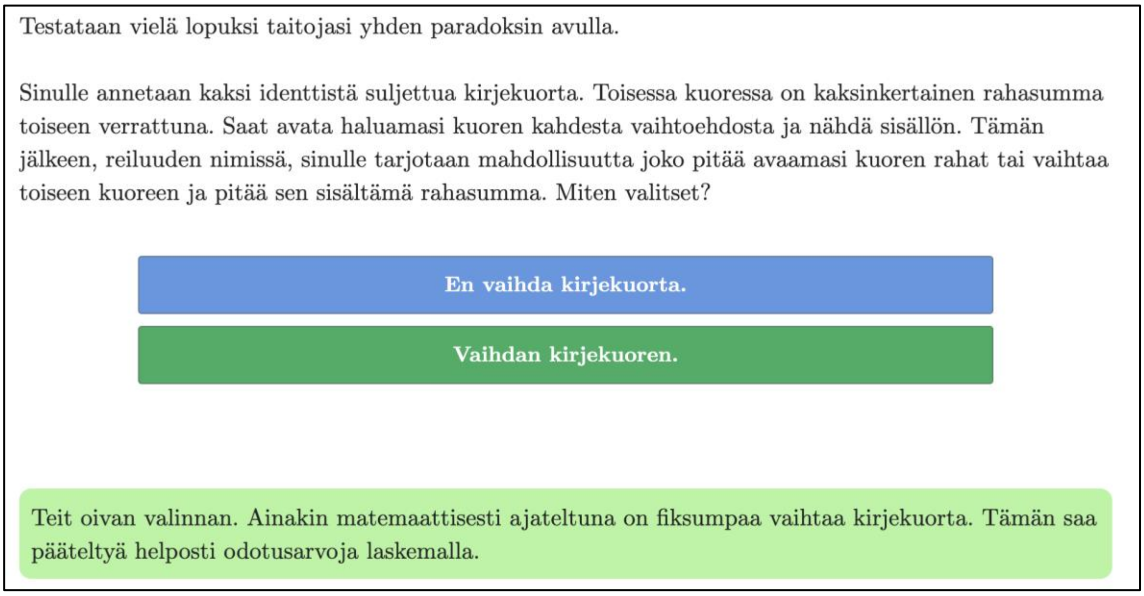
Kyllä näin on.

Ei tietenkään.

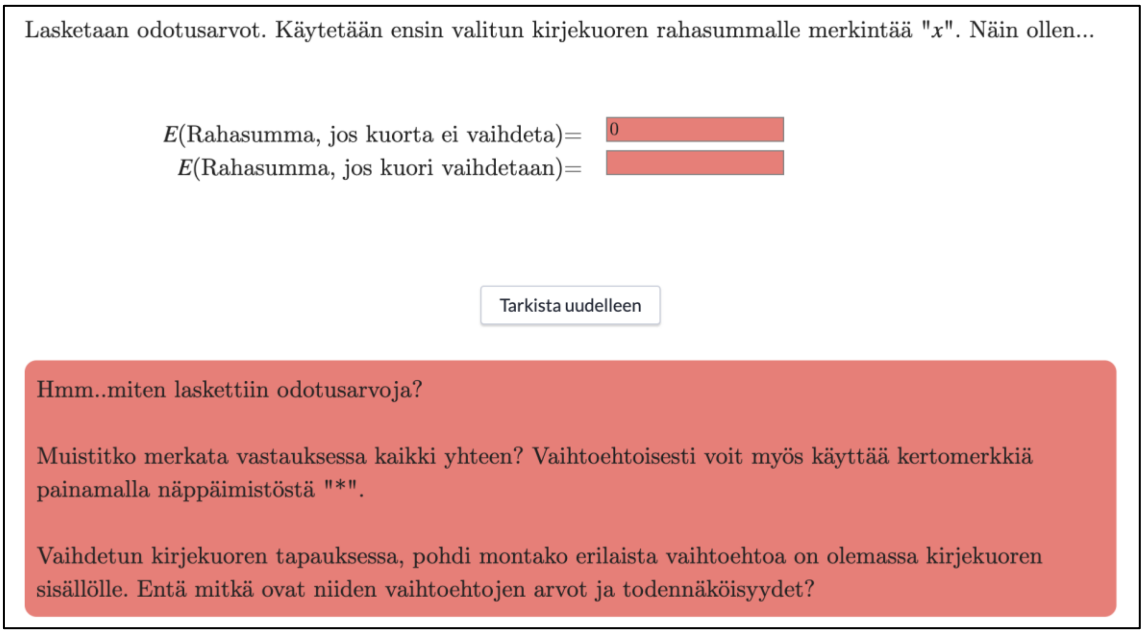
Juuri näin! Yhden kierroksen tulos olisi tietysti pelin selostuksessa esitetty voitto tai vaihtoehtoisesti häviämisestä aiheutuva maksu. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää.

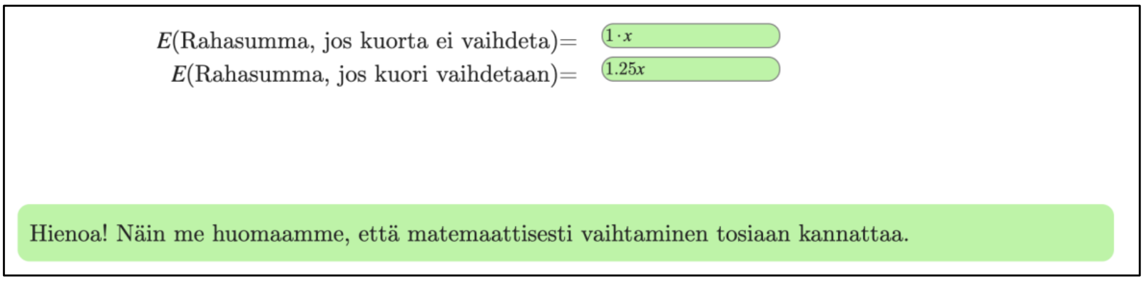
Tässä vaiheessa eli ensimmäisen rahapelin viimeisessä kohdassa opiskelijaa haastetaan pohtimaan, mitä odotusarvo oikeastaan tarkoittaa. Samalla oikean vastauksen viestissä opiskelijalle täsmennetään tätä käsitettä ja miten se vaikuttaa pelattavaan rahapeliin. Sähköiseen tehtävään on melko helppoa sisällyttää myös matemaattiseen päättelyyn tai -perusteisiin liittyviä pohdintatehtäviä esimerkiksi juuri monivalintojen avulla. Näiden avulla voidaan testata eri tavalla ja monipuolisemmin opiskelijan kokonaisvaltaisempaa ymmärrystä tietystä asiasta. Lisäksi sähköisen tehtävän palautteessa voidaan pohdintaa tukea antamalla selitys käsillä olevasta asiasta. Näin tehtävä itsessään voi toimia samalla myös osana opetusta.





Seuraavassa vaiheessa siirrymme seuraavan rahapelin pariin. Tämä rahapeli on saanut inspiraationsa tunnetusta todennäköisyyslaskennan paradoksista: kahden kirjekuoren ongelma tai toiselta nimeltään vaihto-paradoksi. Tämän ongelmallisen pulman ensimmäinen versio on alkuperäisin 1953 vuodelta belgialaisen matemaatikon Maurice Kraitchikin kirjasta *Recreational Mathematics*. Paradoksista on monia lievästi vaihtelevia versioita ja tämä paradoksi saattaa hyvinkin olla osalle opiskelijoista jo entuudesta tuttu. Tällä ei kuitenkaan ole merkitystä, sillä tämän rahapelin tarkoituksena tässä tehtävässä ei ole vain löytää oikeaa vastausta kysymykseen: ”kannattaako vaihtaa?”, vaan myös pohtia sen taustalla olevaa todennäköisyyslaskentaa. Vaihto-paradoksin ensimmäisessä vaiheessa esitellään pelin lähtökohdat ja lähdetään liikenteeseen kysymyksestä kannattaa kirjekuori vaihtaa vai ei. Tässä vaiheessa molemmat ratkaisut hyväksytään, sillä pääpainona on pohtia paradoksin taustoja ja perusteluita matemaattisesti. Molemmilla vastauksilla tulevat omanlaiset oikean vastauksen viestit, jotka näkyvät yllä olevissa kuvissa.





Tehtävän toiseksi viimeisessä vaiheessa tarkoituksena on todennäköisyyslaskennan avulla päätellä ja perustella, miksi vaihto kannattaa matematiikan näkökulmasta. Tämä tapahtuu odotusarvoja laskemalla ja samalla odotusarvon käsitteen ymmärrystä ja odotusarvon laskemista vahvistaen. Tämä tehtävän vaihe lasketaan symboleilla, sillä tavoitteena on todentaa vaihdon kannattavuus rahasummasta riippumatta. Tehtävänannossa yritetään ohjeistaa opiskelija käyttämään oikeanlaisia merkintöjä, muttei kuitenkaan liikaa ohjeisteta, jotta opiskelijalle jää vaatimukseksi osata muodostaa lauseke matematiikassa yleisesti käytössä olevalla tavalla. Mikäli odotusarvon lausekkeen tuottamisessa on haasteita, annetaan väärän vastauksen viestissä tarkentavia ohjeita ja tuetaan oikeaan vastaukseen pääsyä.

Missä nyt siis syntyy paradoksi? Eikö tässä tullut jo selkeästi esille, että vaihtaminen kannattaa aina?

Merkitään nyt vaihdon jälkeen kädessäsi olevan kirjekuoren sisältämää rahasummaa merkinnällä "y" ja päätellään samoin kuin edellä. Kannattaako sinun pitää kädessäsi oleva kirjekuori vai vaihtaa se (alkuperäiseen)? Mikä on tällöin odotusarvo vaihdolle toiseen (alkuperäiseen) kirjekuoreen?

E(**Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan**)= $2y$

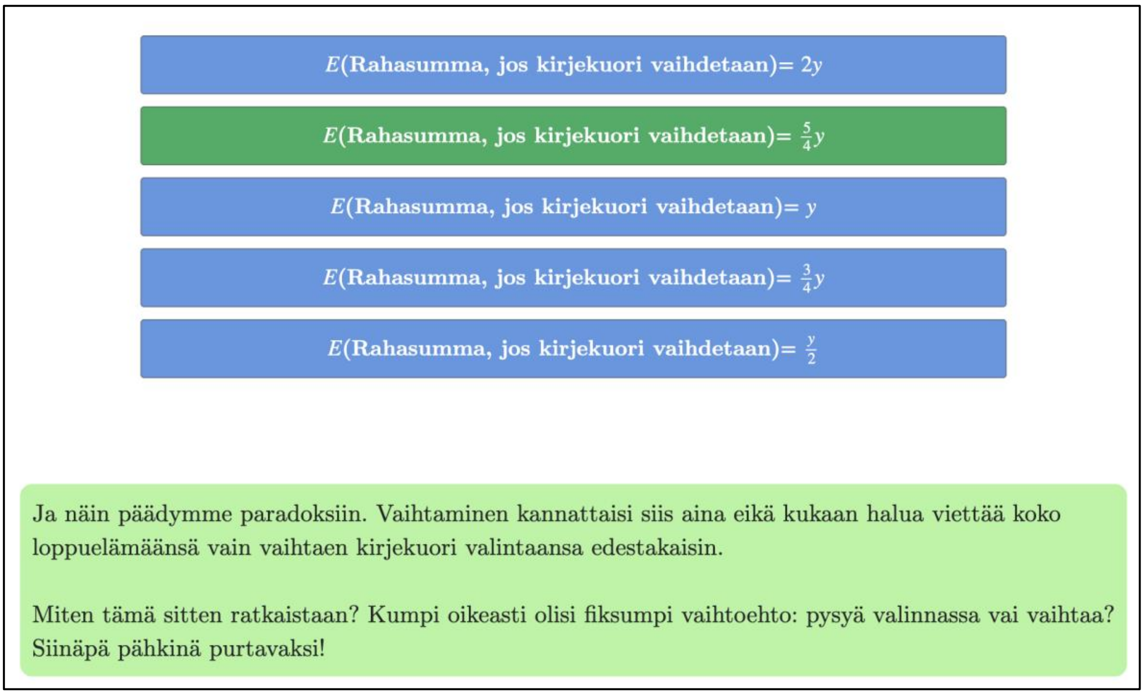
E(**Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan**)= $\frac{5}{4}y$

E(**Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan**)= y

E(**Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan**)= $\frac{3}{4}y$

E(**Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan**)= $\frac{y}{2}$

Pohdi vielä. Tämä menee täysin samalla tavalla kuin edellinen, vain rahasummalle käytettävä muuttuja vaihtui.



Viimeisessä vaiheessa tuodaan esiin tämän klassisen tilanteen problematiikka ja mikä siitä tekee paradoksin. Opiskelijan on tarkoituksena huomata, että aina kun vaihtoa pohditaan yksittäisenä tapauksena, on odotusarvo täysin sama ja kielii vaihdon kannattavuudesta. Samalla koitetaan innostaa opiskelijaa pohtimaan itsekseen tarkemmin tämän tilanteen problematiikkaa; miksi valita jompikumpi ja onko matematiikan näkökulmalla ja todellisen elämän näkökulmalla jotain eroa tässä tilanteessa?

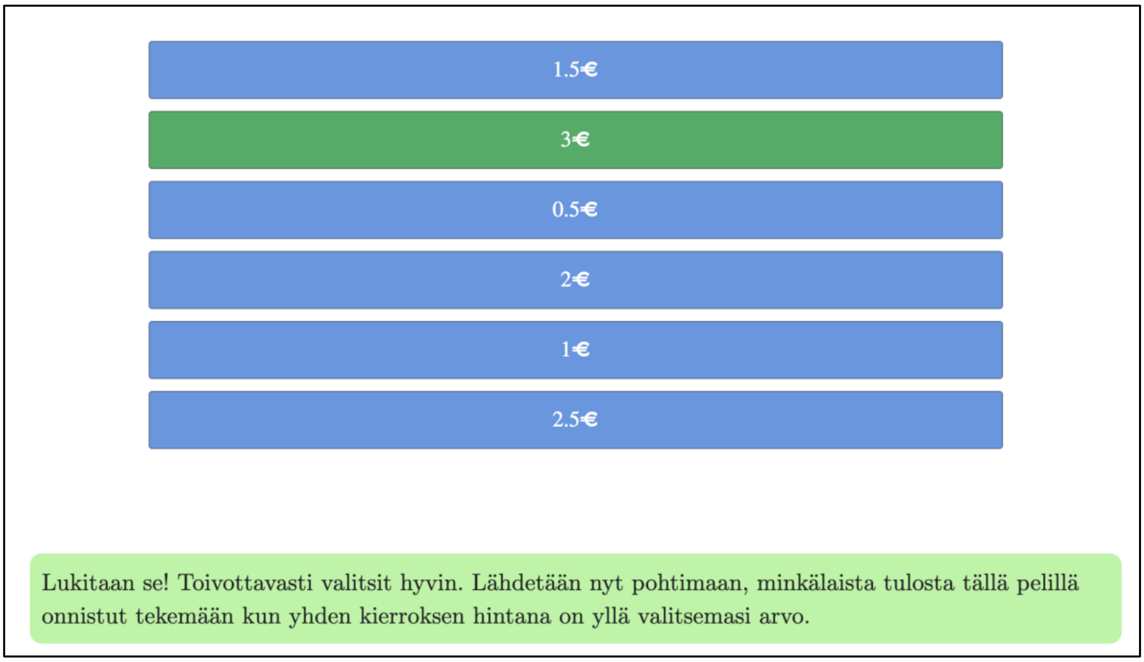
5.4 Rahapelejä osa 2

Tehtäväkokonaisuuden toisessa osassa keskitytään kaksivaiheiseen rahapeliin, jossa ensin heitetään noppaa ja tämän jälkeen kolikoita. Pelinkulku lyhyesti: nopanheiton antama silmäluku määrittää heitettävien kolikoiden määrän. Mikäli kolikko kääntyy kruunapuolelle, saa pelaaja pitää kolikon voittona. Klaavan tapauksessa kolikko jää pelin vetäjälle. Tässä tehtävässä opiskelija on pelinvetäjän roolissa. Pelinvetäjänä opiskelija joutuu päättelemään pelilleen hinnan ja tämän jälkeen laskemaan yhdessä tehtävän vaiheiden mukana onko hänen asettama hinta pelille kannattava ja muutoinkin sopiva. Aihepiirinä tehtävä koskettaa arkielämässäkin usein vastaantulevaa tuottavuusarviointia tai yksinkertaistettuna syy-seuraussuhteiden arviointia. Tehtävän tavoitteena on vahvistaa odotusarvon laskemista ja käyttöä lopputuloksen arvioinnista. Odotusarvolaskut ovat tässä tehtävässä hieman edellistä vaihetta monimutkaisempia ja pidempiä, mikä vaatii opiskelijalta tarkkuutta ja pitkäjänteisyyttä tai vaihtoehtoisesti syvällisempää ymmärrystä odotusarvosta ja kykyä yksinkertaistaa laskutoimituksiaan.

Edellisen osion rahapelistä innostuneena päätät alkaa itse huijaamaan hyväuskoisia uhkapelureita. Suunnittelet pelin, jossa heitetään ensin tavallista kuusi tahkoista arpakuutiota. Arpakuution silmäluku kertoo kuinka monta 1€ kolikkoa annat pelaajalle heitettäväksi. Mikäli pelaaja kolikkoa heittäessä saa kruunan, saa hän pitää kolikon itsellään. Mikäli kolikko kääntyy klaavan puolelle, jää kolikko pelin järjestäjälle eli sinulle.

Ainut pohdittava asia on enää kuinka suuri summa asetetaan yhden pelikierroksen hinnaksi. Et tietenkään halua hävitä, mutta haluat tehdä pelistä mahdollisimman houkuttelevan. Mikä alla olevista summista sopisi mielestäsi parhaiten yhden kierroksen hinnaksi?

Pohdi tarkkaan, sillä tämä valinta vaikuttaa tulevaisuutesi.



Tehtävän ensimmäisessä vaiheessa opiskelijaa pyydetään asettamaan yhdelle pelikierrokselle hinta annettujen vihjeiden mukaisesti; tarpeeksi korkeaksi jottei jää tappiolle, mutta sopivan hintaiseksi, jotta peli pysyy pelaajien näkökulmasta houkuttelevalta. Tässä kohtaa hyväksytään kaikki vaihtoehdot, sillä opiskelijan on vain valittava omaan päättelyynsä nojaten paras vaihtoehto. Sähköisen tehtävän etuna on tässä kohtaa se, että opiskelijan vastaus jää muistiin eikä sitä voi enää myöhemmässä vaiheessa kumittaa ja vaihtaa toiseen. Näin ollen opiskelijan tehtävän alussa tekemä arvio on oikeasti opiskelijan siinä kohtaa antama arvio, jota hyödynnetään tämän tehtävän viimeisessä vaiheessa olevassa oman suoriutumisen arvioinnissa.

Noniin, nyt kun hinta bisnekselle on selvillä voisimme vielä pohtia, miten hyvä hinta se todellisuudessa on. Selvitetään siis onko valitsemasi hinta pelille sopiva suhteutettuna pelin odotusarvoon.

Lähdetään liikkeelle siitä, että lasketaan odotusarvot tilanteille, joissa on eri määrä kolikoita heitettävänä.

E(Voittosumma yhtä kolikkoa heitettäessä)= 0
E(Voittosumma kahta kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma kolmea kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma neljää kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma viittä kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma kuutta kolikkoa heitettäessä)=

Tarkista uudelleen

Odotusarvoja haetaan. Aloitetaan yksinkertaisimmasta eli yhden kolikon tapauksesta ja käytetään laskukaavaa $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Yhden kolikon tapauksessa erilaisia lopputuloksia on kaksi erilaista ja niiden tulokset on joko 0€ tai 1€. Sinun täytyy vielä pohtia vaihtoehtojen todennäköisyydet, jotta voit päätellä odotusarvon

Kahden kolikon tapauksessa vaihtoehtojen määrä eri lopputuloksille kasvaa. Mutta millä tavalla?

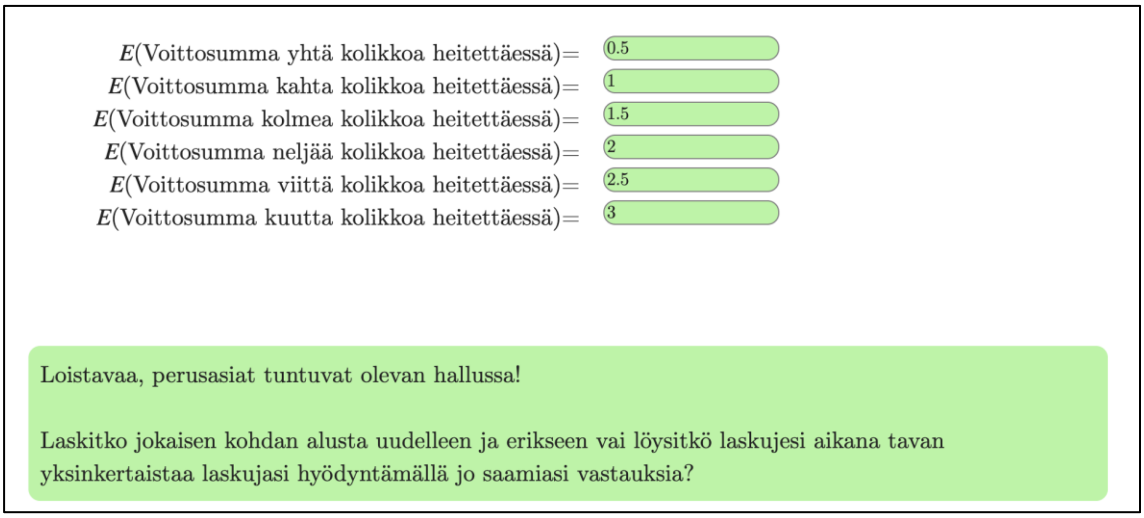
E(Voittosumma yhtä kolikkoa heitettäessä)= 0.5
E(Voittosumma kahta kolikkoa heitettäessä)= 1
E(Voittosumma kolmea kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma neljää kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma viittä kolikkoa heitettäessä)=
E(Voittosumma kuutta kolikkoa heitettäessä)=

Tarkista uudelleen

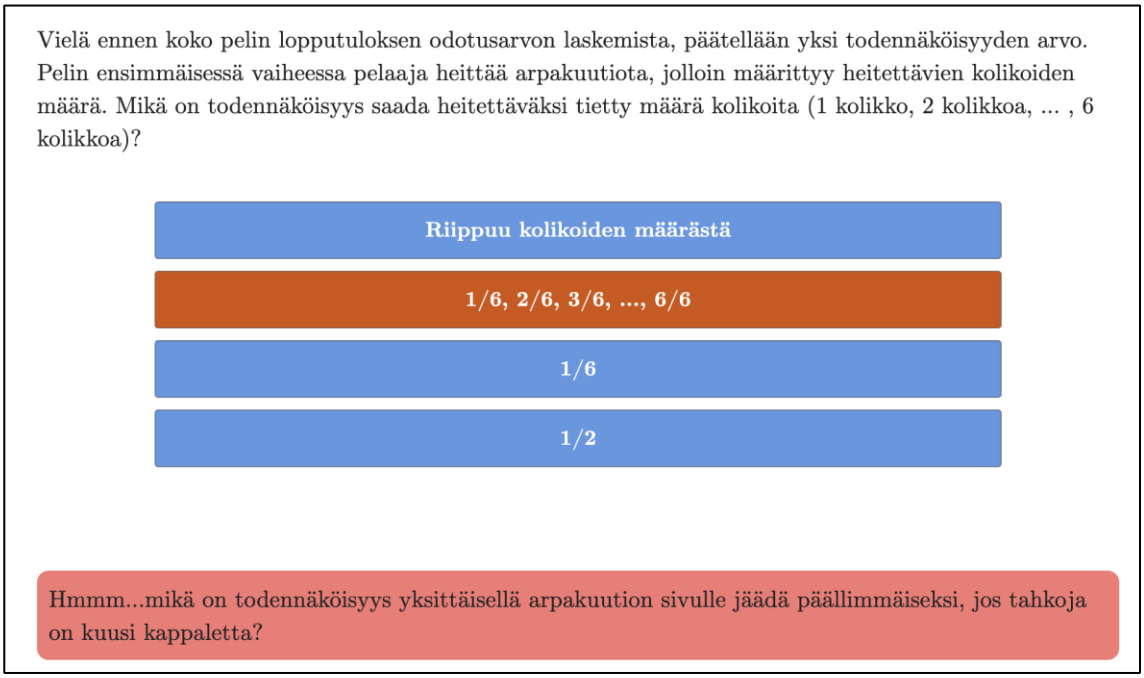
Odotusarvoja haetaan. Aloitetaan yksinkertaisimmasta eli yhden kolikon tapauksesta ja käytetään laskukaavaa $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

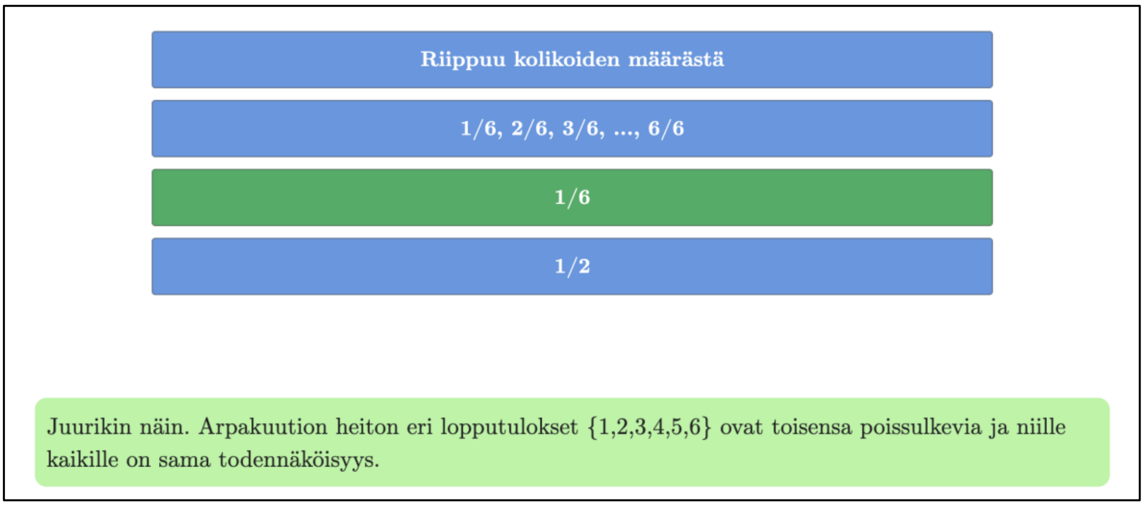
Hienoa, ensimmäinen on oikein!

Toinen kohta on oikein. Jatka samaan malliin!

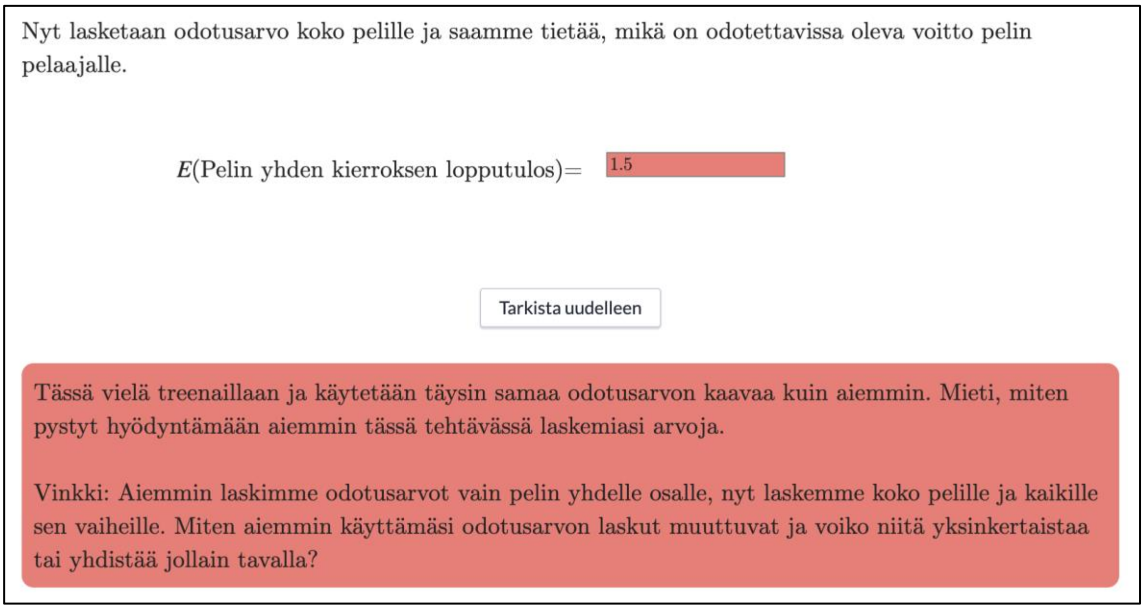


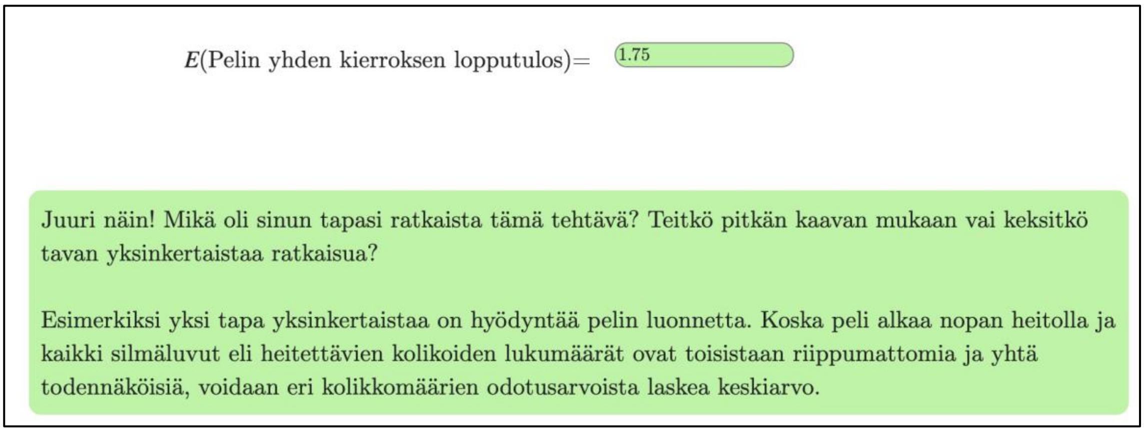
Tehtävän seuraavissa vaiheissa aletaan matemaattisesti selvittämään mikä todellisuudessa olisi hyvä hinta rahapelin yhdelle kierrokselle. Näin päästään tutkimaan kuinka hyvin opiskelija arvioi tehtävän alussa itse ennen sen tarkempaa pelin analysointia sähköisen tehtävän avustamana. Ensimmäisessä vaiheessa opiskelijan tehtävänä on laskea odotusarvot rahapelin ensimmäiselle vaiheelle eli odotusarvot eri määrille heitettäviä kolikoita. Väärän vastauksen viesti muuttuu vaiheittain, riippuen mitkä kohdat opiskelija on saanut jo oikein. Viestissä annetaan myös vihjeitä, joiden avulla opiskelijan pitäisi päästä alkuun ja eteenpäin päättelyssään. Oikean vastauksen viestissä pyritään tukemaan opiskelijan oman toiminnan pohtimista.





Tehtävän seuraavassa vaiheessa jatketaan koko pelin yhden kierroksen lopputuloksen odotusarvon laskemisen pilkkomista. Näin päättelyprosessi saadaan vaiheistettua ja opiskelijalla on parempi kyky omaksua, mitä kaikkea on hyvä ja tarpeellista selvittää lopputuloksen saamiseksi. Samalla tässä vaiheessa testataan opiskelijan kykyä hahmottaa käsillä olevaa tilannetta todennäköisyyslaskennan näkökulmasta. Vaiheittain etenevän sähköisen tehtävän vahvuutena on tässä kohtaa opiskelijan pakottaminen pohtimaan tehtävässä käsiteltävää tilannetta pienissä palasissa. Usein opiskelijoiden haasteena on, etteivät he tuota näkyväksi päättelynsä kaikkia vaiheita, joka voi johtaa huolimattomuusvirheeseen tai muuhun virheeseen päättelyssä. Tehtävän pakottaessa vaiheittaiseen etenemiseen, voi vahvistua opiskelijan oma vaiheittain päättely sekä päättelyn vaiheiden näkyväksi tekeminen. Vaikka tässä tehtävän vaiheessa oleva kysymys on melko yksinkertaisesta asiasta, voivat kysymyksen asettelu ja eri vaihtoehdot johtaa harhaan opiskelijan, joka ei ole hahmottanut tehtävän tilannetta selkeästi. Opiskelijat, joille tämä aihepiiri on vahvana ja nämä kysymykset helppoja, voivat suoriutua helposti tehtävästä. Tätä tehtävää ei ole pilkottu liian pieniin ja helppoihin osiin, jotta asian vahvemmin osaavat opiskelijat eivät turhautuisi tehtävää tehdessä.





Tässä vaiheessa opiskelijaa pyydetään selvittämään koko pelin yhden kierroksen odotusarvo, joka lasketaan nyt käyttäen hyväksi aiempia vaiheita ja jo laskettuja välituloksia. Väärän vastauksen viestissä pyritään kannustamaan opiskelijaa pohtimaan odotusarvon luonnetta tarkemmin, jotta tehtävää voi helpottaa. Tämä vaatii hieman enemmän matemaattista ymmärrystä, mutta samalla opiskelijalla on mahdollisuus oppia uutta tai syventää ymmärrystään asiasta. Tämänkin vaiheen oikean vastauksen viestissä kannustetaan opiskelijaa reflektoimaan ratkaisutapaansa. Lisäksi opiskelijalle avataan yhtä päättelykeinoa, jolla ratkaisun saamista voi helpottaa. Tehtävä siis myös opettaa samalla, kun opiskelija tekee sitä. Tämänkaltainen opettava palaute ei ole yhtä helposti toteutettavissa perinteisissä oppikirjatehtävissä. Mikäli oppikirjassa oleva tehtävänanto sisältäisi samanlaisen viestin kuin tämän vaiheen oikean vastauksen viesti, paljastuisi opiskelijalle jo etukäteen keino yksinkertaistaa laskua, eikä opiskelijan tarvitsisi itse nähdä vaivaa ja haastaa itseään sekä osaamistaan yksinkertaistuksen löytämiseksi. Mikäli opiskelijalle annetaan kaikki työkalut ja oikopolut käteen etukäteen, voi opiskelija käyttää niitä ilman, että ymmärtää niiden taustalla olevaa logiikkaa tai matemaattisia perusteita.

Nyt vaiheittaisessa sähköisessä tehtävässä opiskelijalle voidaan antaa työkalut ja oikopolut vasta kun hän on tavalla tai toiselle itse onnistunut ratkaisemaan tehtävän vaiheen oikein. Tällöin tehtävä vahvistaa opiskelijan omaa päättelyä, matemaattista ymmärrystä ja oppimista.

Palataan vielä pohtimaan alkuperäistä kysymystä, jota pohditaan erityisesti kahdesta näkökulmasta: pelin pitäjänä ei halua hävitä rahaa ja samalla toisaalta haluaa tehdä pelistä mahdollisimman houkuttelevan pitämällä pelikierroksen hinnan sopivana. Mikä alla olevista summista sopisi nyt tässä kohtaa mielestäsi parhaiten yhden kierroksen hinnaksi?

0.5€

1.5€

2.5€

2€

3€

1€

Ei osunut tällä kertaa! Valitsitko summan, joka on pelin odotusarvon yläpuolella? Tarvitset maksuksi enemmän kuin oletettavasti joudut pelaajalle maksamaan.

Et kai valinnut toisaalta liian korkeaa summaa? Tällöin et löydä innokkaita pelaajia.

0.5€

1.5€

2.5€

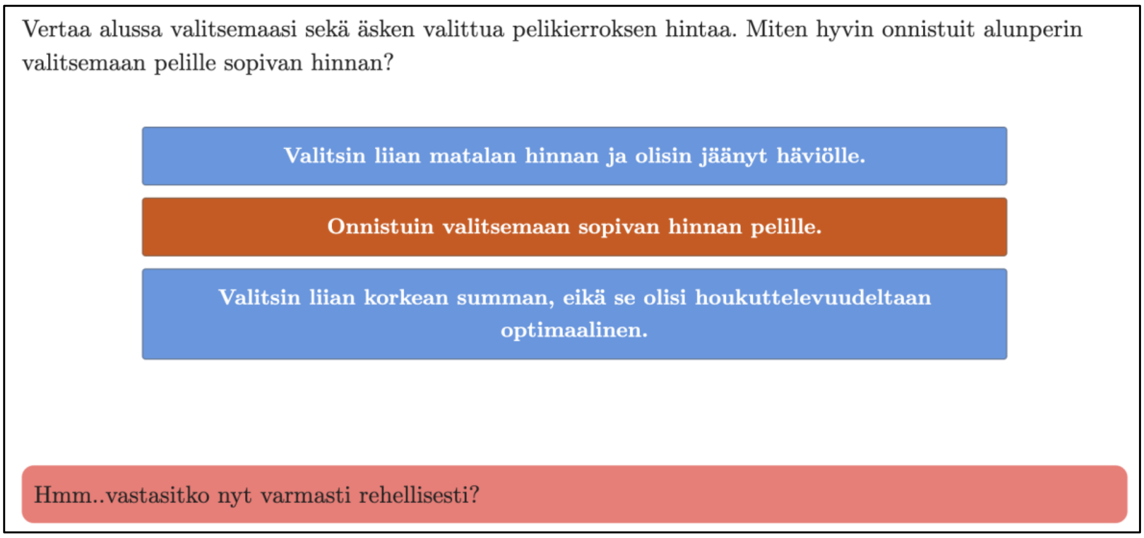
2€

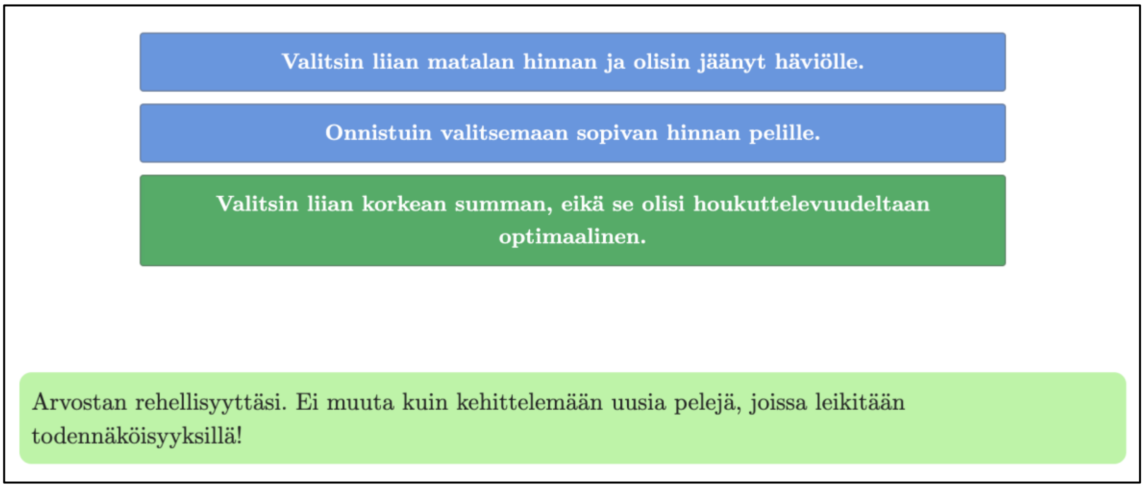
3€

1€

Kyllä vain! 2,5€ on varmasti sopiva summa; pääset hyvin voiton puolelle, mutta pelin hinta ei nouse vielä aivan liian korkeaksi.

Tehtävän toiseksi viimeisessä vaiheessa palataan ensimmäiseen kysymykseen, jossa opiskelijaa pyydettiin alustuksen jälkeen päättelemään parhaiden tietojensa mukaisesti pelille sopiva kierroshinta. Nyt kysymys esitetään uudestaan ja opiskelijan pitäisi pystyä päättelemään sopiva summa nojautuen hänen aiemmin tehtävässä saamiin matemaattisiin tuloksiin. Tässä kohtaa kaikkia vastauksia ei enää hyväksytä, vaan oikeat vastaukset on valittu matemaattisin perustein. Oikeiksi vastauksiksi kelpaavat summat 2€ ja 2,5€. Nämä molemmat ovat ylitse odotusarvon, mutta eivät myöskään paljon sitä suurempia. Kaksi oikeaa vastausta tässä kohtaa antaa myös opiskelijalla mahdollisuuden omaan harkintaan sekä mahdollisuuden vastauksen oikeellisuuden suhteellisuudelle johtuen subjektiivisesta tulkinnasta. Loput vastauksista on koodattu vääriksi, sillä ne ovat joko alle odotusarvon tai liian suuria siihen verrattuna. Vaikka vastaus voi sisältää suhteellisuutta ja subjektiivisuutta, ohjataan tämän vaiheen tehtävänannossa valitsemaan arvo läheltä odotusarvoa ja sen yläpuolelta, jolloin oikeat vastaukset voidaan rajata tietylle arvoalueelle.





Viimeinen vaihe liittyy opiskelijan oman suorituksen arviointiin, joka on tärkeä osa oppimisprosessia. Opiskelijan itsearviota tehtävän suorittamisesti on tavallisesti hyvin vaikea arvioida tai tarkistaa. Tässä tehtävässä arvio omasta alkuperäisestä suorituksesta voidaan yhdistää vahvasti lukuarvoihin, jolloin itsearvio voidaan koodata olevan oikein tai väärin. Tällöin saadaan tuotettua oikeellisuus tarkistus myös oman suorituksen arvioinnille. Oppikirjoihin tai niiden tarkistuskirjoihin ei tämänkaltaista ”oikeaa” vastausta saada laitettua oman suorituksen arviointiin liittyvien kysymyksien kohdalle. Tämä on ominaisuus, joka voidaan kuitenkin melko helposti sisällyttää sähköiseen tehtävään, sillä koodaamalla tietyt vastausvaihtoehdot pystytään yhdistämään tietynlaisiin ja erilaisiin palautteisiin.

5.5 Sähköpotkulauta

Viimeinen tehtävä liittyy melko ajankohtaiseen ilmiöön ja voi olla tämän vuoksi opiskelijoita innostava tehtävä. Tehtävässä lasketaan todennäköisyyksiä joutua onnettomuuteen sähköpotkulautaa käyttäessä. Tehtävänanto on fiktiivinen sekä melko pitkä ja sisältää useampia lukuarvoja. Näin ollen tehtävä vaatii opiskelijalta kykyä keskittyä sekä hahmottaa tehtävänannon pituudesta huolimatta tehtävän tilanne ja siihen liittyvät olennaiset asiat. Tehtävän sisältö painottuu hyvin vahvasti puukuvion ymmärtämiseen, hyödyntämiseen ja siihen liittyvien ominaisuuksien hallintaan. Nämä ovat myös asioita, joita opiskelijalta testataan ja samalla niitä pyritään vahvistamaan tehtävän kautta. Tehtävän pyrkimyksenä on myös pelkän laskemisen sijaan antaa opiskelijalle lisää tietoa puukuviosta ja sen käytöstä kahden tai useamman satunnaistapahtuman muodostaman tapahtumaketjun hahmottamisessa.

Sähköpotkulaudat ovat yleistyneet kulkuneuvoina kaupungeissa hurjaa vauhtia. Erään tilastotieteilijän tutkimuksen mukaan ne ovat erityisesti nousseet suosioon opiskelijoiden keskuudessa. Valitettavasti näillä menopeleillä onnettomuuden aiheuttaminen ei ole kovin harvinaista. Onnettomuudet voivat olla moninaisia; törmääminen toiseen potkulautailijaan tai muuhun tiellä kulkijaan, törmääminen erilaisiin infrastruktuurin osiin, täysin itseaiheutettu kaatuminen pelleilyn seurauksena tai potkulaudan syttyminen palamaan väärinkäytön seurauksena.

Tilastotieteilijän tutkimuksessa tutkittiin erilaisia onnettomuuksiin vaikuttavia muuttujia, joista merkittävimpiä löytyi kaksi erilaista. Onnettomuuksiin päätymiseen vaikutti olennaisesti vuorokauden aika, milloin potkulauta oli ajokäytössä. Toisena ja yllättävämpänä tekijänä onnettomuuksiin vaikutti potkulaudan ulkonäkö, joita oli kolmea erilaista; punainen, vihreä ja liekkikuvioinen.

Tilastotieteilijän huomioista kävi ilmi, että potkulautojen käyttöönotosta 50% tapahtui päivällä, aikavälillä 10-22, ja loput tapahtui muuna aikana eli yöaikaan. Punaisella potkulaudalla päivällä ajettaessa toteutuu onnettomuus $\frac{2}{11}$ kerroista, kun taas vihreää potkulautaa käytettäessä $\frac{1}{8}$ kerroista. Yöaikaan onnettomuuksia tapahtui huomattavasti enemmän. Punaisella potkulaudalla kolaroitiin 35% ajokerroista ja vihreällä vastaavasti 48% ajoista. Valittaessa liekkikuvioinen potkulauta, on onnettomuus väistämättä edessä.

Tilastotieteilijä oli huomannut myös, että päivällä potkulautailijat välttivät liekkikuvioisia potkulautoja ja valitsivat niiden sijaan vain punaisia ja vihreitä potkulautoja. Päivällä valituista potkulaudoista $\frac{1}{5}$ oli punaisia. Yöaikaan vastaavasti huonon fyysisen tai henkisen näkökyvyn vuoksi kaikkia kolmea potkulautatyyppiä valittiin yhtä satunnaisesti.

Ja nyt itse asiaan...sinun tehtävänäsi on selvittää tutkimukseen liittyviä erilaisia todennäköisyyksiä, jotka liittyvät potkulautojen onnettomuuksiin. Ensimmäisenä sinun tulisi selvittää, millä todennäköisyydellä kaikista potkulaudan käyttäjistä täysin satunnaisesti valittu potkulautailija joutuu onnettomuuteen? Lähdetään aluksi hahmottamaan tilannetta käyttämällä siihen sopivaa metodia. Mikä seuraavista sopisi parhaiten tämän tilanteen hahmottamiseen?

Geometrinen kuva

Puukuvio

Funktio

Venn-diagrammi

Nope! Tässä kyseisessä tapauksessa on useampia muuttujia jotka vaikuttavat toisiinsa ja muodostavat tapahtumaketjuja. Miten saisimme kuvattu yksinkertaisesti ja visuaalisesti näitä ketjuja?

Geometrinen kuva

Puukuvio

Funktio

Venn-diagrammi

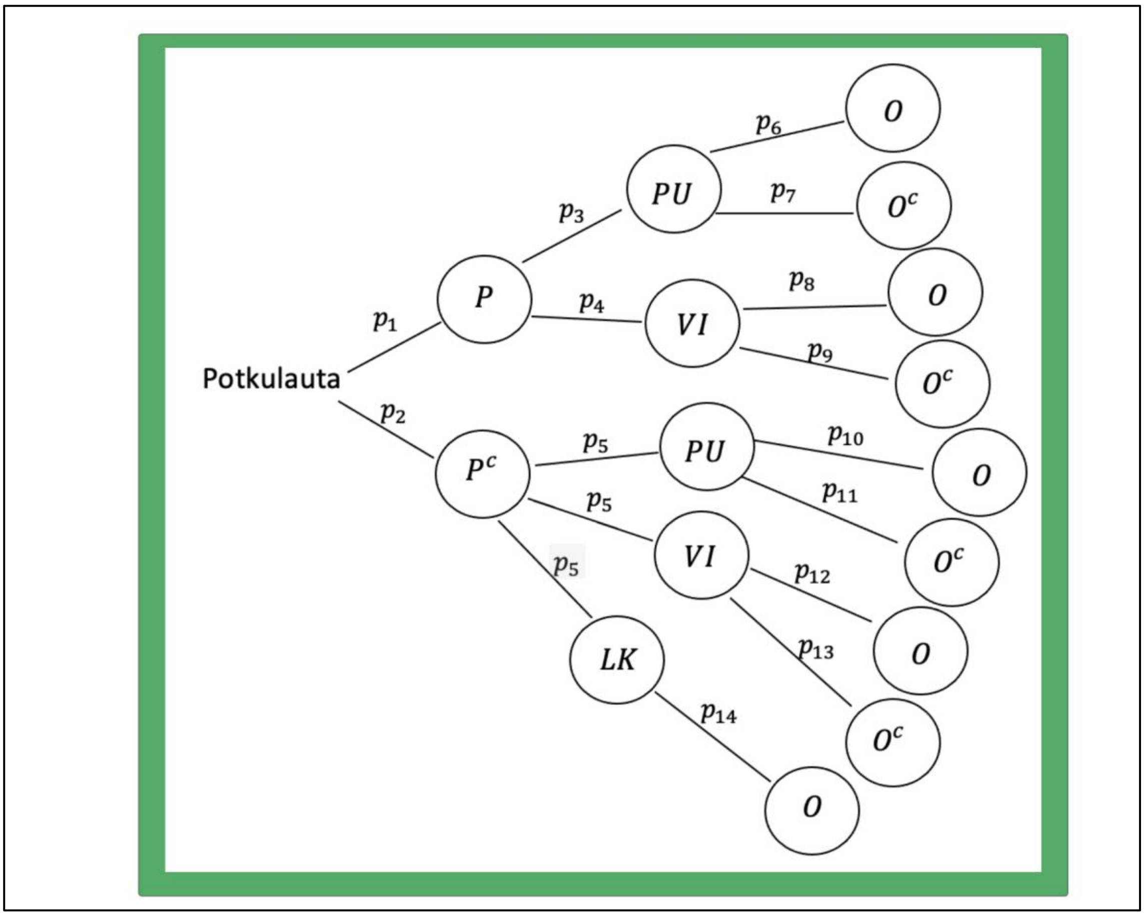
Kyllä vain! Puukuvion avulla on helppo havainnollistaa kaikkia eri vaihtoehtoja, jotka linkittyvät toisiinsa. Lisäksi kokonaistodennäköisyyksien laskemista puukuvio selkeyttää loistavasti.

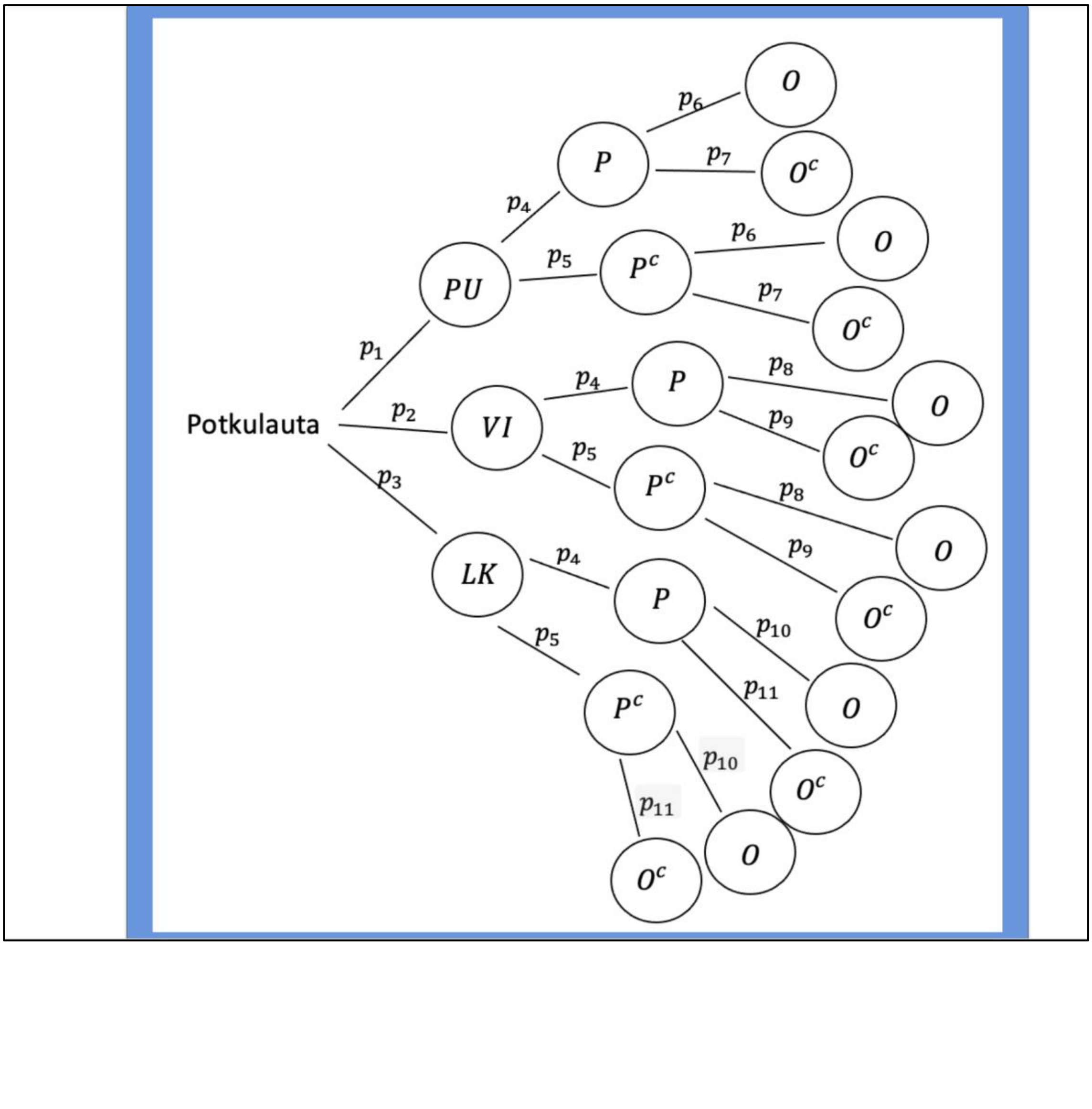
Tehtävän ensimmäisessä vaiheessa opiskelijalle esitetään tehtävän aihe ja johdetaan tehtävään sisään. Heti ensimmäiseksi opiskelijan tehtävänä on päätellä, mikä on paras havainnollistuskeino kyseessä olevalle ilmiölle. Tämä vaatii opiskelijalta kykyä sisäistää tehtävänannossa kerrottu sisältö ja esitetyn ilmiön luonne sekä tuntea todennäköisyyslaskennan perusteita, jotta pystyy päättelemään millä mallilla ylipäätään voidaan tilannetta havainnollistaa. Opiskelija saa väärästä vastauksesta heti palautteen, jonka etuna on, että tehtävässä päästään heti alkuun oikeille raiteilla. Tällöin vältytään siltä, että opiskelija voi ehtiä tehtävässä jo melko pitkälle ennen kuin vasta tarkistaessaan tehtävää perinteisin keinoin saa selville hahmottaneensa alusta alkaen tehtävää väärin. Tämä vähentää turhautumista ja näin opiskelija jaksaa työskennellä tehtävän parissa paremmin.

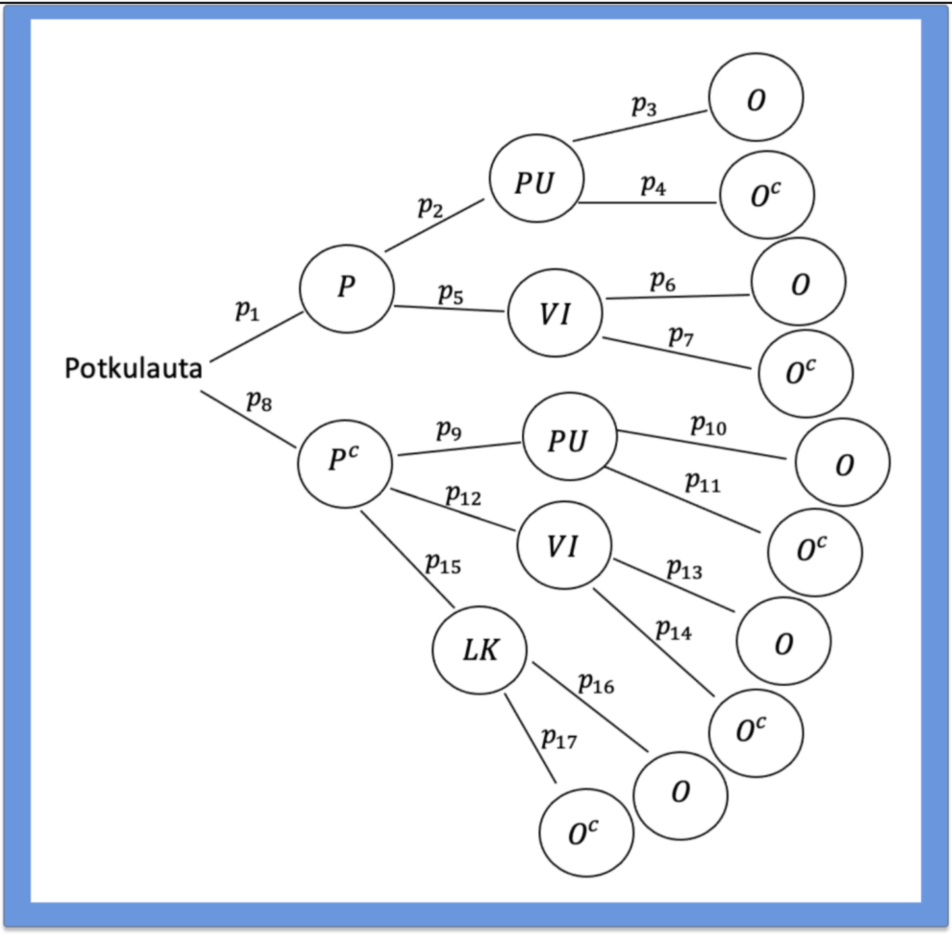
Valitaan seuraavaksi tehtävään sopiva puukuvio. Mikä seuraavista kuvaa tehtävän tilannetta parhaiten?

Kaikissa puukuvioissa on käytetty seuraavia merkintöjä; " P "=päivä, " P^C "=yöaika, " PU "=punainen, " VI "=vihreä, " LK "=liekkikuvioinen, " O "=onnettomuus ja " O^C "=ei onnettomuutta.

Lisäksi merkinnät $p_1, p_2, p_3, \ldots$ kuvaavat tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien arvoja.


Potkulauta
P
Pc
PU
VI
LK
O
Oc
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
p10
p11
p12
p13
p14


Potkulauta
PU
VI
LK
P
Pc
O
Oc
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
p10
p11



Oletko varma, että valitsit vaihtoehdon joka kuvaa tilannetta oikein ja joka on mahdollisimman yksinkertaisesti esitetty? Vaikka tehtävänanto on pitkä, se kannattaa lukea ajatuksella.

Hyvin valittu! Tämä kuvaa tilannetta oikein ja on vaihtoehdoista selkein!

Toisessa vaiheessa siirrytään asiassa suoraan eteenpäin ja opiskelijan tulee valita mikä esitetyistä kolmesta puukuviosta sopii parhaiten tehtävänannossa kuvattuun tilanteeseen. Tässä tehtävässä puukuvion piirtämisen harjoittelu ei ole pääasiallinen tavoite, joten oikean puukuvion valinta valmiiden joukosta toimii oikein hyvin tehtävän tarkoitusperiin. Väärän vastauksen viestissä toisinnetaan ja tarkennetaan vielä kysymyksen asettelua samalla ohjaten opiskelija kohti oikeita valitsemiskriteereitä.

Tässä vaiheessa voisimme varmistaa, että ymmärrämme, miten puukuvio toimii ja millaisissa tapauksissa se on käyttökelpoinen malli sovellettavaksi.

Hyvänä lähtökohtana puukuvion käytölle toimii tilanteet, joissa käsillä oleva ilmiö sisältää vaihtoehtoisia tapahtumajonoja, kuten nyt tämän tehtävän tapauksessa potkulautoihin liittyvä onnettomuusilmiö.

Mitä muita vaatimuksia puukuvion käytölle on olemassa? Valitse seuraavista vaihtoehdoista sopivat.

Tapahtumajonoissa voidaan edetä mielivaltaisesti tapahtumista toisiin.

Ilmiöllä on yksi alkutila ja yksi tai useampia lopputiloja.

Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla välillä 0-1.

Jokaisessa vaiheessa ennen lopputilaa kohdataan yksi tai useampi tapahtumavaihtoehto, joista yksi realisoituu ja johtaa taas uusiin tapahtumavaihtoehtoihin.

Useat puukuvion pisteet eli vaiheet eivät voi vastata samaa tapahtumaa.

Tapahtumajonoissa edetään vaiheittain tapahtumasta toiseen alkutilasta kohti jotain ilmiön lopputiloista.

Valitse yksi tai useampi vaihtoehto

Nyt täytyy varmaan muistella tai selvittää mitä ominaisuuksia puukuviolla on.

Oletko sitä mieltä, ettei eri pisteissä voi olla samoja tapahtumia? Eikö kuitenkin kaksi eri vaihtoehtoa tai vaihtoehtoista tapahtumaketjua voi johtaa samaa lopputulokseen? Bussista myöhästyminen voi johtaa luennolta myöhästymiseen, mutta myös bussiin ehtiessä on mahdollista myöhästyä luennolta muista syistä.

Tapahtumajonoissa voidaan edetä mielivaltaisesti tapahtumista toisiin.

Ilmiöllä on yksi alkutila ja yksi tai useampia lopputiloja.

Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla välillä 0-1.

Jokaisessa vaiheessa ennen lopputilaa kohdataan yksi tai useampi tapahtumavaihtoehto, joista yksi realisoituu ja johtaa taas uusiin tapahtumavaihtoehtoihin.

Useat puukuvion pisteet eli vaiheet eivät voi vastata samaa tapahtumaa.

Tapahtumajonoissa edetään vaiheittain tapahtumasta toiseen alkutilasta kohti jotain ilmiön lopputiloista.

Valitse yksi tai useampi vaihtoehto

Nyt täytyy varmaan muistella tai selvittää mitä ominaisuuksia puukuviolla on.

Tapahtumaketjun missä tahansa vaiheessa olevien vaihtoehtojen pitäisi olla toisensa poissulkevia. Jokin vaihtoehdoista siis tapahtuu, mutta samaan aikaan vain yksi on mahdollinen. Mitä tämä tarkoittaa todennäköisyyksien kannalta? Voit myös pohtia ylipäätään puukuviossa liikkumista, millaisia säännönmukaisuuksia siihen liittyy?

Tapahtumajonoissa voidaan edetä mielivaltaisesti tapahtumista toisiin.

Ilmiöllä on yksi alkutila ja yksi tai useampia lopputiloja.

Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla välillä 0-1.

Jokaisessa vaiheessa ennen lopputilaa kohdataan yksi tai useampi tapahtumavaihtoehto, joista yksi realisoituu ja johtaa taas uusiin tapahtumavaihtoehtoihin.

Useat puukuvion pisteet eli vaiheet eivät voi vastata samaa tapahtumaa.

Tapahtumajonoissa edetään vaiheittain tapahtumasta toiseen alkutilasta kohti jotain ilmiön lopputiloista.

Valitse yksi tai useampi vaihtoehto

Loistavaa työtä! Nyt pitäisi olla perusteet kunnossa. Muutama hyvä huomio liittyen puukuvion konstruointiin:

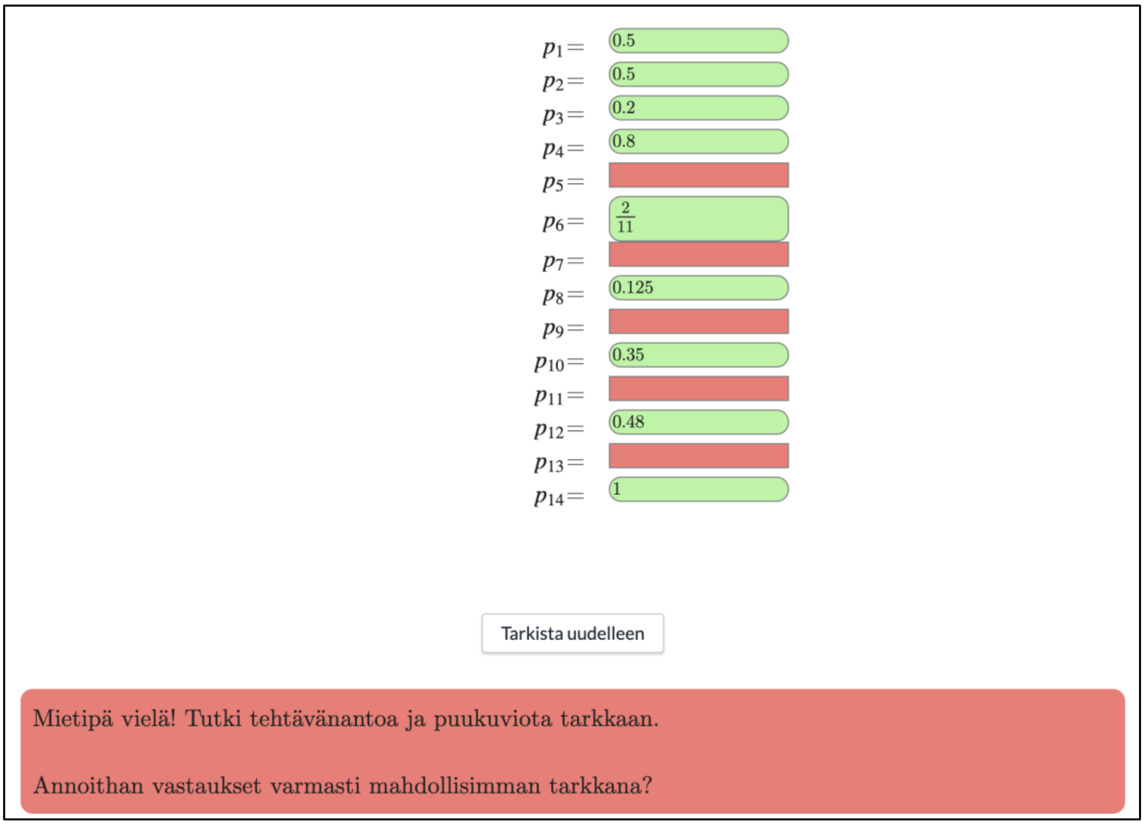
1) Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla aina 1. Mitä tämä tarkoittaa todennäköisyyslaskennan termein? Miten tätä voi hyödyntää täydennettäessä puukuvioon tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksiä?

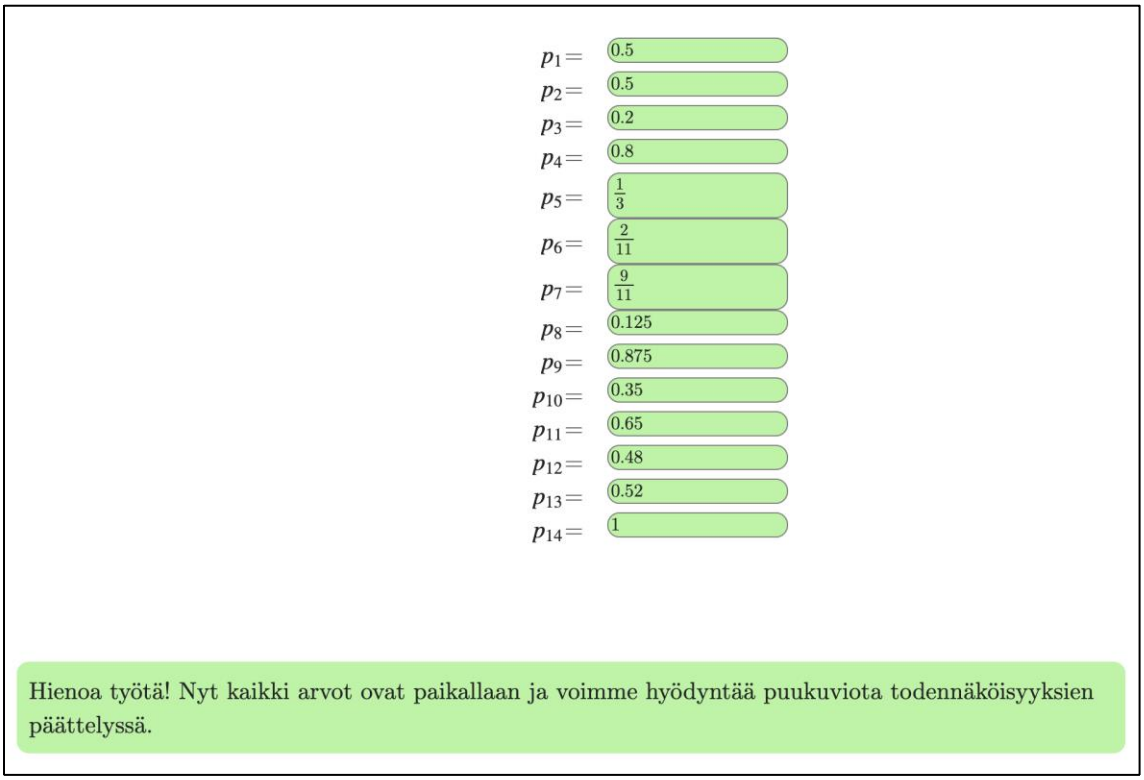
2) Useat puukuvion pisteet eli vaiheet voivat vastata samaa tapahtumaa. Esimerkiksi tämän tehtävän tapauksessa se tarkoittaa että molemmat ajankohtavaihtoehdot johtavat sekä punaisen että vihreän potkulaudan käyttömahdollisuuteen. Tai vastaavasti erilaiset potkulaudan ulkonäöt voivat johtaa onnettomuuteen.

Tässä tehtävän vaiheessa tulee opetuksellisempi osuus. Ennen kuin edetään puukuvion tutkimisessa ja erityisesti sen hyödyntämisen harjoittelussa eteenpäin, luodaan opiskelijalle tietopohjaa siitä, milloin puukuviota voidaan käyttää. Lisäksi tämän vaiheen tarkoituksena on tuoda esiin ilmiöön liittyviä vaatimuksia, jotta se voidaan esittää puukuvion avulla. Puukuvioihin ei tämän tutkielman kohdekurssin luentomateriaalissa perehdytä syvällisesti, vaan se esiintyy pintapuoleisemmin ja havainnollistusesimerkkien yhteydessä. Tästä syystä tämä tehtävän vaihe toimii myös täydennyksenä luentomateriaalin kylkeen. Monivalintatehtävää ei ole tehty haastavaksi, vaan kaikki oikeat vaihtoehdot on täysin pääteltävissä edellisessä vaiheessa valittua puukuviota tai viimeistään väärän vastauksen viestien sisältöjä tutkimalla. Mikäli opiskelijalle on heikko käsitys puukuvioista tai ne ovat täysin uusia hänelle, voi tämä vaihe tuottaa enemmän haastetta. Tämän vaiheen tapainen opettava tehtävävaihe on ominaisuus, joka voidaan helposti toteuttaa sähköisten tehtävämuotojen avulla. Vastauksen oikeellisuudesta riippuviin viesteihin saadaan luotua ohjaavia ja tukevia tekstejä, jotka voidaan koodata vaihtumaan riippuen siitä, mitkä asiat opiskelija jo osaa ja mihin taas tarvitsee tukea. Näin esimerkiksi tässä tehtävän vaiheessa on pyritty tekemään ja väärän vastauksen viestit vaihtuvat riippuen siitä, mitkä valinnat opiskelija on saanut osumaan oikein. Lisäksi oikean vastauksen viestissä vielä kerrataan ja täsmennetään puukuvioon liittyviä ominaisuuksia, joita voi hyödyntää tämän tehtävän myöhemmissä vaiheissa.

Vielä ennen kun lähdetään ratkaisemaan kysymyksiä puukuvion avulla täydennetään puukuvio sopivilla arvoilla, jotta voimme hyödyntää sitä mahdollisimman hyvin. Anna tarkat arvot desimaali- tai murtolukumuodossa.

Nyt voit halutessasi selkeyden vuoksi kopioida samalla puukuvion paperille ja täyttää arvot myös suoraan siihen oikeille paikoille. Tämä saattaa helpottaa hahmottamista!





Nyt opiskelija pääsee käyttämään puukuviota ja ensimmäinen tehtävä on täydentää aiemmin valittuun puukuvioon todennäköisyyksien arvot eri tapahtumavaihtoehdoille. Tämä kohta haastaa opiskelijan tehtävän sisäistämisen taitoja ja vaatii kykyä osata yhdistää asioita toisiinsa loogisesti pätevällä tavalla. Tähän vaiheeseen saa apua edellisestä, mikäli opiskelija kohtaa haasteita suoriutua tästä tehtävän vaiheesta. Tässä kohtaa sähköisyys voi tuottaa turhautumista, sillä arvoja ei saa syötettyä suoraan puukuvioon, vaan ne tulevat erilliseen listaan, niin kuin yllä olevasta kuvasta huomataan. Joidenkin opiskelijoiden kohdalla tämä voi vaikeuttaa hahmottamista ja olla sen vuoksi haastava. Vaiheen alussa kehotetaan opiskelijoita pohtimaan, kokevatko he tarpeelliseksi tehdä myös perinteisellä tavalla paperille puukuvion sähköisen version rinnalle. Sähköisyyden etuna kuitenkin tässä kohtaa on jokaisen todennäköisyyden tarkistusfunktio, joka antaa välittömän palautteen siitä, onko vastaus mennyt oikein vain väärin. Näin opiskelija tietää, mitkä vastaukset ovat oikein ja mitä vastauksia täytyy miettiä uudelleen. Tällä vältytään siltä, ettei tehtävä myöhemmin mene väärin, vaikka tässä kohtaa olisi tapahtunut huolimattomuusvirhe.

Ratkaistaan muutama yksinkertaisempi tilanne puukuviota hyödyntäen ennen kuin palataan tämän tehtävän pääkysymykseen. Määritä seuraavien tilanteiden todennäköisyydet:

Anna vastaukset vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja joutuu onnettomuuteen)=

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 1

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä punainen potkulauta ja välttää onnettomuuden)=

Hmm..miten puukuviosta voimmekaan päätellä todennäköisyyden jollekin esitetylle tapahtumalle?

Puukuviossa tietyn tapahtumaketjun toteutumisen todennäköisyys saadaan hyödyntämällä todennäköisyyslaskennan yleistä tulosääntöä. Joka on muotoa
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k)$
$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1})$
$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$

Mikä oli todennäköisyys, että liekkikuvioisella potkulaudalla selviää ilman onnettomuutta?

Huomasithan, että punainen potkulauta voi päätyä käyttöön kahden eri tapahtumaketjun kautta; sekä yöllä että päivällä. Tässä voidaan käyttää hyväksi tietoa, että puukuvion eri pisteisiin vievät reitit ovat toisensa poissulkevia, jolloin voidaan hyödyntää toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä.

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja joutuu onnettomuuteen)= 0.167

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 0

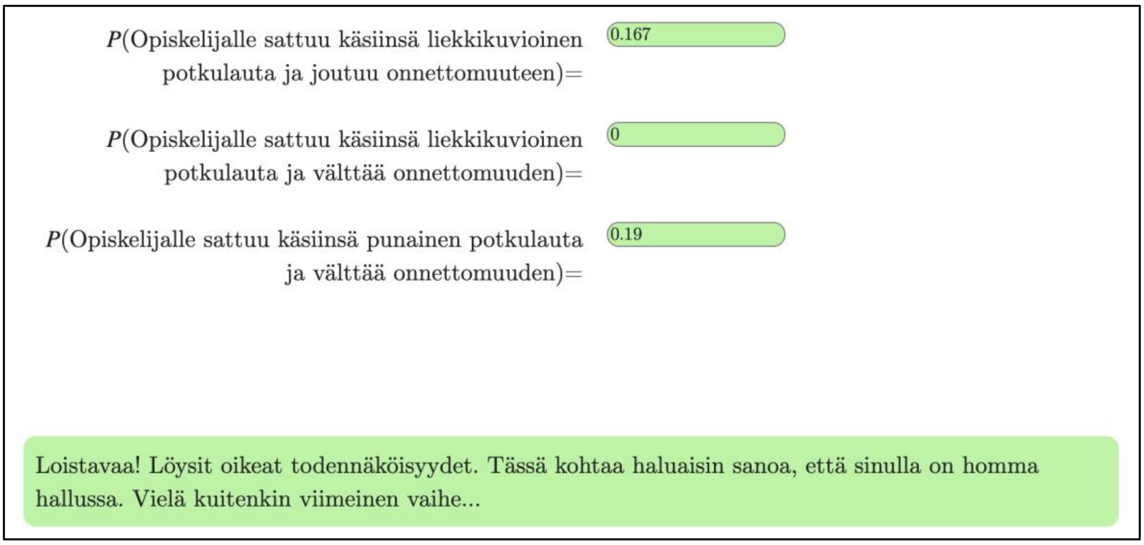
P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä punainen potkulauta ja välttää onnettomuuden)=

Hmm..miten puukuviosta voimmekaan päätellä todennäköisyyden jollekin esitetylle tapahtumalle?

Puukuviossa tietyn tapahtumaketjun toteutumisen todennäköisyys saadaan hyödyntämällä todennäköisyyslaskennan yleistä tulosääntöä. Joka on muotoa
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k)$
$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1})$
$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k.$

Loistavaa, toinen kohta on oikein!

Huomasithan, että punainen potkulauta voi päätyä käyttöön kahden eri tapahtumaketjun kautta; sekä yöllä että päivällä. Tässä voidaan käyttää hyväksi tietoa, että puukuvion eri pisteisiin vievät reitit ovat toisensa poissulkevia, jolloin voidaan hyödyntää toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä.

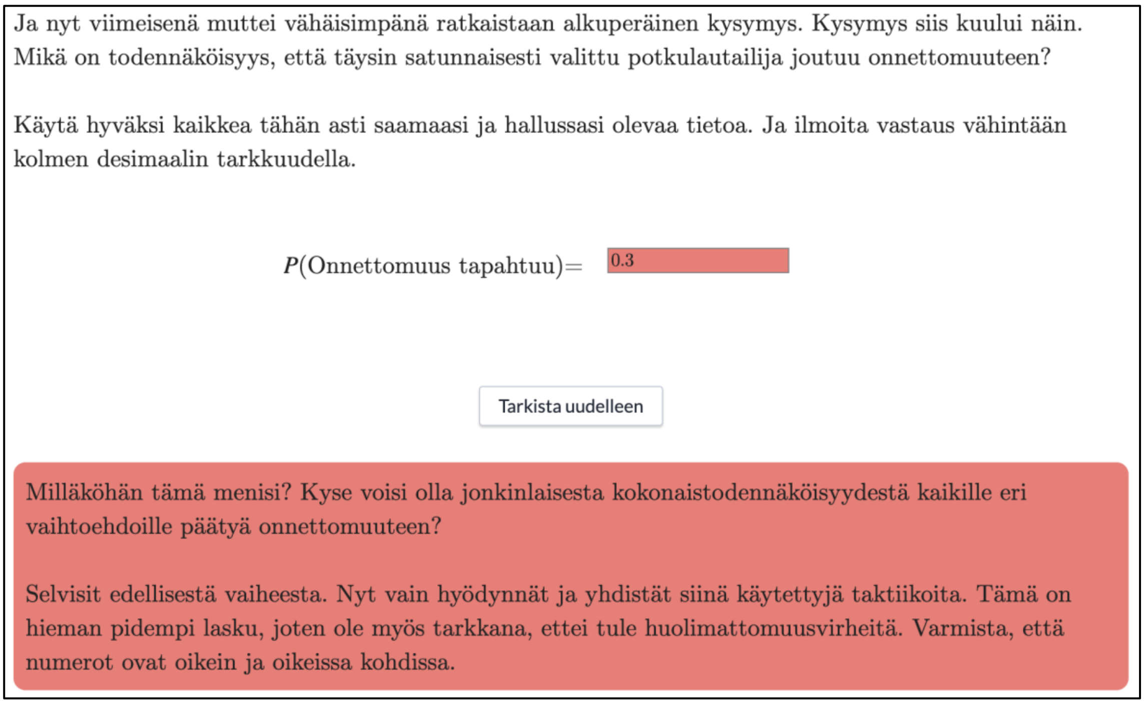

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja joutuu onnettomuuteen)= 0.167

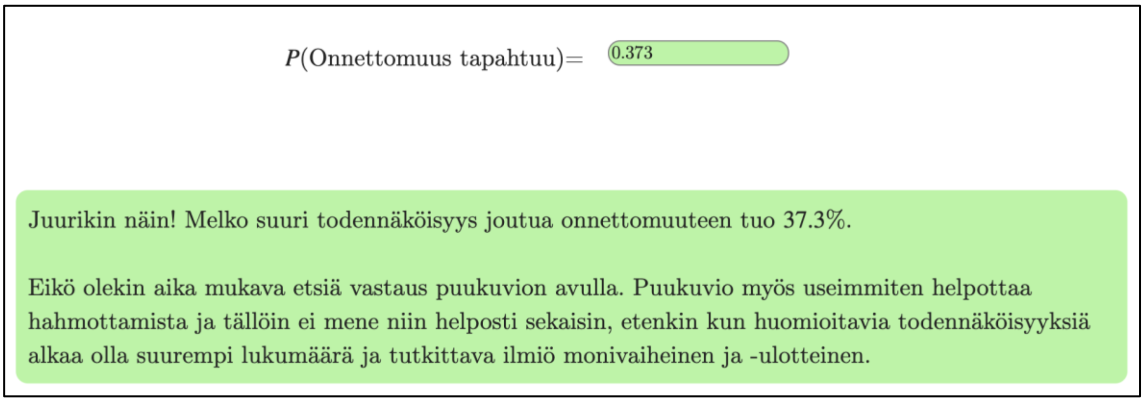
P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkikuvioinen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 0

P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä punainen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 0.19

Loistavaa! Löysit oikeat todennäköisyydet. Tässä kohtaa haluaisin sanoa, että sinulla on homma hallussa. Vielä kuitenkin viimeinen vaihe...

Tehtävän toiseksi viimeisessä vaiheessa lähdetään laskemaan todennäköisyyksiä puukuvion avulla. Laskeminen aloitetaan muutamasta helpommasta päättelystä, joiden avulla testataan samalla, miten hyvin opiskelija ymmärtää ja osaa soveltaa puukuvioon liittyviä laskusääntöjä. Mikäli puukuvion hyödyntäminen laskuissa on opiskelijalle tuttua, pääsee hän tässä vaiheessa melko helpolla eteenpäin. Toisaalta tämä ei ole vaatimuksena, sillä sähköiseen tehtävään on saatu laitettua väärän vastauksen viestiin opiskelijan suoriutumista tukevaa palautetta. Palautteella pyritään ohjaamaan opiskelijan huomio olennaisiin seikkoihin, jotka saattavat muutoin mennä opiskelijalta ohi ja aiheuttavat virheen vastauksiin. Lisäksi palautteessa tuodaan esiin laskusääntöjä, joita voidaan puukuvioissa hyödyntää. Palaute on annettu muodossa, jossa ei suoraan kerrota ”tee näin, niin saat oikein”, vaan muodossa, josta opiskelija joutuu itse pohtimaan annetun vihjeen tarkoitusta. Esimerkiksi näiden kysymysten kannalta olennainen laskusääntö on yleinen tulosääntö, joka yksinkertaisimmillaan kertoo, että eri tapahtumien todennäköisyydet kerrotaan keskenään. Tämä olisi liian suoraviivainen ja oppimisen näkökulmasta myös irrallinen vihje. Vihje on annettukin matemaattisessa muodossa, jolloin opiskelijan täytyy osata lukea matemaattista kieltä ja saada siitä tarvittava informaatio. Näin tuki ei ole liian suoraviivaista ja samalla harjoitetaan matemaattisen kielen lukemista ja tulkitsemista.





Tehtävän viimeisessä vaiheessa palataan alkuperäiseen, ensimmäisessä vaiheessa esitettyyn kysymykseen. Samalla vaiheen tarkoitus on vetää vielä lopuksi langat yhteen. Tässä vaiheessa kerrataan jo käytettyjä laskusääntöjä sekä opittuja tietoja yhdistämällä ja soveltamalla niitä. Lopussa pyritään vielä tiivistämään puukuvion käytön hyödyllisyyttä oikeissa tilanteissa ja kannustamaan opiskelijaa sen käyttöön jatkossakin.

6 POHDINTA

Tämän tutkielman tavoitteena oli selvittää kirjallisuuteen perustuen matematiikan sähköisten tehtävien etuja ja haasteita. Sähköiset tehtävät ja tvt:n hyödyntäminen osana opiskelua on ilmiö, joka on nykyään melkeinpä lähtökohtana. Tämän suuntauksen seurauksena tutkielma on aiheensa puolesta ollut erittäin mielekäs ja nykyiseen opetukseen sidottavissa oleva. Sähköisyyden lisääntyessä osana opiskelua on ensiarvoisen tärkeää myös keskittyä pohtimaan siihen liittyviä etuja sekä haasteita ja näin edelleen kehittää sähköisiä työkaluja ja niiden hyödyntämistapoja toimivammiksi. Lisäksi tutkielmassa tuotettiin ViLLE-järjestelmään sähköisiä tehtäviä, joissa tavoitteena oli ottaa huomioon kirjallisuudesta löydettyjä sähköisten tehtävien etuja. Tuotetut tehtävät on kohdistettu Turun yliopiston kurssille *Todennäköisyyslaskennan peruskurssi*. Kurssi on yliopiston perusopintotason kurssi, joka käsittelee todennäköisyyslaskentaa.

Tuotetuissa tehtävissä toistui selkeästi tietyt sähköisten tehtävien tuomat edut. Tehtävien toistettavuuden mielekkyys ja adaptiivinen palaute, jokaisesta tehtävän vaiheesta ovat ominaisuuksia, jotka ovat kaikissa tehtävissä. Nämä ominaisuudet on myös käytetyn sähköisen oppimisympäristön, ViLLEn, omia ominaisuuksia tai helposti sinne koodattavissa. Adaptiivinen palaute ja opiskelijan adaptiivinen ohjaus on myös useassa lähteessä todettu olevan sähköisten tehtävien valtti. Vaikka toistettavuus on tärkeä ominaisuus, voi se myös estää tehtävien pedagogisesti ideaalin suorittamisen. Opiskelijoiden jahdatessa vain pisteitä ViLLE-kierroksilta voivat he alkaa yrityksen ja erehdyksen avulla toistamaan tehtäviä, kunnes saavat ne oikein. Tätä suoritusmallia toki haastaa vaihtuvat arvot, mutta joissain tilanteissa se voi tarjota oikopolun pisteiden luo ja ohi oppimismahdollisuuksien ja syvällisemmän ymmärryksen.

Tutkielmaan laadittuja tehtäviä ideoidessa alustavat ajatukset sekä versiot tehtävistä olivat melko pitkiä. Ajatuksena oli luoda iso ja mielekäs kokonaisuus, joka kattavasti käsittelisi tiettyä todennäköisyyslaskennan aihepiiriä. Tehtävien toteuttaminen vaati tasapainon löytämistä sen suhteen, milloin tehtävät ovat sopivan pituisia. Tämä johti myös valintoihin sen suhteen, kuinka syvällisesti tai vaiheittain tiettyä asiaa tehtävässä pureskellaan. Osittain tehtävissä on jätetty sisältöä eri vaiheiden tehtävänannoista pois ja lisätty esimerkiksi vastauksista tulevaan palautteeseen. Tämän etuna on toisaalta se, että opiskelijoiden osaamistasot ovat erilaisia ja kaikki eivät hyödy tehtävän pilkkomisesta pieniksi ja asiaa perusteellisesti läpikäyviksi palasiksi.

Erilaisissa sähköisissä oppimisympäristöissä on erilaisia ominaisuuksia, jotka joko mahdollistavat tai rajaavat tiettyjä mahdollisuuksia toteutettavien tehtävien suhteen.

ViLLEssä tehtävien rakenne on kovakoodattu tietynlaiseksi, mikä mahdollistaa vain tietynlaisen suoraviivaisen etenemispolun tehtävissä. Toiveena olisi ollut toteuttaa myös tehtäviä, jotka olisivat olleet todella avoimia ja sisältäneet opiskelijan valintojen mukaisesti erilaisia etenemispolkuja. Tietyn opiskeltavan aihepiirin sisällä olisi voinut toteuttaa tehtävän, jossa opiskelija saa itse valinnoillaan vaikuttaa tapaan ratkaista tehtävä. Tavallisesti paperille tehtävää suoritettaessa opiskelija voi löytää hyvin omanlaisia tapoja päästä ratkaisuun, mutta ViLLEssä joka vaiheessa oleva vastauksen oikeellisuustarkastus rajoittaa vastauksen tietynlaiseksi eikä sitä voida jättää kovin avoimeksi. Näin ollen tämän tyyppisten tehtävien toteuttaminen ei ollut ViLLEssä mahdollista tai se olisi ollut koodaamisen kannalta todella työlästä ja haastavaa toteuttaa. Lisäksi kysymysvaihtoehtoja oli vain kolmenlaisia, mikä rajoitti mahdollisuuksia tuottaa monipuolisesti hyvin erilaisia kysymyksiä tehtäviin.

ViLLEssä käytettävä koodikieli on Maxima. Maxima-koodikielen käyttö ei ollut tutkielmaa aloittaessa juurikaan tuttu tutkielman tekijälle. Tämä tuotti osittain haasteita tehtävien toteuttamiseen, sillä koodikielen sanaston hallitsemisen puutteet rajasivat erilaisten mahdollisuuksien hahmottamista tai syntyneiden ideoiden toteuttamista. Lisäksi Maximaan ei ole olemassa helposti hallittavissa olevaa käyttöopasta tai koodikielisanastoa, joten toisinaan tehtävien tuottaminen ja oikeiden koodien ”keksiminen” tai virheiden löytäminen saattoi olla työlästä. Oletettavasti koodikielen parempi hallinta olisi mahdollistanut myös tehtävien ja kysymysten monipuolistamisen, jolloin ne olisivat voineet paremmin vastata sähköisten tehtävien mahdollistamiin etuihin.

Tässä tutkielmassa laaditut tehtävät painottuvat vahvasti todennäköisyyslaskentaan, vaikka kohdekurssin sisältöihin kuuluu myös tilastomatematiikan perusteita. Mikäli tutkielma olisi laajempi olisi ollut mielekästä tuottaa myös tehtäviä liittyen tilastomatematiikan sisältöihin ja pohtia niihin liittyvien erityispiirteiden perusteella sähköisten tehtävien etuja. Lisäksi olisi voinut pyrkiä tuottamaan tehtävä, jossa ensimmäisenä opiskelija saisi valita useammista ratkaisupoluista itselleen mieluisimman, jota seuraten opiskelija olisi toteuttanut tehtävän. Tämän kaltaisen tehtävän toistaminen useampaan kertaan olisi motivoivaa, koska joka kerralla voisi valita eri lähestymistavan, jota harjoitella. Kuitenkin tällainen tehtävä olisi ollut melko haastava ja työläs tuottaa ViLLE-järjestelmään. Tutkielman tehtävä *Rahapelejä osa 1* pyrkii mukailemaan tehtävää, jonka voi osittain suorittaa vaihtoehtoisilla ratkaisupoluilla.

Jatkossa olisi mielenkiintoista tutkia tässä tutkielmassa tuotettujen tehtävien ja täysin vastaavien tehtävien perinteisien versioiden tuottamia oppimistuloksien eroja. Sähköisten tehtävien ominaisuutena on usein oppimisanalytiikan keräyksen automaattisuus tai helppous, joten edellä mainitun kaltainen jatkotutkimus olisi myös suhteellisen helppo toteuttaa tämän tutkielman pohjalta. Oppimisanalytiikan keräyksen etuna olisi myös hyvät mahdollisuudet lähteä muokkaamaan tutkielman tehtäviä entistä toimivammiksi ja oppimista paremmin edistäviksi. Vastaavien perinteisten tehtävien suhteen muokkaustarpeiden löytäminen olisi huomattavasti haastavampaa.

LÄHTEET

Aksela, M., Kärnä, P. & Tikkanen, G. 2012. Mielekäs luonnontieteiden opetus: Miten tukea oppilaiden ajattelua ja ymmärtämistä? Teoksessa Houtsonen, L., Kärnä, P. & Tähkä, T. (toim.) Luonnontieteiden opetuksen kehittämishaasteita 2012. Opetushallitus: Juvenes Print, Tampere.

Applebaum, D. 2008. Probability and Information: An integrated approach. Cambridge: Cambridge University Press.

Baki, A., Güven, B., Özyurt, H. & Özyurt, Ö. 2014. The effects of UZWEBMAT on the probability unit achievement of Turkish eleventh grade students and the reasons for such effects. Computers & Education, Vol. 75, 1–18.

Bartlett, J. 2014. Becoming an outstanding mathematics teacher. London: Routledge.

Boaler, J. 2015. Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. New York: John Wiley & Sons Inc.

Brame, C. J. 2019. Science teaching essentials. *Short guides to good practice*. London: Academic Press.

Darwazeh, A. N. 2017. A new version of the [revised] Bloom's taxonomy. Distance Learning, Vol. 14 (3), 13–28.

Dos Satos Ferreira, R., Karrer, M. & Kataoka, V. Y. 2014. Teaching probability with the support of the R statistical software. Statistics Education Research Journal, Vol. 13 (2), 132–147.

Ghilay, Y. 2017. Online learning in higher education. New York: Nova science publishers, inc.

Gut, A. 2007. Probability: A Graduate Course (2nd Corr Printing). New York: Springer.

Hailikari, T., Lindblom-Ylänne, S. & Postareff, L. 2015. Oppiminen on monen tekijän summa. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 10.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Huotilainen, M. 2019. Näin aivot oppivat. Jyväskylä: PS-kustannus.

Joutsenlahti, J. & Tossavainen, T. 2018. Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 410–431.

Järvilehto, L. 2015. Opi pelaamalla. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 19.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Kaila, E. & Kurvinen, E. ViLLE. Opettajan kirja. Turku: ViLLE team. [Viitattu 2.10.2021] Saatavissa: https://ville.cs.utu.fi/doc/TheBookOfViLLE.pdf

Kangas, H., Kemppinen, S., Mäkelä, L., Pensar, H. & Tanskanen, J. 2021. Opetusalan ammattilaisten kokemuksia etätyöhön siirtymisestä COVID-19-pandemian vuoksi. Vaasan yliopiston raportteja, 19. Vaasan yliopisto.

Kinnari-Korpela, H. 2019. Enhancing learning in engineering mathematics education. Utilising educational techonology and promoting active learning. Tampere: Tampereen yliopisto

Kuosa, K., Pohjolainen, S. & Rasila, A. 2018. Matematiikan oppimisen tukeminen teknillisessä yliopistokoulutuksessa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 450–474.

Leppäaho, H. 2018. Ongelmanratkaisun opettamisesta. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 368–393.

Mellin, I. 2006. Todennäköisyyslaskenta: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt. Aalto yliopisto: Teknillinen korkeakoulu. [Viitattu 9.8.2021] Saatavissa: http://math.aalto.fi/opetus/sovtoda/oppikirja/TodLaskLaskusaannot.pdf

OECD 2015. Students, computers and learning: Making the connection. Paris: OECD Puplishing. [Viitattu 21.7.2021] Saatavissa: https://www.oecd-ilibrary.org/education/students-computers-and-learning_9789264239555-en

Opetushallitus 2019. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019. Helsinki [Viitattu 15.7.2021] Saatavissa: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

Opetus- ja kulttuuriministeriö 2017. Erityisavustus korkeakouluille korkeakoulutuksen kehittämiseen 2018-2020. Helsinki. [Viitattu 10.7.2021] Saatavissa: https://minedu.fi/-/korkeakoulutuksen-kehittamishankkeet

Oppimisanalytiikan keskus 2021. ViLLE. Turku: Turun yliopisto. [Viitattu 2.10.2021] Saatavissa: https://oppimisanalytiikka.fi/ville

Pfeiffer, P. 2009. Applied Probability. OpenStax CNX. [Viitattu 10.8.2021] Saatavissa: https://cnx.org/exports/1cb4ffaa-f24a-4b98-8e03-5dd217011f0c@6.2.pdf/applied-probability-6.2.pdf

Rohatgi, V. K. & Saleh, A. K. E. 2000. An introduction to probability and statistics. Second edition. John Wiley & Sons Inc.

Ruth, O. 2015. Ylioppilaskoe sähköistyy. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 19.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Sakomaa, V. 2015. Digitaaliset oppimateriaalit yläkoulussa – haasteita ja mahdollisuuksia. Teoksessa Kaisla, M., Kankaanranta, M. & Kutvonen-Lappi, T. (toim.) Digitaalinen oppimateriaali koulun arjessa. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino. [Viitattu 23.7.2021] Saatavissa: https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/47487/978-951-39-6229-6.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Sankila, T. 2015a. Oppimista muuttava teknologia. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 23.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Sankila, T. 2015b. Näkökulmia oppimisen digitalisoitumiseen. Teoksessa Kaisla, M., Kankaanranta, M. & Kutvonen-Lappi, T. (toim.) Digitaalinen oppimateriaali koulun arjessa. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino. [Viitattu 23.7.2021] Saatavissa:

https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/47487/978-951-39-6229-6.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Silfverberg, H. 2018. Tieto- ja viestintätekniikka matematiikan oppimisessa. Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 394–409.

Skorokhod, A. V. 2004. Basic Principles and Applications of Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag.

Toivola, M. 2018. Käänteinen oppiminen – kääntyykö koulutyö päälaelleen? Teoksessa Löytönen, M. & Tossavainen, T. (toim.) Sähköistyvä koulu. Oppiminen ja oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Suomen tietokirjailit ry. [Viitattu 20.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/julkaisut/verkkoon_sahkoistyva_koulu_2019_final_.pdf

Tossavainen, T. 2015a. Uutta ja vanhaa lukion matematiikan opetuksessa. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 15.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Tossavainen, T. 2015b. Tulevaisuuden oppimateriaalit. Teoksessa Löytönen, M., Rutanen, A. & Ruuska, H. (toim.) Laatua! Oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Kirjoittajat ja Suomen tietokirjailijat ry [Viitattu 19.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Tossavainen, T. 2019. Tulevaisuuden oppikirja – asiaproosaa vai automaattikaleidoskooppi? Teoksessa Löytönen, M. & Tossavainen, T. (toim.) Sähköistyvä koulu. Oppiminen ja oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä. Helsinki: Suomen tietokirjailit ry. [Viitattu 20.7.2021] Saatavissa https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/julkaisut/verkkoon_sahkoistyva_koulu_2019_final_.pdf

Turun yliopisto 2020. Opinto-opas 2020–2022. Matematiikan ja tilastotieteen perustutkintokoulutus. [Viitattu 17.10.2021] Saatavissa: https://opas.peppi.utu.fi/fi/opintojakso/TILM3553/1734?period=2020-2022

Yang, Y-Y. & Wu, S-W. Base rate neglect and neural computations for subjective weight in decision under uncertainty. PNAS: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 117 (29), 16908–16919.

Ylioppilastutkintolautakunta 2018. Tiedote matematiikan opettajille ja opiskelijoille. Matematiikan digitaalinen ylioppilaskoe. Helsinki. [Viitattu 15.7.2021] Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/matematiikka_tiedote_didigitaalin_koe.pdf

LIITTEET

Liite 1. BRF osa 1 lähdekoodit

Maximan globaalit alustuskutsut

```
samat(x, y) := is(equal(x ,y));
melkeinSamatT(x, y) := is(abs(x-y) < 0.000005);
melkeinSamat(x, y) := is(abs(x-y) < 0.001);
melkeinSamatP(x, y) := is(abs(x-y) < 1);
melkeinSamatPros(x,y) := is(abs(x-y) < 0.005);
a: (10+random(20))*50000;
b: (5+random(10))*10;
c: (15+random(10))*50;
d: 2+random(5);
pros(x) := x/100;
e: (25+random(10))*2;
f: 98+random(2);
g: 5+random(5);
h: 3+random(7);
popu: 1000;

prosos(x, y) := float(x/y);

ho: 99/100;
hi: 1/100;
haly: ho*b + hi*(a-b);
osa1: if prosos(b,haly)>0.025 then 3 elseif prosos(b,haly)>0.015 then 2
elseif prosos(b,haly)>0.005 then 1 else 0.5;
osa1k: 100-osa1;

humal: 1;
puhal: humal*1 + pros(d)*(c-1);
osa2: if prosos(1,puhal)>0.055 then 5 elseif prosos(1,puhal)>0.045 then 5
elseif prosos(1,puhal)>0.035 then 4 elseif prosos(1,puhal)>0.025 then 3
elseif prosos(1,puhal)>0.015 then 2 else 1;
so: 100-d;

q: prosos(b,haly);
```

? Vaihe 1 Kopioi

Tehtävän selite

Aloitetaan tehtäväkokonaisuus muutamalla mielenkiintoisella tosielämään perustuvalla pohdinnalla..

Kuvitellaan, että eräässä kaupungissa on <m>a</m> asukasta, joista <m>b</m> ovat ulkoavaruudesta tulleita olentoja. Olennot ovat aivan ihmisten näköisiä, mutta ikävä riesa keppostellessaan kaupungissa. Olentojen torjuntaa varten on otettu käyttöön kameravalvontajärjestelmä, jossa on kasvojentunnistusominaisuus. Valvontajärjestelmä hälyttää, mikäli kasvojentunnistus bongaa olennon. Aloitetaan perusarvoista. Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti kameran kohteeksi joutunut asukas

<center>(Anna vastaus viiden desimaalin tarkkuudella ja käytä desimaalierottimena pistettä)

Oikean vastauksen viesti

Hienoa! Perusasiat ovat kunnossa.

Väärän vastauksen viesti

Voi ei! Muistele klassisen todennäköisyyden määritelmää sekä satunnaistapahtuman todennäköisyyden laskemista. Ilmoititko vastauksen riittävällä tarkkuudella?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS0	on olento	melkeinSamatT(prosos(b,a),\UANS0)
UANS1	ei ole olento	melkeinSamatT(1-prosos(b,a),\UANS1)

Vaihe 2

Kopioi

Tehtävän selite

Olennon tunnistuksessa voi tapahtua 1% todennäköisyydellä virhe. Käytännössä tämä tarkoittaa, että kameran tulkitessa asukkaan olennoksi hälytys käynnistyy 99% varmuudella. Toisaalta jonkun muun asukkaan kuin olennon osuessa kameraan hälytys käynnistyy 1% kerroista.

Kuvitellaan nyt tilanne, että kameravalvontajärjestelmän hälytys käynnistyy. Millä todennäköisyydellä kameraan osunut asukas on olento ulkoavaruudesta?

Oikean vastauksen viesti

<ma>if melkeinSamatPros(prosos(b,haly),\UANS2) then "Hienoa! Tämä meni oikein." else "Tällä kertaa ei osunut oikeaan. Ei kuitenkaan syytä huoleen. Tässä tehtävän kohdassa hyväksytään kaikki vastaukset, jotta pääsemme tehtävässä eteenpäin." </ma>

Tähän kysymykseen oikea vastaus on luokkaa <m>osa1</m>%.

Suurin osa ihmisistä kuitenkin vastaa tähän kysymykseen 99%.

Pohdi omaa päättelyäsi, mihin perustat kirjoittamasi vastauksen?

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS2	<center>(Anna vastaus desimaalilukuna yhden prosentin tarkkuudella)	True

Vaihe 3

Kopioi

Tehtävän selite

Otetaan toinen esimerkki tosielämästä. Eräässä osavaltiossa yksi <m>c</m>:sta kuskista ajaa humalassa. Poliisit testaavat tieliikenteessä ajavien kuljettajien mahdollista rattijuoppoutta puhallustestillä. Testi onnistuu aina osoittamaan, mikäli kuljettaja on humalassa ajaessaan. Tästä huolimatta testeistä <m>d</m>% näyttää rattijuopumusta myös täysin selväpäisten kuskien kohdalla.

Oletetaan, että poliisi pysäyttää satunnaisen autoilijan puhalluttaaksen tämän. Testi osoittaa kuskin olevan humalassa. Millä todennäköisyydellä kuski todella on humalassa?

Oikean vastauksen viesti

<ma>if melkeinSamatPros(prosos(1,puhal),\UANS3) then "Loistavaa! Osuit oikeaan." else "Tällä kertaa vastauksesi ei ollut oikein. Tämä ei haittaa. Tässä vaiheessa kaikki vastaukset tulkitaan oikeiksi, jotta tehtävä etenee." </ma>

Vastasitko kenties <m>so</m>% tai <m>osa2</m>%? Suurin osa ihmisistä päättelee vastauksen tässä tapauksessa

 olevan <m>so</m>%, vaikka todellisuudessa se on vain <m>osa2</m>%.

Mihin arvoihin perustit päätelmäsi? Muistitko huomioida perusarvot?

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS3	<center>(Anna vastaus desimaalilukuna ja yhden prosentin tarkkuudella)	True

Vaihe 4

Kopioi

Tehtävän selite

Otetaan viimeinen tapaus, johon syvennymme hieman tarkemmin. Tuhannen ihmisen kaupungissa, Alphavillessä, on valloillaan C-virus. Viruksen saa <m>e</m>% kaupungin asukkaista. Torjunta- ja jäljitystoimenpiteenä kaupungin terveydenhuolto on kehittänyt kotitestin, joka tunnistaa <m>f</m>%:sesti oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös <m>g</m>%:lla terveistä ihmisistä.

Kaupungin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee päättää tehdä kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on C-virus?

Oikean vastauksen viesti

<ma>if melkeinSamatPros((popu*pros(e)*pros(f))/(popu*pros(e)*pros(f)+popu*(1-pros(e))*pros(g)),\UANS4) then "Erinomaista! Tämä meni nappiin." else "Hmm. Nyt ei mennyt vastaus nappiin. Tämä tehtävän vaihe kuitenkin hyväksyy kaikki vastaukset, jotta tehtävässä kuljetaan eteenpäin." </ma>

Miten päättelit vastauksesi? Oliko vastauksesi kenties lähimpänä 0%, 50% vai 100%?

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS4	<center>(Anna vastaus desimaalilukunu ja yhden prosentin tarkkuudella)	True

Vaihe 5

Kopioi

Tehtävän selite

Alphavillestä 250km länteen on toinen tuhannen asukkaan kaupunki, Beetatown. C-virus leviää myös sinne, mutta Beetatownin asukkailla on huomattavasti parempi vastustuskyky. Ainoastaan <m>h</m>% asukkaista sairastuvat C-virukseen. Beetatownissa kehitetään myyntiin kotitesti, joka on hämmästyttävän samanlainen kuin Alphavillessä. Beetatownin kotitesti tunnistaa <m>f</m>%:sesti oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös <m>g</m>%:lla terveistä ihmisistä.

Beetatownin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on C-virus?

Oikean vastauksen viesti

<ma>if melkeinSamatPros((popu*pros(h)*pros(f))/(popu*pros(h)*pros(f)+popu*(1-pros(h))*pros(g)),\UANS5) then "Hyvää työtä! Sait vastauksen aivan oikein." else "Tällä kertaa vastauksesi ei osunut oikeaan. Tässä vaiheessa kuitenkin kaikki vastaukset hyväksytään oikeina." </ma>

Eikö kotitestin oikeellisuuden pitäisi olla samaa luokkaan kuin Alphavillessä? Vai eikö? Testin pitäisi edelleen antaa positiivinen tulos myös <m>g</m>%:lla terveistä ihmisistä. Hetkinen...

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS5	<center>(Anna vastaus desimaalilukuna ja yhden prosentin tarkkuudella)	True

Vaihe 6

Kopioi

Tehtävän selite

Tutkitaan C-virus tapauksia hieman tarkemmin, jotta saamme konkreettisia lukuarvoja päättelymme tueksi. Aloitetaan laskemalla Alphavillen perusarvot ja niiden avulla edelleen kotitestin positiivisen tuloksen oikeellisuus. Olennaista on huomioida tilanteen perusarvot, jotka ovat tässä tapauksessa populaation koko, viruksen tarttumisen todennäköisyys sekä näistä lasketut positiivisten testitulosten lukumäärien odotusarvot.

Voit ilmoittaa kahden ensimmäisen kohdan vastaukset kokonaislukuna.

Oikean vastauksen viesti

Hienoa! Näin saimme määritettyä kotitestin positiivisen tuloksen paikkaansa pitävyyden Alphavillessä. Saitko aiemmin päättelystäsi saman lopputuloksen Alphavillen tapaukselle? Kotitestin tuloksen voidaan todeta olevan hyvin luotettava.

Väärän vastauksen viesti

Hmmm...muistele prosenttilaskujen kaavoja. Huomasithan, että tässä lasketaan Alphavillen arvoja.

<ma>if melkeinSamatP(popu*pros(e)*pros(f),\UANS6) then "Hienoa, eka meni oikein" else "Voi voi, eka meni väärin"</ma>

<ma>if melkeinSamatP(popu*(1-pros(e))*pros(g),\UANS7) then "Hienoa, toinen kohta on oikein" else "Muistitko huomioida toisessa kohdassa mistä populaation osasta virheellinen positiivisuus lasketaan?"</ma>

<ma>if melkeinSamat((popu*pros(e)*pros(f))/(popu*pros(e)*pros(f)+popu*(1-pros(e))*pros(g)), \UANS8) then "Hyvin laskettu" else "Viimeisen kohdan pitäisi mennä klassisen todennäköisyyden laskukaavalla. Mitä populaatioita verrataan keskenään kun lasketaan testin oikeellisuuden todennäköisyyttä? Laskitko tarkoilla arvoilla?"</ma>

Todennäköisyys tulee ilmoittaa vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS6	\$E\$(Oikeiden positiivisten tulosten lukumäärä)=	melkeinSamatP(popu*pros(e)*pros(f),\UANS6)
UANS7	\$E\$(Virheellisten positiivisten tulosten lukumäärä)=	melkeinSamatP(popu*(1-pros(e))*pros(g),\UANS7)
UANS8	Mikä on näistä laskettu todennäköisyys, että testitulos on oikein?	melkeinSamat((popu*pros(e)*pros(f))/(popu*pros(e)*pros(f)+popu*(1-pros(e))*pros(g)), \UANS8)

Vaihe 7

Kopioi

Tehtävän selite

Lasketaan seuraavaksi vastaavat arvot Beetatownin tapauksessa.

Oikean vastauksen viesti

Loistavaa! Näin saimme määritettyä kotitestin positiivisen tuloksen paikkaansa pitävyyden vastaavasti Beetatownille. Saitko aiemmin päättelystäsi saman lopputuloksen? Testitulos ei Beetatownissa olekaan enää lainkaan niin luotettava, vaan itseasiassa positiivisen tuloksen kohdalla onkin todennäköisempää ettei testitulos pidä paikkaansa kuin että se pitäisi paikkaansa.

Mistä erot kaupunkien välillä sitten johtuvat?

Saatoitkin jo arvata...perusarvoista. Tartunnan todennäköisyys ja näin ollen sairastuneiden asukkaiden lukumäärät erosivat kaupunkien välillä. Tämä aiheuttaa virheellisen positiivisen tuloksen todennäköisyyden tulkintaan merkittävän eron. Usein omassa päättelyssämme sivuutamme perusarvot kun saamme jotain mielenkiintoisempaa tai "olennaisempaa" informaatiota, kuten tässä tapauksessa virheellisen positiivisuuden todennäköisyyden arvon <m>g</m>%. Unohdamme, että se on on vain suhdeluku, jonka todellinen vaikutus määräytyy perusarvojen perusteella.

Tämä tehtäväkokonaisuus jatkuu seuraavassa ViLLe-tehtävässä: BRF Osa 2

Väärän vastauksen viesti

Tapahtuiko kenties huolimattomuusvirhe? Osuivatko kaikki numerot oikeille paikoille? Arvot löytyvät samalla prosessilla kuin Alphavillen kohdalla.

<ma>if melkeinSamat((popu*pros(h)*pros(f))/(popu*pros(h)*pros(f)+popu*(1-pros(h))*pros(g)), \UANS11) then "Hyvin laskettu" else "Muistithan laskea viimeisen kohdan tarkoilla arvoilla, vaikka olisit ilmoittanut aiemmat kohdat kokonaislukuna."</ma>

Todennäköisyys tulee tässäkin ilmoittaa vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

☐ Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)	+
UANS9	E(Oikeiden positiivisten tulosten lukumäärä)=	melkeinSamatP(popu*pros(h)*pros(f),\UANS9)	
UANS10	E(Virheellisten positiivisten tulosten lukumäärä)=	melkeinSamatP(popu*(1-pros(h))*pros(g),\UANS10)	
UANS11	Mikä on näistä laskettu todennäköisyys, että testitulos on oikein?	melkeinSamat((popu*pros(h)*pros(f))/(popu*pros(h)*pros(f)+popu*(1-pros(h))*pros(g)), \UANS11)	

Liite 2. BRF osa 2 lähdekoodit

Maximan globaalit alustuskutsut

```
samat(x, y) := is(equal(x ,y));
melkeinSamat(x, y) := is(abs(x-y) < 0.001);
a: (10+random(12))*50;
b: (1+random(19))*5;
c: 3+random(7);
d: 100;
desim(x):= x/100.0;
koktod: desim(d)*desim(b) + desim(c)*desim((100-b));
bayes: (desim(d)*desim(b))/koktod;
```

Vaihe 1

Kopioi

Tehtävän selite

Tässä osassa tehtäväkokonaisuutta laskemme edellisen osan virustehtävää mukailevan tilanteen käyttäen todennäköisyyslaskennan lauseita ja sääntöjä välttääksemme perusarvojen sivuuttamisesta aiheutuvat tulkintavirheet.

Kerrataan tilanne. Kaupungissa on <m>a</m> asukasta, joista <m>b </m>% saa valloilla olevan viruksen. Torjunta- ja jäljitystyoimenpiteenä kaupungin terveydenhuolto on kehittänyt kotitestin, joka tunnistaa aina oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös <m>c </m>%:lla terveistä ihmisistä.

Kaupungin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee päättää tehdä kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on virus?

Tehtävän selite

Kerrataan tilanne. Kaupungissa on <m>a</m> asukasta, joista <m>b </m>% saa valloilla olevan viruksen. Torjunta- ja jäljitystyoimenpiteenä kaupungin terveydenhuolto on kehittänyt kotitestin, joka tunnistaa aina oikein tartunnan saaneen ihmisen, mutta antaa positiivisen tuloksen myös <m>c </m>%:lla terveistä ihmisistä.

Kaupungin asukas havaitsee kärsivänsä virukselle tyypillisiä oireita ja tekee päättää tehdä kotitestin. Hän saa positiivisen tuloksen. Kuinka suurella todennäköisyydellä hänellä oikeasti on virus?

Mitä seuraavista todennäköisyyslaskennan lauseista voisimme parhaiten soveltaa tässä tapauksessa tehtävän ratkaisuun?

Oikean vastauksen viesti

Kyllä vain! Lähdetäänpä laskemaan.

Väärän vastauksen viesti

Voi ei! Mietitään vielä uudestaan..liittyisikö ehdollisuus jollain tavalla sopivasti tähän tematiikkaan?

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS0	Bayesin kaava	True
UANS1	Järjestämätön otanta	False
UANS2	Kokonaistodennäköisyyden kaava	False

? Vaihe 2

Kopioi

Tehtävän selite

Muistin virkistämiseksi: kun selvitetään A_i ehdollista todennäköisyyttä ehdolla B Bayesin kaava näyttää tältä: $ P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)}$.

Käytetään tässä kyseisessä tapauksessa seuraavia merkintöjä: V="henkilöllä on virus", T="henkilö on terve", Pos="testitulos positiivinen" ja Neg="testitulos negatiivinen".

Mitä meidän tulee tehtävänannosta poimia tai muutoin selvittää etukäteen, jotta voimme käyttää Bayesin kaavaa ja selvittää positiivisen testin paikkaansapitävyyden?

Oikean vastauksen viesti

Loistavaa! Näistä osan saa suoraan tehtävänannosta tai jo annetuista arvoista helposti pääteltyä.

Väärän vastauksen viesti

Hmmm..tutki Bayesin kaavaa ja pohdi, mitä arvoja tarvitset sen käyttämiseen.

<ma> if \UANS6 or \UANS8 or \UANS9 or \UANS10 then "Huomasithan, että nyt tutkittavana on vain positiivisen testin saaneet, eikä terveitäkään tarvitse ottaa tässä kohtaa huomioon." else "Olet oikeilla jäljillä! Huomioitavana on tässä kohtaa siis vain positiivisen testituloksen saaneet ja viruksen omaavat henkilöt. Muistihan ottaa mukaan myös ehdollisen todennäköisyyden." </ma>

Kysymyksen tyyppi

Valitse monta

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS3	$p(Pos\|V)$	True
UANS4	$p(V)$	True
UANS5	$p(Pos)$	True
UANS6	$p(Pos\|T)$	False
UANS7	$p(V\|Pos)$	False
UANS8	$p(T\|Pos)$	False
UANS9	$p(Neg)$	False
UANS10	$p(T)$	False

Vaihe 3

Kopioi

Tehtävän selite

Noniin, eteenpäin seuraavaan vaiheeseen. Päätellään nyt Bayesin kaavaan tarvittavat arvot. Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella.

Oikean vastauksen viesti

Vihreää valoa, ja eteenpäin!

<ma>if melkeinSamat(koktod,\UANS13) then "Sait kokonaistodennäköisyyden $p(Pos)$ laskettua oikein." else "Hhmm. Kokonaistodennäköisyys $p(Pos)$ ei ollut aivan oikein, mutta ei syytä huoleen. Tässä kohtaa kokonaistodennäköisyyden arvoksi hyväksyttiin mikä tahansa arvo."</ma>

Käydään vielä seuraavaksi kertauksenomaisesti läpi kokonaistodennäköisyyden laskeminen. Tässä tehtävässä $p(Pos)$ on kokonaistodennäköisyys sille, että ihminen ylipäätään saa positiivisen testituloksen.

Väärän vastauksen viesti

Ei syytä huoleen, mieti uudestaan! Älä anna merkintöjen $p(Pos|V)$ ja $p(V)$ sekoittaa sinua. Pohdi tarkkaan, mitä niillä tarkoitetaan. Mitä kuvaa todennäköisyys $p(Pos)$?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS11	$p(Pos\|V)=$	samat(desim(d),\UANS11)
UANS12	$p(V)=$	samat(desim(b),\UANS12)
UANS13	$p(Pos)=$	True

Vaihe 4

Kopioi

Tehtävän selite

Harvemmin kokonaistodennäköisyyttä tietylle tapahtumalle annetaan suoraan tehtävänannossa, joten kerrataan tässä pikaisesti kokonaistodennäköisyyden laskeminen.

Valitse seuraavista vaihtoehdoista kaava, jolla saadaan laskettua kokonaistodennäköisyys $p(Pos)$.

Oikean vastauksen viesti

Juurikin näin! Tuolla kaavalla saamme laskettua kokonaistodennäköisyyden $p(Pos)$, jota tarvitaan tässä tehtävässä Bayesin kaavassa.

Väärän vastauksen viesti

Hmmm..tarkistitko, miten kokonaistodennäköisyys laskettiinkaan tämänkaltaisessa tapauksessa?

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS14	<center>$p(Pos)=p(Pos\|V)p(V)+p(Pos\|T)p(T)$	True
UANS15	<center>$p(Pos)=p(V\|Pos)p(V)+p(T\|Pos)p(T)$	False
UANS16	<center>$p(Pos)=p(Pos\|V)p(Pos)+p(Pos\|T)p(Pos)$	False
UANS17	<center>$p(Pos)=p(Pos\|V)p(V)+p(Pos\|T)p(V)$	False
UANS18	<center>$p(Pos)=p(V)p(Pos\|V)+p(T)p(Pos\|T)$	True
UANS19	<center>$p(Pos)=p(T\|V)p(V)+p(V\|T)p(T)$	False

? Vaihe 5

Kopioi

Tehtävän selite

Lasketaan nyt vielä kokonaistodennäköisyydelle $p(Pos)$ lukuarvo, ja verrataan sitä aiemmin ilmoittamaasi arvoon.

Oikean vastauksen viesti

Hienoa! Olitko saanut tämän jo aiemmin oikein? Mikäli olit, voit taputtaa itseäsi olkapäälle onnistumisesta!

Väärän vastauksen viesti

Nyt tarkoituksena olisi siis syöttää tehtävänannosta saatavat lukuarvot aiemmin valitsemaasi kokonaistodennäköisyyden kaavaan.

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS20	$p(Pos)$=	melkeinSamat(koktod,\UANS20)

Vaihe 6

Kopioi

Tehtävän selite

Nyt voimme käyttää Bayesin kaavaa saadaksemme selville, kuinka suurella todennäköisyydellä ihmisellä on virus testin näyttäessä positiivista.

Oikean vastauksen viesti

Mahtavaa! Pääsit maaliin.

Meillä on siis useampia tapoja löytää oikean ratkaisun äärelle. Tämän tehtäväkokonaisuuden tarkoitus oli saada sinut huomaamaan, miten vain nojautuen omaan intuitioomme sekä päättelyymme saatamme toisinaan todennäköisyyksien tapauksessa helposti kompastua. Baeysin kaavan soveltaminen on tämän kaltaisissa tehtävissä usein turvallisin tapa päästä virheittä maaliin.

Mikäli haluat lisätä ymmärrystäsi asiasta, pohdi vielä, mitä eroa ja yhtäläistä käytännön tasolla on osassa 1 käytetyllä tavalla laskea testituloksen oikeellisuutta verrattuna tässä käytettyyn Bayesin kaavan hyödyntämiseen.

Väärän vastauksen viesti

Tässä kohtaa ollaan niin hyvin jo valmistauduttu, ettei tarvitse kuin hakea aiemmista vaiheista sopivat lukuarvot ja syöttää ne Bayesin kaavaan. Tarkkuutta! Ja oliko vastauksessasi tarpeeksi tarkkuutta?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS21	$p(V\|Pos)=$	melkeinSamat(bayes,\UANS21)

Liite 3. Rahapelejä osa 1 lähdekoodit

Maximan globaalit alustuskutsut

```
samat(x, y) := is(equal(x ,y));
melkeinSamat(x, y) := is(abs(x-y) < 0.001);

p12: 1/3;
p3456: 2/3;
a: (4+random(5))*0.25;
b: a-(2+random(3))*0.25;
odota: p12*a;
odotb: p3456*b;
odotk: odota + (odotb*(-1));
```

Vaihe 1

Kopioi

Tehtävän selite

Tässä tehtäväkokonaisuudessa pelataan muutamia rahapelejä ja tutkitaan niihin liittyviä todennäköisyyslaskennan sääntöjä ja ominaisuuksia.

Aloitetaan noppapelistä. Hämärän näköinen tyyppi ehdottaa sinulle loistavaa mahdollisuutta voittaa rahaa kuusisivuista noppaa heittämällä. Säännöt ovat yksinkertaiset:

-Saat heittää noppaa kerran

-Mikäli silmäluvuksi tulee 1 tai 2, saat voittona <m>a</m>€

-Mikäli silmäluvuksi tulee jokin muu, joudut maksamaan <m>b</m>€

Pohdit hetken tarjousta ennen kuin teet päätöksen...

Oikean vastauksen viesti

<ma>if odota>odotb then "Hyvin valittu! Varallisuutesi kasvoi juuri. Menikö tämä tuurilla vai osaisitko perustella valintasi?" elseif odota=odotb then "Väitän sinulle, että tällä asetelmalla molemmat vaihtoehdot ovat yhtä hyviä tai huonoja. Miten sinä päädyit valitsemaan juuri tämän vaihtoehdon?" else "Hienoa! Rahasi ovat turvassa. Vastasitko arpomalla vai osaisitko perustella valintasi?"</ma>

Väärän vastauksen viesti

<ma>if \UANS0 then "Nyt sinua viilattiin linssiin..voit sanoa hyvästi rahoillesi :(Otappa joku toinen." else "Hmm. Nyt olisi kyllä ollut oiva tilaisuus kasvattaa varallisuuttasi. " </ma>

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS0	Kannattaa pelata	if odota>odotb then True elseif odota=odotb then True else False
UANS1	Kannattaa jättää välistä	if odota<odotb then True elseif odota=odotb then True else False

Vaihe 2

Kopioi

Tehtävän selite

<ma>if odota>odotb then "Yritetäänpä seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi tähän peliin kannattaa tarttua, jos haluaa rikastua. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen." elseif odota=odotb then "Yritetäänpä seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi valinnalla pelata tai olla pelaamatta ei ole loppujen lopuksi mitään merkitystä. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen. " else "Yritetäänpä seuraavaksi osoittaa matematiikan avulla, miksi tähän peliin ei kannata tarttua. Lähdetään liikenteeseen selvittämällä, minkälainen summa pelistä olisi odotettavissa yhden kierroksen jälkeen"</ma>

Oikean vastauksen viesti

<ma> if \UANS2 < 0 then "Hienoa! Huomaamme nyt, että pelattuasi yhden kierroksen tätä peliä odotuksena on, että jäät lievästi häviölle. " elseif \UANS2 = 0 then "Hienoa! Huomaamme nyt, että pelatessasi tätä peliä odotuksena on, että et voita etkä häviä rahaa." else "Hienoa! Huomaamme nyt, että pelattuasi yhden kierroksen tätä peliä odotuksena on, että jäät lievästi voitolle."</ma>

Väärän vastauksen viesti

Aijai, nyt taisi tulla joku moka. Muistatko miten odotusarvo laskettiin? Ilmoititko vastauksen riittävällä tarkkuudella?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS2	E(Yhden kierroksen tulos)=	melkeinSamat(odotk,\UANS2)

Vaihe 3

Tehtävän selite

<ma>if odota>odotb then "Mutta hetkinen, mitäpä jos peliä pelaisi todella monta kierrosta? Kääntyisikö peli kuitenkin jossain kohtaa tappioksesi? Mitä tuumit?" elseif odota=odotb then "Mutta hetkinen, mitäpä jos peliä pelattaisiin vain yksi kierros? Tulisiko tällöin lopputulokseksi 0€?" else "Mutta hetkinen, mitäpä jos koetta toistaisi useamman kerran? Kääntyisikö se loppujen lopuksi voitoksesi? Mitä tuumit? " </ma>

Oikean vastauksen viesti

<ma>if odota>odotb then "Juurikin näin! Tässä pelissä edellinen nopan heitto ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen, joten odotusarvo säilyy samana. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää." elseif odota=odotb then "Juuri näin! Yhden kierroksen tulos olisi tietysti pelin selostuksessa esitetty voitto tai vaihtoehtoisesti häviämisestä aiheutuva maksu. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää." else "Juurikin näin! Tässä pelissä edellinen nopan heitto ei vaikuta seuraavan heiton tulokseen, joten odotusarvo säilyy samana. Pelin lopputulos lähestyy odotusarvoa pelattavien kierrosten lähestyessä äärettömän suurta lukumäärää." </ma>

Väärän vastauksen viesti

Nyt taisi mennä metsään...

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS3	<ma>if odota>odotb then "Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy vähintään yhtä onnekkaana toistojen lisääntyessä." elseif odota=odotb then "Ei tietenkään." else "Älä yritä hämätä. Tilanne pysyy yhtä onnettomana toistojen lisääntyessä. " </ma>	True
UANS4	<ma>if odota>odotb then "Pelkään pahoin, että tilanne saattaa muuttua onnettomammaksi pelin jatkuessa." elseif odota=odotb then "Kyllä näin on." else "Uskoisin, että lopputulos muuttuu toistojen myötä paremmaksi. "</ma>	False

Vaihe 4

Kopioi

Tehtävän selite

Testataan vielä lopuksi taitojasi yhden paradoksin avulla.

Sinulle annetaan kaksi identtistä suljettua kirjekuorta. Toisessa kuoressa on kaksinkertainen rahasumma toiseen verrattuna. Saat avata haluamasi kuoren kahdesta vaihtoehdosta ja nähdä sisällön. Tämän jälkeen, reiluuden nimissä, sinulle tarjotaan mahdollisuutta joko pitää avaamasi kuoren rahat tai vaihtaa toiseen kuoreen ja pitää sen sisältämä rahasumma. Miten valitset?

Oikean vastauksen viesti

<ma>if \UANS5 then "Teit oivan valinnan. Ainakin matemaattisesti ajateltuna on fiksumpaa vaihtaa kirjekuorta. Tämän saa pääteltyä helposti odotusarvoja laskemalla." else "Voi olla, että valitsit kirjekuoren, jossa on enemmän rahaa. Toisaalta tyydyitkö kuitenkin kirjekuoreen, jossa on vähemmän rahaa? Joka tapauksessa matemaattisesti tarkasteltuna olisi kuitenkin ollut fiksumpaa vaihtaa kirjekuorta. Odotusarvot paljastavat..." </ma>

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS5	Vaihdan kirjekuoren.	True
UANS6	En vaihda kirjekuorta.	True

Vaihe 5

Tehtävän selite

Lasketaan odotusarvot. Käytetään ensin valitun kirjekuoren rahasummalle merkintää "x". Näin ollen...

Oikean vastauksen viesti

Hienoa! Näin me huomaamme, että matemaattisesti vaihtaminen tosiaan kannattaa.

Väärän vastauksen viesti

Hmm..miten laskettiin odotusarvoja?

Muistitko merkata vastauksessa kaikki yhteen? Vaihtoehtoisesti voit myös käyttää kertomerkkiä painamalla näppäimistöstä "*".

Vaihdetun kirjekuoren tapauksessa, pohdi montako erilaista vaihtoehtoa on olemassa kirjekuoren sisällölle. Entä mitkä ovat niiden vaihtoehtojen arvot ja todennäköisyydet?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS7	E(Rahasumma, jos kuorta ei vaihdeta)=	samat(x,\UANS7)
UANS8	E(Rahasumma, jos kuori vaihdetaan)=	samat(1.25*x,\UANS8)

Vaihe 6

Kopioi

Tehtävän selite

Missä nyt siis syntyy paradoksi? Eikö tässä tullut jo selkeästi esille, että vaihtaminen kannattaa aina?

Merkitään nyt vaihdon jälkeen kädessäsi olevan kirjekuoren sisältämää rahasummaa merkinnällä "y" ja päätellään samoin kuin edellä. Kannattaako sinun pitää kädessäsi oleva kirjekuori vai vaihtaa se (alkuperäiseen)? Mikä on tällöin odotusarvo vaihdolle toiseen (alkuperäiseen) kirjekuoreen?

Oikean vastauksen viesti

Ja näin päädymme paradoksiin. Vaihtaminen kannattaisi siis aina eikä kukaan halua viettää koko loppu elämäänsä vain vaihtaen kirjekuori valintaansa edestakaisin.

Miten tämä sitten ratkaistaan? Kumpi oikeasti olisi fiksumpi vaihtoehto: pysyä valinnassa vai vaihtaa? Siinäpä pähkinä purtavaksi!

Väärän vastauksen viesti

Pohdi vielä. Tämä menee täysin samalla tavalla kuin edellinen, vain rahasummalle käytettävä muuttuja vaihtui.

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS9	E(Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan)$=y$	False
UANS10	E(Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan)$=\frac{y}{2}$	False
UANS11	E(Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan)$=\frac{3}{4}y$	False
UANS12	E(Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan)$=\frac{5}{4}y$	True
UANS13	E(Rahasumma, jos kirjekuori vaihdetaan)$=2y$	False

Liite 4. Rahapelejä osa 2 lähdekoodit

Maximan globaalit alustuskutsut

```
samat(x, y) := is(equal(x ,y));
melkeinSamat(x, y) := is(abs(x-y) < 0.001);
a: 0.5;
b: 1;
c: 1.5;
d: 2;
e: 2.5;
f: 3;
k0: 0;
k1: 1;
k2: 2;
k3: 3;
k4: 4;
k5: 5;
k6: 6;
tod(x, y) := x/y;
lkm(x) := 2^x;
odot(x, y) := x*y;
todsivu: 1/6;
```

Vaihe 1

Kopioi

Tehtävän selite

Edellisen osion rahapelistä innostuneena päätät alkaa itse huijaamaan hyväuskoisia uhkapelureita. Suunnittelet pelin, jossa heitetään ensin tavallista kuusi tahkoista arpakuutiota. Arpakuution silmäluku kertoo kuinka monta 1€ kolikkoa annat pelaajalle heitettäväksi. Mikäli pelaaja kolikkoa heittäessä saa kruunan, saa hän pitää kolikon itsellään. Mikäli kolikko kääntyy klaavan puolelle, jää kolikko pelin järjestäjälle eli sinulle.

Ainut pohdittava asia on enää kuinka suuri summa asetetaan yhden pelikierroksen hinnaksi. Et tietenkään halua hävitä, mutta haluat tehdä pelistä mahdollisimman houkuttelevan. Mikä alla olevista summista sopisi mielestäsi parhaiten yhden kierroksen hinnaksi?

Pohdi tarkkaan, sillä tämä valinta vaikuttaa tulevaisuutesi.

Oikean vastauksen viesti

Lukitaan se! Toivottavasti valitsit hyvin. Lähdetään nyt pohtimaan, minkälaista tulosta tällä pelillä onnistut tekemään kun yhden kierroksen hintana on yllä valitsemasi arvo.

Väärän vastauksen viesti

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

- [ ] Näytä vastauksen tulkinta
- [x] Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS0	<m>a</m>€	True
UANS1	<m>b</m>€	True
UANS2	<m>c</m>€	True
UANS3	<m>d</m>€	True
UANS4	<m>e</m>€	True
UANS5	<m>f</m>€	True

? Vaihe 2

Kopioi

Tehtävän selite

Noniin, nyt kun hinta bisnekselle on selvillä voisimme vielä pohtia, miten hyvä hinta se todellisuudessa on. Selvitetään siis onko valitsemasi hinta pelille sopiva suhteutettuna pelin odotusarvoon.

Lähdetään liikkeelle siitä, että lasketaan odotusarvot tilanteille, joissa on eri määrä kolikoita heitettävänä.

Oikean vastauksen viesti

Loistavaa, perusasiat tuntuvat olevan hallussa!

Laskitko jokaisen kohdan alusta uudelleen ja erikseen vai löysitkö laskujesi aikana tavan yksinkertaistaa laskujasi hyödyntämällä jo saamiasi vastauksia?

Väärän vastauksen viesti

Odotusarvoja haetaan. Aloitetaan yksinkertaisimmasta eli yhden kolikon tapauksesta ja käytetään laskukaavaa $E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i p_i $.

<ma>if samat(odot(k0,tod(binomial(1,0),lkm(k1)))+odot(k1,tod(binomial(1,1),lkm(k1))),\UANS6) then "Hienoa, ensimmäinen on oikein!" else "Yhden kolikon tapauksessa erilaisia lopputuloksia on kaksi erilaista ja niiden tulokset on joko 0€ tai 1€. Sinun täytyy vielä pohtia vaihtoehtojen todennäköisyydet, jotta voit päätellä odotusarvon"</ma>

<ma>if samat(odot(k0,tod(binomial(2,0),lkm(k2)))+odot(k1,tod(binomial(2,1),lkm(k2)))+odot(k2,tod(binomial(2,2),lkm(k2))),\UANS7) then "Toinen kohta on oikein. Jatka samaan malliin!" else "Kahden kolikon tapauksessa vaihtoehtojen määrä eri lopputuloksille kasvaa. Mutta millä tavalla?"</ma>

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS6	E(Voittosumma yhtä kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(1,0),lkm(k1)))+odot(k1,tod(binomial(1,1),lkm(k1))),\UANS6)
UANS7	E(Voittosumma kahta kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(2,0),lkm(k2)))+odot(k1,tod(binomial(2,1),lkm(k2)))+odot(k2,tod(binomial(2,2),lkm(k2))),\UANS7)
UANS8	E(Voittosumma kolmea kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(3,0),lkm(k3)))+odot(k1,tod(binomial(3,1),lkm(k3)))+odot(k2,tod(binomial(3,2),lkm(k3)))+odot(k3,tod(binomial(3,3),lkm(k3))),\UANS8)
UANS9	E(Voittosumma neljää kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(4,0),lkm(k4)))+odot(k1,tod(binomial(4,1),lkm(k4)))+odot(k2,tod(binomial(4,2),lkm(k4)))+odot(k3,tod(binomial(4,3),lkm(k4)))+odot(k4,tod(binomial(4,4),lkm(k4))),\UANS9)
UANS10	E(Voittosumma viittä kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(5,0),lkm(k5)))+odot(k1,tod(binomial(5,1),lkm(k5)))+odot(k2,tod(binomial(5,2),lkm(k5)))+odot(k3,tod(binomial(5,3),lkm(k5)))+odot(k4,tod(binomial(5,4),lkm(k5)))+odot(k5,tod(binomial(5,5),lkm(k5))),\UANS10)
UANS11	E(Voittosumma kuutta kolikkoa heitettäessä)=	samat(odot(k0,tod(binomial(6,0),lkm(k6)))+odot(k1,tod(binomial(6,1),lkm(k6)))+odot(k2,tod(binomial(6,2),lkm(k6)))+odot(k3,tod(binomial(6,3),lkm(k6)))+odot(k4,tod(binomial(6,4),lkm(k6)))+odot(k5,tod(binomial(6,5),lkm(k6)))+odot(k6,tod(binomial(6,6),lkm(k6))),\UANS11)

? Vaihe 3

Kopioi

Tehtävän selite

Vielä ennen koko pelin lopputuloksen odotusarvon laskemista, päätellään yksi todennäköisyyden arvo. Pelin ensimmäisessä vaiheessa pelaaja heittää arpakuutiota, jolloin määrittyy heitettävien kolikoiden määrä. Mikä on todennäköisyys saada heitettäväksi tietty määrä kolikoita (1 kolikko, 2 kolikkoa, ... , 6 kolikkoa)?

Oikean vastauksen viesti

Juurikin näin. Arpakuution heiton eri lopputulokset {1,2,3,4,5,6} ovat toisensa poissulkevia ja niille kaikille on sama todennäköisyys.

Väärän vastauksen viesti

Hmmm...mikä on todennäköisyys yksittäisellä arpakuution sivulle jäädä päällimmäiseksi, jos tahkoja on kuusi kappaletta?

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS12	1/6	True
UANS13	1/2	False
UANS14	1/6, 2/6, 3/6, ..., 6/6	False
UANS15	Riippuu kolikoiden määrästä	False

? Vaihe 4

Kopioi

Tehtävän selite

Nyt lasketaan odotusarvo koko pelille ja saamme tietää, mikä on odotettavissa oleva voitto pelin pelaajalle.

Oikean vastauksen viesti

Juuri näin! Mikä oli sinun tapasi ratkaista tämä tehtävä? Teitkö pitkän kaavan mukaan vai keksitkö tavan yksinkertaistaa ratkaisua?

Esimerkiksi yksi tapa yksinkertaistaa on hyödyntää pelin luonnetta. Koska peli alkaa nopan heitolla ja kaikki silmäluvut eli heitettävien kolikoiden lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia ja yhtä todennäköisiä, voidaan eri kolikkomäärien odotusarvoista laskea keskiarvo.

Väärän vastauksen viesti

Tässä vielä treenaillaan ja käytetään täysin samaa odotusarvon kaavaa kuin aiemmin. Mieti, miten pystyt hyödyntämään aiemmin tässä tehtävässä laskemiasi arvoja.

Vinkki: Aiemmin laskimme odotusarvot vain pelin yhdelle osalle, nyt laskemme koko pelille ja kaikille sen vaiheille. Miten aiemmin käyttämäsi odotusarvon laskut muuttuvat ja voiko niitä yksinkertaistaa tai yhdistää jollain tavalla?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS16	E(Pelin yhden kierroksen lopputulos)=	melkeinSamat(todsivu*(\UANS6+\UANS7+\UANS8+\UANS9+\UANS10+\UANS11),\UANS16)

Vaihe 5

Kopioi

Tehtävän selite

Palataan vielä pohtimaan alkuperäistä kysymystä, jota pohditaan erityisesti kahdesta näkökulmasta: pelin pitäjänä ei halua hävitä rahaa ja samalla toisaalta haluaa tehdä pelistä mahdollisimman houkuttelevan pitämällä pelikierroksen hinnan sopivana. Mikä alla olevista summista sopisi nyt tässä kohtaa mielestäsi parhaiten yhden kierroksen hinnaksi?

Oikean vastauksen viesti

Kyllä vain! <ma>if \UANS20 then "2€ on varmasti sopiva summa; pääset voiton puolelle, mutta pelin hinta ei nouse liian korkeaksi ja on näin vielä houkutteleva." else "2,5€ on varmasti sopiva summa; pääset hyvin voiton puolelle, mutta pelin hinta ei nouse vielä aivan liian korkeaksi. "</ma>

Väärän vastauksen viesti

Ei osunut tällä kertaa! Valitsitko summan, joka on pelin odotusarvon yläpuolella? Tarvitset maksuksi enemmän kuin oletettavasti joudut pelaajalle maksamaan.

Etkai valinnut toisaalta liian korkeaa summaa? Tällöin et löydä innokkaita pelaajia.

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS17	<m>a</m>€	False
UANS18	<m>b</m>€	False
UANS19	<m>c</m>€	False
UANS20	<m>d</m>€	True
UANS21	<m>e</m>€	True
UANS22	<m>f</m>€	False

Vaihe 6

Kopioi

Tehtävän selite

Vertaa alussa valitsemaasi sekä äsken valittua pelikierroksen hintaa. Miten hyvin onnistuit alunperin valitsemaan pelille sopivan hinnan?

Oikean vastauksen viesti

Arvostan rehellisyyttäsi. Ei muuta kuin kehittelemään uusia pelejä, joissa leikitään todennäköisyyksillä!

Väärän vastauksen viesti

Hmm..vastasitko nyt varmasti rehellisesti?

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS23	Onnistuin valitsemaan sopivan hinnan pelille.	if \UANS3 or \UANS4 then True
UANS24	Valitsin liian matalan hinnan ja olisin jäänyt häviölle.	if \UANS0 or \UANS1 or \UANS2 then True
UANS25	Valitsin liian korkean summan, eikä se olisi houkuttelevuudeltaan optimaalinen.	if \UANS5 then True

Liite 5. Sähköpotkulauta lähdekoodit

Maximan globaalit alustuskutsut

```
samat(x, y) := is(equal(x ,y));
melkeinSamat(x, y) := is(abs(x-y) < 0.001);

murto(x,y) := x/y;

a : (15+random(20))*2;
b : 1+random(3);
c : 1+random(2);
d : murto(b,9+random(4));
e : murto(c,7+random(5));
f : murto(c,5);
g : 1/3;
h : 1;
i : (7+random(6))*5;
j : (12+random(14))*2;
```

? Vaihe 1

Kopioi

Tehtävän selite

Sähköpotkulaudat ovat yleistyneet kulkuneuvoina kaupungeissa hurjaa vauhtia. Erään tilastotieteilijän tutkimuksen mukaan ne ovat erityisesti nousseet suosioon opiskelijoiden keskuudessa. Valittetavasti näillä menopeleillä onnettomuuden aiheuttaminen ei ole kovin harvinaista. Onnettomuudet voivat olla moninaisia; törmääminen toiseen potkulautailijaan tai muuhun tiellä kulkijaan, törmääminen erilaisiin infrastruktuurin osiin, täysin itseaiheutettu kaatuminen pelleilyn seurauksena tai potkulaudan syttyminen palamaan väärinkäytön seurauksena.

Tilastotieteilijän tutkimuksessa tutkittiin erilaisia onnettomuuksiin vaikuttavia muuttujia, joista merkittävimpiä löytyi kahden erilaista. Onnettomuuksiin päätymiseen vaikutti olennaisesti vuorokauden aika, milloin potkulauta oli ajokäytössä. Toisena ja yllättävämpänä tekijänä onnettomuuksiin vaikutti potkulaudan ulkonäkö, joita oli kolmea erilaista; punainen, vihreä ja liekkikuvioinen.

Tilastotieteilijän huomioista kävi ilmi, että potkulautojen käyttöön otosta <m>a</m>$\%$ tapahtui päivällä, aikavälillä 10-22, ja loput tapahtui muuna aikana eli yöaikaan. Punaisella potkulaudalla päivällä ajettaessa toteutuu onnettomuus <m>d</m> kerroista, kun taas vihreää potkulautaa käytettäessä <m>e</m>

Tehtävän selite

päätymiseen vaikutti olennaisesti vuorokauden aika, milloin potkulauta oli ajokäytössä. Toisena ja yllättävämpänä tekijänä onnettomuuksiin vaikutti potkulaudan ulkonäkö, joita oli kolmea erilaista; punainen, vihreä ja liekkikuvioinen.

Tilastotieteilijän huomioista kävi ilmi, että potkulautojen käyttöön otosta <m>a</m>$\%$ tapahtui päivällä, aikavälillä 10-22, ja loput tapahtui muuna aikana eli yöaikaan. Punaisella potkulaudalla päivällä ajettaessa toteutuu onnettomuus <m>d</m> kerroista, kun taas vihreää potkulautaa käytettäessä <m>e</m> kerroista. Yöaikaan onnettomuuksia tapahtui huomattavasti enemmän. Punaisella potkulaudalla kolaroitiin <m>i</m>$\%$ ajokerroista ja vihreällä vastaavasti <m>j</m>$\%$ ajoista. Liekkikuvioisen potkulaudan valitessa on onnettomuus väistämättä edessä.

Tilastotieteilijä oli huomannut myös, että päivällä potkulautailijat välttivät liekkikuvioisia potkulautoja ja valitsivat niiden sijaan vain punaisia ja vihreitä potkulautoja. Päivällä valituista potkulaudoista <m>f</m> oli punaisia. Yöaikaan vastaavasti huonon fyysisen tai henkisen näkökyvyn vuoksi kaikkia kolmea potkulautatyyppiä valittiin yhtä satunnaisesti.

Tehtävän selite

kerroista. Yöaikaan onnettomuuksia tapahtui huomattavasti enemmän. Punaisella potkulaudalla kolaroitiin <m>i</m>$\%$ ajokerroista ja vihreällä vastaavasti <m>j</m>$\%$ ajoista. Liekkikuvioisen potkulaudan valitessa on onnettomuus väistämättä edessä.

Tilastotieteilijä oli huomannut myös, että päivällä potkulautailijat välttivät liekkikuvioisia potkulautoja ja valitsivat niiden sijaan vain punaisia ja vihreitä potkulautoja. Päivällä valituista potkulaudoista <m>f</m> oli punaisia. Yöaikaan vastaavasti huonon fyysisen tai henkisen näkökyvyn vuoksi kaikkia kolmea potkulautatyyppiä valittiin yhtä satunnaisesti.

Ja nyt itse asiaan...sinun tehtävänäsi on selvittää tutkimukseen liittyviä erilaisia todennäköisyyksiä, jotka liittyvät potkulautojen onnettomuuksiin. Ensimmäisenä sinun tulisi selvittää, millä todennäköisyydellä kaikista potkulaudan käyttäjistä täysin satunnaisesti valittu potkulautailija joutuu onnettomuuteen? Lähdetään aluksi hahmottamaan tilannetta käyttämällä siihen sopivaa metodia. Mikä seuraavista sopisi parhaiten tämän tilanteen hahmottamiseen?

Oikean vastauksen viesti

Kyllä vain! Puukuvion avulla on helppo havainnollistaa kaikkia eri vaihtoehtoja, jotka linkittyvät toisiinsa. Lisäksi kokonaistodennäköisyyksien laskemista puukuvio selkeyttää loistavasti.

Väärän vastauksen viesti

Nope! Tässä kyseisessä tapauksessa on useampia muuttujia jotka vaikuttavat toisiinsa ja muodostavat tapahtumaketjuja. Miten saisimme kuvattu yksinkertaisesti ja visuaalisesti näitä ketjuja?

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

☐ Näytä vastauksen tulkinta ☑ Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS0	Puukuvio	True
UANS1	Venn-diagrammi	False
UANS2	Geometrinen kuva	False
UANS3	Funktio	False

? Vaihe 2 Kopioi

Tehtävän selite

Valitaan seuraavaksi tehtävään sopiva puukuvio. Mikä seuraavista kuvaa tehtävän tilannetta parhaiten?

Kaikissa puukuvioissa on käytetty seuraavia merkintöjä; $"P"$=päivä, $"P^C"$=yöaika, $"PU"$=punainen, $"VI"$=vihreä, $"LK"$=liekkikuvioinen, $"O"$=onnettomuus ja $"O^C"$=ei onnettomuutta.

Lisäksi merkinnät $p_1,p_2,p_3,...$ kuvaavat tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien arvoja.

Oikean vastauksen viesti

Hyvin valittu! Tämä kuvaa tilannetta oikein ja on vaihtoehdoista selkein!

Väärän vastauksen viesti

Oletko varma, että valitsit vaihtoehdon joka kuvaa tilannetta oikein ja joka on mahdollisimman yksinkertaisesti esitetty? Vaikka tehtävänanto on pitkä, se kannattaa lukea ajatuksella.

Kysymyksen tyyppi

Valitse yksi

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS4	<IMG SRC=https://ville.utu.fi/static_resources/vmtkat_utufi/Puu1.png>	True
UANS5	<IMG SRC=https://ville.utu.fi/static_resources/vmtkat_utufi/Puu2.png>	False
UANS6	<IMG SRC=https://ville.utu.fi/static_resources/vmtkat_utufi/Puu3.png>	False

? Vaihe 3

Kopioi

Tehtävän selite

Tässä vaiheessa voisimme varmistaa, että ymmärrämme, miten puukuvio toimii ja millaisissa tapauksissa se on käyttökelpoinen malli sovellettavaksi.

Hyvänä lähtökohtana puukuvion käytölle toimii tilanteet, joissa käsillä oleva ilmiö sisältää vaihtoehtoisia tapahtumajonoja, kuten nyt tämän tehtävän tapauksessa potkulautoihin liittyvä onnettomuusilmiö.

Mitä muita vaatimuksia puukuvion käytölle on olemassa? Valitse seuraavista vaihtoehdoista sopivat.

Oikean vastauksen viesti

Loistavaa työtä! Nyt pitäisi olla perusteet kunnossa. Muutama hyvä huomio liittyen puukuvion konstruointiin:

1) Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla aina 1.
Mitä tämä tarkoittaa todennäköisyyslaskennan termein? Miten tätä voi hyödyntää täydennettäessä puukuvioon tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksiä?

2) Useat puukuvion pisteet eli vaiheet voivat vastata samaa tapahtumaa. Esimerkiksi tämän tehtävän tapauksessa se tarkoittaa että molemmat ajankohtavaihtoehdot johtavat sekä punaisen että vihreän potkulaudan käyttömahdollisuuteen. Tai vastaavasti erilaiset potkulaudan ulkonäöt voivat johtaa onnettomuuteen.

Väärän vastauksen viesti

Nyt täytyy varmaan muistella tai selvittää mitä ominaisuuksia puukuviolla on.

<ma>if \UANS11 then "Oletko sitä mieltä, ettei eri pisteissä voi olla samoja tapahtumia? Eikö kuitenkin kaksi eri vaihtoehtoa tai vaihtoehtoista tapahtumaketjua voi johtaa samaa lopputulokseen? Bussista myöhästyminen voi johtaa luennolta myöhästymiseen, mutta myös bussin ehtiessä on mahdollista myöhästyä luennolta muista syistä." else "Tapahtumaketjun missä tahansa vaiheessa olevien vaihtoehtojen pitäisi olla toisensa poissulkevia. Jokin vaihtoehdoista siis tapahtuu, mutta samaan aikaan vain yksi on mahdollinen. Mitä tämä tarkoittaa todennäköisyyksien kannalta? Voit myös pohtia ylipäätään puukuviossa liikkumista, millaisia säännönmukaisuuksia siihen liittyy?"</ma>

Kysymyksen tyyppi

Valitse monta

Näytä vastauksen tulkinta

Sekoita vastausvaihtoehdot

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS7	Ilmiöllä on yksi alkutila ja yksi tai useampia lopputiloja.	True
UANS8	Tapahtumajonoissa edetään vaiheittain tapahtumasta toiseen alkutilasta kohti jotain ilmiön lopputiloista.	True
UANS9	Jokaisessa vaiheessa enne lopputilaa kohdataan yksi tai useampi tapahtumavaihtoehto, joista yksi realisoituu ja johtaa taas uusiin tapahtumavaihtoehtoihin.	True
UANS10	Kaikissa tapahtumaketjun vaiheissa eri tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyyksien summan tulee olla välillä 0-1.	False
UANS11	Useat puukuvion pisteet eli vaiheet eivät voi vastata samaa tapahtumaa.	False
UANS12	Tapahtumajonoissa voidaan edetä mielivaltaisesti tapahtumista toisiin.	False

Vaihe 4

Kopioi

Tehtävän selite

Vielä ennen kun lähdetään ratkaisemaan kysymyksiä puukuvion avulla täydennetään puukuvio sopivilla arvoilla, jotta voimme hyödyntää sitä mahdollisimman hyvin. Anna tarkat arvot desimaali- tai murtolukumuodossa.

Nyt voit halutessasi selkeyden vuoksi kopioida samalla puukuvion paperille ja täyttää arvot myös suoraan siihen oikeille paikoille. Tämä saattaa helpottaa hahmottamista!

Oikean vastauksen viesti

Hienoa työtä! Nyt kaikki arvot ovat paikallaan ja voimme hyödyntää puukuviota todennäköisyyksien päättelyssä.

Väärän vastauksen viesti

Mietipä vielä! Tutki tehtävänantoa ja puukuviota tarkkaan.

Annoithan vastaukset varmasti mahdollisimman tarkkana?

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS13	p_1=	samat(a/100,\UANS13)
UANS14	p_2=	samat(1-(a/100),\UANS14)
UANS15	p_3=	samat(f,\UANS15)
UANS16	p_4=	samat(1-f,\UANS16)
UANS17	p_5=	samat(g,\UANS17)
UANS18	p_6=	samat(d,\UANS18)
UANS19	p_7=	samat(1-d,\UANS19)

UANS20	p_8=	samat(e,\UANS20)
UANS21	p_9=	samat(1-e,\UANS21)
UANS22	p_{10}=	samat(i/100,\UANS22)
UANS23	p_{11}=	samat(1-(i/100),\UANS23)
UANS24	p_{12}=	samat(j/100,\UANS24)
UANS25	p_{13}=	samat(1-(j/100),\UANS25)
UANS26	p_{14}=	samat(h,\UANS26)

? Vaihe 5

Kopioi

Tehtävän selite

Ratkaistaan muutama yksinkertaisempi tilanne puukuviota hyödyntäen ennen kuin palataan tämän tehtävän pääkysymykseen. Määritä seuraavien tilanteiden todennäköisyydet:

Anna vastaukset vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Oikean vastauksen viesti

Loistavaa! Löysit oikeat todennäköisyydet. Tässä kohtaa haluaisin sanoa, että sinulla on homma hallussa. Vielä kuitenkin viimeinen vaihe...

Väärän vastauksen viesti

Hmm..miten puukuviosta voimmekaan päätellä todennäköisyyden jollekin esitetylle tapahtumalle?

Puukuviossa tietyn tapahtumaketjun toteutumisen todennäköisyys saadaan hyödyntämällä todennäköisyyslaskennan yleistä tulosääntöä. Joka on muotoa $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) \\ = P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1) \cdot P(A_3\mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}) \\ = p_1\cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k .$

<ma>if melkeinSamat((100-a)/100*g*(1-h),\UANS28) then "Loistavaa, toinen kohta on oikein!" else "Mikä oli todennäköisyys, että liekkikuvioisella potkulaudalla selviää ilman onnettomuutta?"</ma>

<ma>if melkeinSamat((1-d)*(a/100*f+(1-(a/100))*g),\UANS19) then "Hienoa päättelyä viimeisessä kohdassa!" else "Huomasithan, että punainen potkulauta

Väärän vastauksen viesti

Puukuviossa tietyn tapahtumaketjun toteutumisen todennäköisyys saadaan hyödyntämällä todennäköisyyslaskennan yleistä tulosääntöä. Joka on muotoa $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) \\ = P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1) \cdot P(A_3\mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}) \\ = p_1\cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k .$

<ma>if melkeinSamat((100-a)/100*g*(1-h),\UANS28) then "Loistavaa, toinen kohta on oikein!" else "Mikä oli todennäköisyys, että liekkikuvioisella potkulaudalla selviää ilman onnettomuutta?"</ma>

<ma>if melkeinSamat((1-d)*(a/100*f+(1-(a/100))*g),\UANS19) then "Hienoa päättelyä viimeisessä kohdassa!" else "Huomasithan, että punainen potkulauta voi päätyä käyttöön kahden eri tapahtumaketjun kautta; sekä yöllä että päivällä. Tässä voidaan käyttää hyväksi tietoa, että puukuvion eri pisteisiin vievät reitit ovat toisensa poissulkevia, jolloin voidaan hyödyntää toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntöä." </ma>

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

☐ Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS27	P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkukuvioinen potkulauta ja joutuu onnettomuuteen)= 	melkeinSamat((100-a)/100*g*h,\UANS27)
UANS28	P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä liekkukuvioinen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 	melkeinSamat((100-a)/100*g*(1-h),\UANS28)
UANS29	P(Opiskelijalle sattuu käsiinsä punainen potkulauta ja välttää onnettomuuden)= 	melkeinSamat((a/100*f*(1-d)+(1-(a/100))*g*(1-(i/100))),\UANS29)

? Vaihe 6

Kopioi

Tehtävän selite

Ja nyt viimeisenä muttei vähäisimpänä ratkaistaan alkuperäinen kysymys. Kysymys siis kuului näin. Mikä on todennäköisyys, että täysin satunnaisesti valittu potkulautailija joutuu onnettomuuteen?

Käytä hyväksi kaikkea tähän asti saamaasi ja hallussasi olevaa tietoa. Ja ilmoita vastaus vähintään kolmen desimaalin tarkkuudella.

Oikean vastauksen viesti

Juurikin näin! Melko suuri todennäköisyys joutua onnettomuuteen tuo <m>\UANS30*100</m>%.

Eikö olekin aika mukava etsiä vastaus puukuvion avulla. Puukuvio myös useimmiten helpottaa hahmottamista ja tällöin ei mene niin helposti sekaisin, etenkin kun huomioitavia todennäköisyyksiä alkaa olla suurempi lukumäärä ja tutkittava ilmiö monivaiheinen ja -ulotteinen.

Väärän vastauksen viesti

Milläköhän tämä menisi? Kyse voisi olla jonkinlaisesta kokonaistodennäköisyydestä kaikille eri vaihtoehdoille päätyä onnettomuuteen?

Selvisit edellisestä vaiheesta. Nyt vain hyödynnät ja yhdistät siinä käytettyjä taktiikoita. Tämä on hieman pidempi lasku, joten ole myös tarkkana, ettei tule huolimattomuusvirheitä. Varmista, että numerot ovat oikein ja oikeissa kohdissa.

Kysymyksen tyyppi

Avoin kysymys

Näytä vastauksen tulkinta

Opiskelijan vastauksen ID	Kysymys	Oikeellisuustarkastuksen funktio (Maxima)
UANS30	P(Onnettomuus tapahtuu)=	melkeinSamat(((a/100)*(f*d+(1-f)*e)+((100-a)/100)*g*(i/100+j/100+h)),\UANS30)