

# Neuroverkoista

Joni Hallivuori

Matematiikan Pro Gradu -tutkielma  
Turun yliopisto

Tammikuu 2023

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Neuroverkoista yleisesti</b>	<b>2</b>
2.1	Neuroverkon gradientti . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Rajatilanne</b>	<b>4</b>
3.1	Ergodinen teoria . . . . .	4
3.2	Metriikkoja neuroverkkoavaruudelle . . . . .	7
3.3	Metriset funktionaalit . . . . .	8
3.4	Neuroverkko ei-negatiivisessa kartiossa . . . . .	11
3.5	Neuroverkko yksikkökuutiossa . . . . .	12
3.6	Cut-off -ilmiö . . . . .	14
3.7	Pieni tutkimus Cut-offista . . . . .	15
3.8	Neuroverkon koon valinta . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Rajoitetun variaation funktiot</b>	<b>16</b>
4.1	Optimointitehtävä . . . . .	17
4.2	Merkintöjä . . . . .	18
4.3	Log-Sobolev-epäyhtälö . . . . .	18
4.4	Differentiaaligeometriaa . . . . .	22
4.5	Stokastiset prosessit ja Fokker-Planck-yhtälö . . . . .	22
4.6	Virhefunktioista . . . . .	23
4.7	Funktioavaruuden $H_{ma}$ sulkeuma . . . . .	29
4.8	Tasainen arviointiteoreema . . . . .	31
4.9	Paikallistusteoreema . . . . .	33
	<b>Kirjallisuutta</b>	<b>43</b>

# 1 Johdanto

Neuroverkoilla tarkoitetaan algoritmia, jonka on tarkoitus kuvata ihmisen neuro-niverkkoa. Neuroverkot muodostuvat tasoista neuroneita, joiden "aktivaatioiden" perusteella saadaan seuraavan tason neuroneiden aktivaatiot. Ensimmäisen tason aktivaatiot ovat syöte, jota käsitellään niin sanottujen piilotettujen tasojen läpi ja lopuksi viimeisen tason neuroneista saadaan tuloste. Neuronien aktivoinnit laske-taan edellisestä tasosta tasomuunnoksen avulla. Useimmiten tasomuunnokset ovat neuronikohtaisia painotettuja summia joihin lisätään jokin tietty vakio, ja tämän jälkeen lopullinen aktivaatio saadaan tästä jonkin aktivointifunktion avulla. Yleisiä aktivointifunktioita ovat hyperbolinen tangentti ja ReLU. Yksittäisten painotettu-jen summien laskeminen on kuitenkin raskasta, ja painotuksista tehdään neliömatriisi ja vakioista vektori. Tällöin laskentatehokkuutta voidaan parantaa lineaarial-gebran keinoin. Neuroverkkoa opetetaan muuttamalla painomatriisia ja vakiovek-toria, ja muutoksen suunnan antaa opetusdata. Neuroverkot ovat mielenkiintoinen ratkaisu tietynlaisiin algoritmiongelmiiin. Eräs yksinkertaisimmista esimerkeistä on käsinkirjoitettujen numeroiden tunnistus. Ensin ongelma tuntuu yksinkertaiselta, mutta käsin kirjoitetuissa numeroissa on hyvin paljon eroja. Tämä voidaan ratkais-ta neuroverkoilla helposti, kun tehdään kuvatilasta syötetaso aina samalla tavalla ja opetetaan verkkoa suurella määrällä käsinkirjoitettuja numeroita. Emme varsinai-sesti tiedä mitä lopputulos oikeasti tekee piilotetuilla tasoilla, mutta lopputuloksella on helposti yli 95 prosentin tarkkuus. Neuroverkoilla voidaankin ratkaista hyvällä tarkkuudella ja kevyellä laskennallisuudella useita ongelmia, jotka olisivat laskennal-lisesti hankalia normaaleilla algoritmeilla, mutta itse neuroverkon kouluttaminen on vastaavasti laskennallisesti raskasta. Neuroverkkojen koulutus on usein kymmenien tuhansien muuttujien suhteen optimointia.

## 2 Neuroverkoista yleisesti

Neuroverkot koostuvat neuroneista, joiden arvoja ovat usein reaaliluvut välillä  $[0, 1]$ , ja tätä arvoa kutsutaan neuronin aktivaatioksi. Neuronit muodostavat tasoja (layers). Tasojen välillä on synapseja, jokaisesta tason  $i$  neuronista jokaiseen tason  $i + 1$  neuroniin. Tason  $i + 1$  neuronin aktivaatio lasketaan painotettuna summana edellisen tason neuroneista johon lisätään jokin vakiotermin (bias). Tämän lisäksi pai-notettu summa yleensä siirretään ei-negatiivisiin arvoihin jollain funktiolla  $\sigma$ . Toisin sanottuna

$$u_k^{(i)} = \sigma\left(\sum_{j=1}^m w_{j,k}^{(i)} u_j^{(i-1)} + c_k^{(i)}\right),$$

missä  $u_k^{(i)}$  tarkoittaa tason  $i$  neuronin paikassa  $k$ ,  $w_{j,k}^{(i)}$  on sen synapsin, joka on tasojen  $i - 1$  ja  $i$  välissä ja neuronista  $j$  neuroniin  $k$ , paino ja  $c_k^{(i)}$  on tason  $i$  paikan  $k$  neuronin vakiotermin. Koska neuroneita on useita yhdessä tasossa ja lineaarialgebra on laskennallisesti kätevää, nämä kirjoitetaan yleensä vektorimuodossa  $u^{(i)} = \sigma(W_i u^{(i-1)} + b_i)$  missä  $\sigma$  lasketaan jokaiselle koordinaatille erikseen ja

$$u^{(i)} = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ \vdots \\ u_m^{(i)} \end{bmatrix}, \quad W_i = \begin{bmatrix} w_{1,1}^{(i)} & w_{2,1}^{(i)} & \dots & w_{m,1}^{(i)} \\ w_{1,2}^{(i)} & w_{2,2}^{(i)} & \dots & w_{m,2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1,m}^{(i)} & w_{2,m}^{(i)} & \dots & w_{m,m}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ \vdots \\ b_m^{(i)} \end{bmatrix}.$$

Usein lisäksi merkitään  $T_i(u) = \sigma(W_i u + b_i)$ . Tässä siis niin sanottu päivitys-funktio tasojen, joissa on yhtä monta neuronia, välillä. Muotoilusta myös näkee kuinka paljon optimoitavaa on jo kahden tason välillä,  $m^2$  painoa ja  $m$  vakio-termiä. Optimoitavien muuttujien määrä selvästi kasvaa nopeasti uusia tasoja lisättäessä.

## 2.1 Neuroverkon gradientti

Neuroverkon toiminta on optimointitehtävä, jossa etsitään ne painot ja vakio-termit, joilla ero oikeaan tilanteeseen on mahdollisimman pieni. Tutkitaan esimerkiksi tällaista optimointitehtävää:

$$\text{Min } h(T_1, \dots, T_n) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (f(T_1, \dots, T_n, x) - g(x))^2$$

missä  $f(T_1, \dots, T_n, x)$  tarkoittaa neuroverkon aktivoiteja alkuarvolla  $x$  ja tasomuunnoksilla  $T_i(u) = \sigma(W_i u + b_i)$  ja  $X$  on jokin äärellinen joukko "opetusdataa", joista  $g(x)$  on halutut tulokset. Funktion  $h$  minimin löytäminen onkin mielenkiintoisempi kysymys. Koulumatematiikasta tuttu derivaatta ja sen nollakohta ovat hyvä alku, mutta tarvitaan useampiulotteista työkalua. Jos voisimme määrittää funktiolle  $h$  gradientin muunnoksien  $T_i$  suhteen, saisimme parhaan suunnan funktion  $h$  minimoimiselle. Gradientti saadaan derivoimalla minimoitava funktio kaikkien painojen ja kaikkien vakio-termien suhteen, merkinnällä  $T_i = (W_i, b_i)$

$$\nabla h(T_1, T_2, \dots, T_n) = \left( \frac{\partial h}{\partial W_1}, \frac{\partial h}{\partial b_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial W_n}, \frac{\partial h}{\partial b_n} \right),$$

$$\text{missä } \frac{\partial h}{\partial W_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial w_{1,1}^{(i)}} & \frac{\partial h}{\partial w_{2,1}^{(i)}} & \dots & \frac{\partial h}{\partial w_{m,1}^{(i)}} \\ \frac{\partial h}{\partial w_{1,2}^{(i)}} & \frac{\partial h}{\partial w_{2,2}^{(i)}} & \dots & \frac{\partial h}{\partial w_{m,2}^{(i)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial w_{1,m}^{(i)}} & \frac{\partial h}{\partial w_{2,m}^{(i)}} & \dots & \frac{\partial h}{\partial w_{m,m}^{(i)}} \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial h}{\partial b_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial b_1^{(i)}} \\ \frac{\partial h}{\partial b_2^{(i)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial b_m^{(i)}} \end{bmatrix}.$$

Merkitään  $X \sim U(a, b)$  kun  $X$  on jakautunut tasaisesti välillä  $[a, b]$ . Olkoon  $\mathbf{T}_0 = (T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$ , missä esimerkiksi  $W_i \sim U(-1, 1)^{N \times N}$  ja  $b_i \sim U(-1, 1)^N$  ja määritellään jono

$$\mathbf{T}_{k+1} = \mathbf{T}_k - \eta_k \nabla h(\mathbf{T}_k),$$

missä  $\eta_n$  on niin sanottu oppimisnopeus. Tätä jonoa kutsutaan gradienttilaskuksi. Oppimisnopeudella on suuri merkitys gradienttilaskuun, esimerkiksi liian pienellä nopeudella jäädyään helposti jumiin lokaaleihin minimeihin, liian suurella taas gradienttilasku ei välttämättä suppene. Jos esimerkiksi  $h \in C^1$ , kun valitaan  $\eta_k \rightarrow 0$ ,

$|\eta_k \nabla h(\mathbf{T}_k)| \rightarrow 0$  ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}_k = \mathbf{T}.$$

Useimmiten gradientin laskemista ei tehdä koko opetusdatan yli joka kierroksella "oppimisen" nopeuttamiseksi.

### 3 Rajatilanne

Normaalisti neuroverkkoa käytettäessä tasojen määrä on aluksi määritelty vakio, mutta kuinka monta tasoa neuroverkossa kannattaisi olla? Tätä voidaan tutkia lisäämällä tasoja neuroverkkoon. Syvennyttään neuroverkon toimintaan tilanteessa, jossa tasoja lisätään verkon alkuun tai loppuun rajatta. Merkitään

$$x_n = T_1(T_2(\dots T_n(x_0)\dots))$$

ja

$$y_n = T_n(T_{n-1}(\dots T_1(x_0)\dots)),$$

missä  $x_n$ ,  $y_n$  kuvaa tason  $n$  aktivaatioita tietyillä muunnoksilla  $T_i$  ja alkupisteellä  $x_0$ . Tutkitaan neuroverkon syvyyttä ergodisen teorian työkaluilla.

#### 3.1 Ergodinen teoria

Pohditaan tilannetta, jossa muunnokset  $T_i$  ovat toisistaan riippumattomia ja samoinjakautuneita, ja muistellaan todennäköisysteorian suurten lukujen lakia. Jos  $X_i$  ovat samoin jakautuneita toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia joiden odotusarvot ovat äärellisiä, niin

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \longrightarrow E[X_1]$$

melkein varmasti. Melkein varmasti on todennäköisysteorian vastine mittateorian termille "melkein kaikkialla", eli melkein varman tapahtuman vastatapahtumien joukko voi olla epätyhjä, mutta sillä on todennäköisyys 0. Tässä muunnokset  $T_i$  voisi ajatella satunnaismuuttujina joista otetaan "keskiarvo", mutta helposti voidaan huomata ei-kommutatiivisuudesta seuraavan raja-arvon riippuvuus järjestyksestä. Suurten lukujen laki ei siis päde suoraan tilanteeseemme.

**Määritelmä 3.1.** Olkoon  $X$  todennäköisyysavaruus todennäköisyysmitalla  $\mu$ . Funktiota  $\tau : X \rightarrow X$  sanotaan ergodiseksi jos ehdosta  $\tau^{-1}(A) = A$  seuraa, että  $\mu(A) = 0$  tai  $\mu(A) = 1$ . Jos  $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$  niin sanotaan, että  $\tau$  on mitan  $\mu$  säilyttävä.

**Lemma 3.2.** [11] Olkoon  $(X, \mu)$  todennäköisyysavaruus ja  $\tau : X \rightarrow X$  mitan säilyttävä ja ergodinen. Tällöin jos  $\mu((\tau^{-1}(B) \setminus B) \cup (B \setminus \tau^{-1}(B))) = 0$ , niin  $\mu(B) \in \{0, 1\}$ .

*Todistus.* Merkitään selvyuden vuoksi  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Kaikilla  $j \geq 0$  on voimassa

$$\tau^{-j}(B) \Delta B \subset \bigcup_{i=0}^{j-1} \tau^{-i-1}(B) \Delta \tau^{-i}(B) = \bigcup_{i=0}^{j-1} \tau^{-i}(\tau^{-1}(B) \Delta B).$$

Koska  $\tau$  on mitan säilyttävä, niin

$$\mu(\tau^{-j}(B)\Delta B) \leq j\mu(\tau^{-1}(B)\Delta B) = 0.$$

Olkoon nyt  $B_\infty = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} \tau^{-i}(B)$ . Huomataan, että

$$\mu\left(B\Delta\bigcup_{i=j}^{\infty}\tau^{-i}(B)\right) \leq \sum_{i=j}^{\infty}\mu(B\Delta\tau^{-i}(B)) = 0.$$

Koska  $\bigcup_{i=j}^{\infty}\tau^{-i}(B) \subset \bigcup_{i=j+1}^{\infty}\tau^{-i}(B)$ , saadaan  $\mu(B\Delta B_\infty) = 0$ . Lisäksi

$$\tau^{-1}(B_\infty) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} \tau^{-i-1}(B) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=j+1}^{\infty} \tau^{-i}(B) = B_\infty,$$

jolloin  $\mu(B_\infty) \in \{0, 1\}$  ergodisuuden oletuksen nojalla. Lisäksi ehdosta  $\mu(B\Delta B_\infty) = 0$  seuraa, että  $\mu(B) = \mu(B_\infty)$ .  $\square$

**Lemma 3.3.** Olkoon  $(X, \mu)$  todennäköisyysavaruus ja  $\tau : X \rightarrow X$  mitan säilyttävä ergodinen surjektio. Olkoon  $A \subset X$  ja  $\mu(A) > 0$ . Nyt  $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^i A) = 1$ .

*Todistus.* Olkoon  $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^i A$ . Huomataan, että

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^i A \subseteq \bigcup_{i=-1}^{\infty} \tau^i A = \tau^{-1}B,$$

ja  $\mu(\tau^{-1}B) = \mu(B)$ , joten  $\mu(\tau^{-1}B\Delta B) = 0$ . Nyt lemmän 3.2 mukaan  $\mu(B) = 1$ , koska sen mitta on positiivinen positiivismittaisten joukkojen unionina.  $\square$

**Lemma 3.4.** Olkoon  $(X, \mu)$  suljettu todennäköisyysavaruus jolla on numeroituva avoin peite  $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$  ja olkoon  $\tau$  mitan säilyttävä ja ergodinen. Tällöin melkein kaikilla  $x \in X$  joukko  $\{x, \tau(x), \tau^2(x), \dots\}$  on tiheä joukossa  $X$  ja lisäksi  $\{x, \tau(x), \tau^2(x), \dots\}$  jakautuu tasaisesti joukkoon  $X$ .

*Todistus.* Olkoon  $x \in X$  alkio, jonka generoima joukko  $\{x, \tau x, \tau^2 x, \dots\}$  ei ole tiheä. Tällöin on olemassa jokin  $U_j$  jolla

$$\{\tau^n(x) : n \in \mathbb{N}\} \cap U_j = \emptyset,$$

joten

$$x \in A_j = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^{-i}(U_j).$$

Koska  $\tau^{-1}(A_j) = \tau^{-1}(X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^{-i}(U_j)) = X \setminus \tau^{-1}(\bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^{-i}(U_j)) = X \setminus \bigcup_{i=-1}^{\infty} \tau^{-i}(U_j)$ , niin  $A_j \subset \tau^{-1}(A_j)$ . Koska  $\tau$  on mitan säilyttävä,  $\mu(\tau^{-1}(A)\Delta A) = 0$  ja lemmän 3.2 mukaan  $\mu(A_j) \in \{0, 1\}$ . Lemman 3.3 perusteella  $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} \tau^{-i}(U_j)) = 1$ , joten täytyy olla  $\mu(A_j) = 0$ . Nyt kaikki  $x \in X$  joiden generoima joukko ei ole tiheä kuuluvat unioniin  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , ja tämän joukon mitta  $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = 0$ . Täten melkein kaikilla  $x \in X$  generoituva joukko on tiheä avaruudessa  $X$ . Lisäksi

kaikilla  $k$  on voimassa  $m(\{\tau^k(x) \in A\}) = m(\{x \in \tau^{-k}(A)\}) = m(A)$ , joten kaikilla  $x$  joilla generoituu tiheä osajoukko

$$\sum_{k=1}^n \#\{\tau^k(x) \in A\} \rightarrow nm(A)$$

kun  $n$  kasvaa rajatta. Tässä  $\#$  tarkoittaa joukon alkioden määrää.  $\square$

**Lemma 3.5** (Birkhoffin ergodinen lause [9]). Olkoon  $X = (\Omega, F, \mu)$  todennäköisyysavaruus ja  $\tau : X \rightarrow X$  mitan säilyttävä ergodinen surjektio ja olkoon  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  mitallinen funktio. Tällöin melkein kaikilla  $x \in X$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \circ \tau^i(x) \longrightarrow \int_X f d\mu.$$

**Esimerkki 3.6.** Olkoon  $f = \mathbb{1}_A$  jollekin  $A \subset X$  jolla on numeroituva avoin peite. Nyt vasen puoli on  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_A(\tau^i(x))$ , eli toisin sanottuna kuinka moni pisteistä  $x, \tau(x), \tau^2(x), \dots, \tau^n(x)$  kuuluu joukkoon  $A$  jaettuna pisteiden lukumäärällä. Koska  $\tau$  on mitan säilyttävä ergodinen surjektio, lemmän 3.4 mukaan  $\{x, \tau(x), \tau^2(x), \dots, \tau^n(x)\}$  lähestyy melkein kaikilla  $x \in X$  tiheää osajoukkoa, jolloin vasen puoli lähestyy joukon  $A$  mitan suhdetta koko joukon  $X$  mittaan, eli joukon  $A$  todennäköisyysmittaa  $\int_A d\mu$ .

**Lause 3.7** (Kingmanin lause [10]). Olkoon  $(X, \mu)$  todennäköisyysavaruus ja  $\tau : X \rightarrow X$  mitan säilyttävä ergodinen surjektio. Olkoon  $\{\nu_n \in L^1(\mu) \mid 0 \leq n < \infty\}$  joukko satunnaismuuttujia. Jos  $\nu_n$  on subadditiivinen muunnoksen  $\tau$  suhteen eli

$$\nu_{n+m}(x) \leq \nu_n(x) + \nu_m(\tau^n(x)),$$

niin melkein kaikilla  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(x)}{n} = \nu \geq -\infty.$$

**Määritelmä 3.8.** Olkoon  $\tau : X \rightarrow X$  ergodinen ja mitallinen surjektio. Olkoon  $EL(X) = \{f : X \rightarrow X \mid d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)\}$  eli joukon  $X$  ei-laajentavien muunnosten joukko. Olkoon  $\phi : X \rightarrow EL(X)$ . *Kosykli* on funktio  $C : X \times \mathbb{N} \rightarrow EL(X)$ , jolla  $C(x, 0)$  on identiteettifunktio kaikilla  $x \in X$  ja

$$C(x, n) = \phi(x) \circ \phi(\tau(x)) \circ \dots \circ \phi(\tau^{n-1}(x))$$

kaikilla  $x \in X$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Sanotaan lisäksi, että kosykli on mitallinen jos  $x \rightarrow C(x, n)(y)$  on mitallinen kaikilla  $y \in X$ . Sanotaan, että kosykli  $C(x, n)$  on integroituva jos

$$\int_X d(y, \phi(x)(y)) d\mu(y) < \infty$$

kaikilla  $x \in X$ .

### 3.2 Metriikkoja neuroverkkoavaruudelle

Olkoon  $X$  avaruuden  $\mathbb{R}^N$  positiivinen kartio eli  $X \subset \mathbb{R}^N$ ,  $x(i) > 0$  kaikilla  $x \in X$  ja kaikilla  $0 \leq i < N$ . Määritellään

$$d(x, y) = \log \left( \max \left( \max_i \frac{x(i)}{y(i)}, \max_i \frac{y(i)}{x(i)} \right) \right).$$

Selvästi  $d(x, y) = 0$  jos ja vain jos  $x = y$  ja  $d(x, y) = d(y, x)$ . Lisäksi

$$\begin{aligned} d(x, z) + d(z, y) &= \log \left( \max \left( \max_i \frac{x(i)}{z(i)}, \max_i \frac{z(i)}{x(i)} \right) \right) \\ &\quad + \log \left( \max \left( \max_i \frac{z(i)}{y(i)}, \max_i \frac{y(i)}{z(i)} \right) \right) \\ &\geq \log \left( \max \left( \max_i \frac{x(i) z(i)}{z(i) y(i)}, \max_i \frac{z(i) y(i)}{x(i) z(i)} \right) \right) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Täten  $d$  on metriikka ja kutsutaan sitä Thompsonin metriikaksi. Kuitenkin tasomuunnoksien ei-lineaarisuudesta johtuen pisteiden kuvautumisen sijaan on joskus helpompaa tutkia tasomuunnoksien vaikutusta etäisyysfunktioihin. Tarvitaan siis metriikoiden avaruus. Olkoon  $d_0(x, y) = \|x - y\|$  jonkin normin tuottama metriikka ja olkoon  $M = \{d \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{C}d(x, y) < d_0(x, y) < Cd(x, y)\}$  eli ne metriikat  $d$  jotka ovat bi-Lipschitz-ekvivalentit alkuperäisen metriikan  $d_0$  kanssa. Olkoon  $d_1, d_2 \in M$  ja määritellään

$$D(d_1, d_2) = \log \left( \max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \right\} \right).$$

Tämä muistuttaa suuresti yllä määriteltyä Thompsonin metriikkaa, ja kutsutaan tätä etäisyysfunktioiden Thompsonin metriikaksi. Selvästi  $D$  on symmetrinen metriikoiden  $d_1, d_2$  suhteen,  $D(d_1, d_2) = 0$  jos ja vain jos  $\max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \right\} = 1$  eli  $d_2 = d_1$  ja kolmioepäyhtälö saadaan samoin kuin yllä

$$\begin{aligned} D(d_1, d_3) + D(d_3, d_2) &= \log \left( \max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_3(x, y)}{d_1(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_1(x, y)}{d_3(x, y)} \right\} \right) \\ &\quad + \log \left( \max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_3(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_3(x, y)}{d_2(x, y)} \right\} \right) \\ &\geq \log \left( \max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_3(x, y)}{d_1(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_3(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_1(x, y)}{d_3(x, y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{d_3(x, y)}{d_2(x, y)} \right\} \right) \\ &\geq \log \left( \max \left\{ \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)}, \sup_{x \neq y} \frac{d_1(x, y)}{d_2(x, y)} \right\} \right) \\ &= D(d_1, d_2), \end{aligned}$$

eli kolmioepäyhtälö on voimassa.  $D$  on siis metriikka ja  $(M, D)$  on nyt metrinen avaruus. Tutkitaan nyt tasomuunnoksen  $T$  vaikutusta eli olkoon  $T^*d(x, y) = d(Tx, Ty)$ .



Jos  $T$  on diffeomorfismi, niin erityisesti se on bijektio eli se vain "siirtää" alkupe-  
räisen joukon pisteitä. Tällöin selvästi  $d(x, y) = d(Tx, Ty)$  koska supremumit eivät  
muutu. Olkoon nyt  $T$  vain injektio. Tällöin selvästi  $TX \subset X$  eli

$$\sup_{x \neq y} \frac{T^*d_2(x, y)}{T^*d_1(x, y)} \leq \sup_{x \neq y} \frac{d_2(x, y)}{d_1(x, y)},$$

joten  $T$  on ei-laajentava muunnos metriikassa  $D$ .

### 3.3 Metriset funktionaalit

Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja olkoon  $x_0 \in X$ , ja olkoon  $F(X, \mathbb{R})$  jatkuvien  
funktioiden  $X \rightarrow \mathbb{R}$  avaruus pisteittäisen suppenemisen topologiaalla. Määritellään

$$\Phi : X \rightarrow F(X, \mathbb{R})$$

$$\Phi(x) = h_x(\cdot) := d(\cdot, x) - d(x_0, x).$$

Jos  $\Phi(x)(z) = d(z, x) - d(x_0, x) = d(z, y) - d(x_0, y) = \Phi(y)(z)$  kaikilla  $z \in X$ , niin  
erityisesti kun  $z = x$  saadaan kolmioepäyhtälöllä  $-d(x_0, x) = d(z, x) - d(x_0, x) =$   
 $d(z, y) - d(x_0, y) \geq d(z, y) - d(x, z) - d(x_0, x)$ , eli  $d(z, y) - d(x, y) = d(z, y) \leq 0$ ,  
joten metriikan  $d$  ominaisuuksien perusteella  $\Phi(x) = \Phi(y)$  jos ja vain jos  $x = y$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_1} h_x(y) = \lim_{x \rightarrow x_1} (d(y, x) - d(x_0, x)) = d(y, x_1) - d(x_0, x_1) = h_{x_1}(y)$$

kaikilla  $x_1, y \in X$ , joten  $\Phi$  on jatkuva injektio esimerkiksi sup-normissa. Lisäksi  
kolmioepäyhtälöstä seuraa

$$h_x(y) = d(y, x) - d(x_0, x) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x_0, x) = d(x_0, y)$$

ja

$$h_x(y) = d(y, x) - d(x_0, x) \geq d(y, x) - d(x_0, y) - d(x, y) = -d(x_0, y).$$

Tästä seuraa  $\Phi(X) \subset \times_{y \in X} [-d(x_0, y), d(x_0, y)]$ , joka on (valinta-aksioomaa käyt-  
täten) Tihonovin lauseen perustella kompakti, koska jokainen tulon väli on kompak-  
ti. Tulos pätee ilman valinta-aksioomaa, jos  $X$  on numeroituva. Tämän seurauksena  
joukon  $\Phi(X)$  rajapisteiden joukko  $\overline{\Phi(X)} = \{\lim_{n \rightarrow \infty} h_{x_n} \mid x_n \text{ suppenee}\}$  on kompak-  
ti. Kutsutaan tätä avaruuden  $X$  metrisiksi funktionaaleiksi.

**Lemma 3.9.** [6] Olkoon  $\tau : X \rightarrow X$  ergodinen surjektio ja  $C : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$   
integroituva subadditiivinen kositykli muunnoksen  $\tau$  suhteen eli  $C(x, n + m) \leq$   
 $C(x, n) + C(\tau^n x, m)$  ja lisäksi

$$\inf_n \frac{1}{n} \int_X C(x, n) d\mu = \nu.$$

Silloin melkein kaikilla  $x \in X$  on olemassa  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $n_i \rightarrow \infty$  ja  $\delta_l > 0$ ,  $\delta_l \rightarrow 0$ , joilla  
kaikilla  $i$  ja kaikilla  $l \leq n_i$  on

$$-l\delta_l \leq C(x, n_i) - C(\tau^l x, n_i - l) - \nu l \leq l\delta_l.$$

**Lause 3.10.** [6] Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $C(x, n)$  joukko sen integroituvia kosityklejä, jotka ovat ei-laaajentavia metriikan  $d$  suhteen. Silloin melkein kaikilla  $x \in X$  on olemassa metrinen funktionaali  $h \in \overline{\Phi(X)}$  jolla kaikilla  $y \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n}h(C(x, n)(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}d(y, C(x, n)(y)).$$

*Todistus.* Olkoon  $\tau$  ergodinen mitan säilyttävä surjektio, olkoon  $\phi : X \rightarrow EL(X)$  ja olkoon  $C : X \times \mathbb{N} \rightarrow EL(X)$ ,  $C(x, n) = \phi(x)\phi(\tau x)\dots\phi(\tau^{n-1}x)$ .

Olkoon  $a(x, n) = d(C(x, n)(x_0), x_0)$  missä  $x_0$  on metriset funktionaalit määrittävä alkuperäinen piste. Koska kosityklit  $C(x, n)$  ovat ei-laaajentavia metriikan  $d$  suhteen, kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} a(x, n+m) &= d(C(x, n+m)(x_0), x_0) \\ &= d(C(x, n)C(\tau^n x, m)(x_0), x_0) \\ &\leq d(C(x, n)(x_0), x_0) + d(C(x, n)C(\tau^n x, m)(x_0), C(x, n)(x_0)) \\ &\leq d(C(x, n)(x_0), x_0) + d(C(\tau^n x, m)(x_0), x_0) \\ &= a(x, n) + a(\tau^n x, m), \end{aligned}$$

eli  $a(x, n)$  on subadditiivinen muunnoksen  $\tau$  suhteen. Lisäksi

$$a(x, 1) = d(C(x, 1)(x_0), x_0) = d(\phi(x)(x_0), x_0),$$

joten

$$\int_X a(x, 1)d\mu = \int_X d(\phi(x)(x_0), x_0) < \infty$$

kaikilla  $x \in X$ , koska  $C(x, n)$  on integroituva. Lisäksi saadaan

$$\inf_n \frac{1}{n} \int_X a(x, n)d\mu = \inf_n \frac{1}{n} \int_X d(C(x, n)(x_0), x_0) = \nu \geq 0.$$

Kingmanin lauseen mukaan melkein kaikilla  $x \in X$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(x, n)}{n} = \nu$ . Tällöin lemmän 3.9 mukaan melkein kaikilla  $x \in X$  on jonot  $n_i \rightarrow \infty$  ja  $\delta_l \rightarrow 0$  joilla kaikilla  $i$  ja kaikilla  $l \leq n_i$  on

$$a(x, n_i) - a(\tau^l x, n_i - l) = d(C(x, n_i)(x_0), x_0) - d(C(\tau^l x, n_i - l)(x_0), x_0) \geq (\nu - \delta_l)l.$$

Merkitään  $x_n = C(x, n)(x_0)$  ja olkoon  $h_n$  se metrinen funktionaali, joka vastaa pistettä  $x_n$ . Silloin saadaan

$$\begin{aligned} h_{n_i}(x_l) &= d(x_{n_i}, x_l) - d(x_{n_i}, x_0) \\ &= d(C(x, n_i)(x_0), C(x, l)(x_0)) - d(C(x, n_i)(x_0), x_0) \\ &\leq d(C(\tau^l x, n_i - l)(x_0), x_0) - d(C(x, n_i)(x_0), x_0) \\ &\leq -(\nu - \delta_l)l. \end{aligned}$$

Tämä epäyhtälö pätee kaikilla  $n_i$  ja  $l \leq n_i$ , joten se pätee myös, kun  $n_i$  kasvaa rajatta. Olettaen, että  $X$  on separoituva, eli että joukolla  $X$  numeroitua tiheä osajoukko  $Y$ , voidaan valita osajono  $(n'_i)$ , jolla kaikilla  $y \in Y$   $h_{n'_i}(y)$  suppenee. Koska

kaikki  $h_{n_i} \in \Phi(X)$  ovat jatkuvia, numeroituvassa tiheässä osajoukossa suppeneminen tarkoittaa myös suppenemista koko joukossa  $X$ . Vaikka  $X$  ei olisi separoituva,  $\overline{\Phi(X)}$  on silti kompakti. Joukot  $Y_i = \{h \in \overline{\Phi(X)} : \forall l \leq n_i, h(x_l) \leq -(A - \delta_l)l\}$  ovat epätyhjiä, koska  $h_{n_i}$  on joukon  $Y_i$  jäsen ja  $\bigcap_{i=1}^n Y_i$  on laskeva jono ja kompaktiudesta seuraa että  $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i$  on epätyhjä. Mikä tahansa tämän joukon alkio  $h$  toteuttaa yhtälön  $h(x_l) \leq -(A - \delta_l)l$ . Kaikilla  $l$  on voimassa

$$h(x_l) = \lim_{n'_i \rightarrow \infty} h_{n'_i}(x_l) \leq -(\nu - \delta_l)l.$$

Lisäksi  $h(x_l) \geq -d(x_0, x_l) = -d(C(x, l)(x_0), x_0)$  metrinen funktionaalien määrittelyn perusteella ja Kingmanin lauseen mukaan  $\frac{d(C(x, l)(x_0), x_0)}{l} \rightarrow \nu$ , joten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n}h(C(x, n)(x_0)) = \nu.$$

Koska  $C(x, n)$  on ei-laaajentava metriikan  $d$  suhteen, kolmioepäyhtälöstä saadaan kaikilla  $x_1 \in X$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}d(x_1, C(x, n)(x_1)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(d(x_1, x_0) + d(x_0, C(x, n)(x_0))) \\ &\quad + d(C(x, n)(x_0), C(x, n)(x_1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}d(x_0, C(x, n)(x_0)), \end{aligned}$$

ja sama alaraja pätee metrinen funktionaalien määrittelyn perusteella, joten ylläolevassa raja-arvossa  $x_0$  voidaan korvata millä tahansa muulla avaruuden  $X$  pisteellä.  $\square$

Lemma 3.11 perustuu lähteeseen [3].

**Lemma 3.11.** Olkoon  $\|\cdot\|_a$  avaruuden  $\mathbb{R}^N$  normi, joka on yksikköpallon reunan jossain avoimessa ympäristössä funktiona  $C^2$  eli kaikki ensimmäisen ja toisen asteen osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia. Merkitään normin gradienttia pisteessä  $w$  merkinnällä  $\nabla\|\cdot\|_a\Big|_w$ . Olkoon

$$h_{y_n}(x) = \|y_n - x\|_a - \|y_n\|_a$$

missä  $\|y_n\|_a \rightarrow \infty$  kun  $n$  kasvaa rajatta. Tällöin on osajono pisteitä  $y_n$  ja yksikköpallon vektori  $w$  jolla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{y_n}(x) = -x \cdot \left( \nabla\|\cdot\|_a\Big|_w \right).$$

*Todistus.* Yksinkertaisuuden vuoksi ei merkitä osajonoja erikseen. Huomataan ensin, että  $\frac{y_n}{\|y_n\|_a}$  on yksikköpallon vektori. Merkitään  $w_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_a}$  ja tällöin on olemassa osajono jolla  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ . Lisäksi selvästi  $\|w\|_a = 1$ . Korvaten  $y_n$  funktion  $h_{y_n}$  määritelmässä saadaan

$$h_{y_n}(x) = \|y_n\|_a \left( \left\| w_n - \frac{x}{\|y_n\|_a} \right\|_a - \|w_n\|_a \right).$$

Oletetaan, että  $n$  on niin suuri, että  $\|w - w_n\|_a \leq \varepsilon$  ja normin Taylorin sarjasta saadaan

$$\|z\|_a \leq \|w_n\| + (z - w_n) \cdot \nabla \|\cdot\|_a \Big|_{w_n} + \sup_{\|w'\|_{a-1} < \varepsilon} \left| \nabla^2 \|\cdot\|_a \Big|_{w'} \right| \|z - w_n\|_2^2$$

ja

$$\|z\|_a \geq \|w_n\| + (z - w_n) \cdot \nabla \|\cdot\|_a \Big|_{w_n} - \sup_{\|w'\|_{a-1} < \varepsilon} \left| \nabla^2 \|\cdot\|_a \Big|_{w'} \right| \|z - w_n\|_2^2,$$

kun  $z$  on lähellä pistettä  $w_n$ . Koska normi on  $C^2$ , niin termi

$$\sup_{\|w'\|_{a-1} < \varepsilon} \left| \nabla^2 \|\cdot\|_a \Big|_{w'} \right| \leq C$$

jollain  $C \in \mathbb{R}$ . Uudelleennimetään siten, että  $\|y_n\|_a = b_n$ . Nyt

$$\begin{aligned} h_{y_n}(x) &= b_n \left( \left\| w_n - \frac{x}{b_n} \right\|_a - \|w_n\|_a \right) \\ &\leq b_n \left( -\frac{x}{b_n} \right) \cdot \nabla \|\cdot\|_a \Big|_{w_n} + C b_n \left\| \frac{x}{b_n} \right\|_2^2 \\ &= -x \cdot \left( \nabla \|\cdot\|_a \Big|_{w_n} \right) + C b_n \left\| \frac{x}{b_n} \right\|_2^2, \end{aligned}$$

ja koska  $\left\| \frac{x}{b_n} \right\|_2^2 = \left(\frac{1}{b_n}\right)^2 \|x\|_2^2$ , jälkimmäinen termi suppenee nolnaan. Samoin saadaan alaraja, jolloin lopulta saadaan normin gradientin jatkuvuudesta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{y_n}(x) = -x \cdot \left( \nabla \|\cdot\|_a \Big|_w \right). \quad \square$$

### 3.4 Neuroverkko ei-negatiivisessa kartiossa

Olkoon  $X \subset \mathbb{R}^N$ , missä kaikilla  $x \in X$ ,  $x(i) \geq 0$  eli jokainen koordinaatti on ei-negatiivinen. Tällöin esimerkiksi ReLU-aktivaatiolla tasomuunnokset ovat  $T : X \rightarrow X$ . Yleisemmin jos  $W$  ja  $b$  ovat jokaiselta arvoltaan ei-negatiivisia ja aktivaatiofunktio on nouseva ja  $\sigma(\lambda x) \leq \lambda \sigma(x)$  kaikilla  $\lambda > 0$  ja  $x \geq 0$ , niin silloin myös  $T : X \rightarrow X$ .

**Määritelmä 3.12.** Merkitään  $x \leq_N y$  kun  $x(i) \leq y(i)$  kaikilla  $0 \leq i < N$ . Muunnos  $T : X \rightarrow X$  on järjestyksen säilyttävä, jos aina, kun  $x \leq_N y$ , niin  $T(x) \leq_N T(y)$ .

Esimerkiksi kun  $x \leq_N y$ , matriisit  $W$  ja vektorit  $b$  ovat ei-negatiivisia ja aktivaatiofunktio on kasvava, saadaan  $Tx \leq_N Ty$ .

**Määritelmä 3.13.** Muunnos  $T : X \rightarrow X$  on subhomogeeninen jos  $\lambda T(x) \leq T(\lambda x)$  kaikilla  $x \in X$  ja kaikilla  $0 < \lambda \leq 1$ .

Lause 3.14 perustuu lähteeseen [3]. Lauseen todistukseen on lisätty selvennys siitä, miten järjestyksen säilyvyys ja homogeenisuus johtaa siihen, että  $T$  on ei-laajentava.

**Lause 3.14.** Olkoon  $X \subset \mathbb{R}^N$  ei-negatiivinen kartio. Olkoon  $T_i : X \rightarrow X$  joukko tasomuunnoksia jotka ovat kaikki järjestyksen säilyttäviä ja subhomogeenisia. Olkoon  $x_0 \in X$  ja merkitään

$$x_n = T_1 T_2 \dots T_n x_0.$$

Tällöin

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_i |x_n(i)|^{\frac{1}{n}} = e^\lambda$$

ja on jokin koordinaatti  $i_0$  jolla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(i_0)|^{\frac{1}{n}} = e^\lambda.$$

*Todistus.* Merkitään  $M(x, y) = \inf\{a > 0 : y \leq_N ax\}$ . Valitaan nyt  $\lambda^{-1} = \max(M(x, y), M(y, x))$ , jolloin  $x \leq_N \lambda^{-1}y$  ja  $y \leq_N \lambda^{-1}x$ . Nyt koska  $x \leq_N \lambda^{-1}y \leq_N \lambda^{-2}x$ , joten  $\lambda^{-1} \geq 1$ . Koska  $T_i$  on subhomogeeninen ja järjestyksen säilyttävä, saadaan  $\lambda T(y) \leq_N T(\lambda y) \leq_N T(x)$  ja samoin  $\lambda T(x) \leq_N T(\lambda x) \leq_N T(y)$ . Nyt

$$\max(M(T(x), T(y)), M(T(y), T(x))) \leq \lambda^{-1}.$$

Lisäksi  $M(x, y) = \max_k \frac{y(k)}{x(k)}$ , joten  $d(Tx, Ty) \leq \log(\lambda^{-1}) = d(x, y)$  kaikilla muunnoksilla  $T$ . Nyt Lauseen 3.10 mukaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} d(x_0, x_n) = \nu.$$

Lisäksi  $d(x, y) = \log(\max(\sup_i \frac{x(i)}{y(i)}, \sup_i \frac{y(i)}{x(i)}))$ ,

$$\begin{aligned} e^\nu &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} d(x_0, x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left( \sup_i \frac{x_n(i)}{x_0(i)}, \sup_i \frac{x_0(i)}{x_n(i)} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i \frac{x_n(i)^{\frac{1}{n}}}{x_0(i)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_i x_n(i)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Lisäksi koska  $i$  voi saada vain äärellisen määrän arvoja, voidaan määritellä  $i_n$  ehdolla  $x_n(i_n) = \sup_i x_n(i)$ . Nyt saadaan jonon  $i_n$  suppeneva osajono jolla on rajana  $i_0$ . Kaikki koordinaatit ovat ei-negatiivisia joten saadaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(i_0)|^{\frac{1}{n}} = e^\nu. \quad \square$$

Ei-negatiivisessa kartiossa tasojen määrän kasvaessa rajatta suurin aktivaatio kasvaa eksponentiaalisen nopeasti ja on jokin tietty suunta, joka kasvaa nopeimmin.

### 3.5 Neuroverkko yksikkökuutiolla

Ei-negatiivista kartiota mielenkiintoisempi tapaus on neuroverkko, jonka tasomuunnokset säilyttävät aktivaatiot yksikköpallossa. Tässä tapauksessa tarvitaan lisäksi vain "sileää" monotonista normia eli normia joka on yksikköpallon reunan lähellä  $C^2$ . Lisäksi tarvitaan aktivointifunktio, joka on ei-laajentava. Muutetaan tässä tasomuunnokset muotoon  $T(x) = W^T \sigma(Wx + b)$ . Tämä muoto on yleinen jäännösverkkoissa. Lause 3.15 perustuu lähteeseen [3]. Lauseen alkuperäisestä todistuksesta ei käsitelty tapausta, jossa  $h$  ei ole rajafunktio.

**Lause 3.15.** Olkoon  $X = \mathbb{R}^N$  ja olkoon  $\|\cdot\|_N$   $C^2$ -normi, jolla ehdosta  $|x(i)| \leq |y(i)|$  kaikilla  $0 \leq i < N$  seuraa  $\|x\|_N \leq \|y\|_N$ . Oletetaan myös, että tällä normilla varustettuna avaruuden yksikköpallo on aidosti konvekksi. Olkoon  $T_n$  kiinnitetty jono tasomuunnoksia muotoa  $T(x) = W^T \sigma(Wx + b)$  missä  $\|W\|_N = \sup_{x \in X} \frac{\|Wx\|_N}{\|x\|_N} \leq 1$ ,  $b \in X$  ja  $\sigma$  on ei-laajentava. Nyt melkein kaikilla  $x_0 \in X$  on olemassa vektori  $v$  jolla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} T_1 T_2 \dots T_n x_0 = v.$$

*Todistus.* Yksinkertaisuuden vuoksi olkoon metristen funktionaalien alkuperäinen piste vektoriarvaruuden  $X$  nollavektori. Huomataan, että jos  $\|T_1 T_2 \dots T_n x_0\|_N$  on rajoitettu, niin lause pitää triviaalisti paikkansa. Huomataan, että

$$\begin{aligned} \|T_i x - T_i y\|_N &= \|W_i^T \sigma(W_i x + b) - W_i^T \sigma(W_i y + b)\|_N \\ &\leq \|W_i\|_N \|\sigma(W_i(x) + b) - \sigma(W_i(y) + b)\|_N \\ &\leq \|W_i(x) - W_i(y)\|_N \leq \|x - y\|_N \end{aligned}$$

kaikilla  $i$  oletuksien nojalla. Tämän seurauksena myös kahden pisteen välinen etäisyys ei kasva rajatta muunnoksien  $T_i$  seurauksena. Tällöin kahdesta eri pisteestä  $x_0$  ja  $x'_0$  alkavat jonot eroavat vain äärellisesti, ja tämä ero häviää termin  $\frac{1}{n}$  seurauksena, joten  $v$  ei riipu alkupisteestä  $x_0$ . Olkoon  $y_n = T_1 T_2 \dots T_n x_0$ . Nyt lauseen 3.10 mukaan jollain  $h \in \overline{\Phi(X)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|y_n - x_0\|_N = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} h(y_n) = \nu.$$

Jos  $h \in \Phi(X)$ , silloin  $h(y_n) = h_x(y_n) = \|y_n - x\|_N - \|x\|_N$  jollain  $x \in X$ . Nyt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} h(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} (\|y_n - x\|_N - \|x\|_N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|y_n - x_0\|_N.$$

Selvästi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|x\|_N = 0$  ja normit ovat ei-negatiivisia, joten ainoa mahdollinen yhteinen raja-arvo on 0 eli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|y_n - x\|_N = 0 = \nu$ . Oletetaan nyt, että  $h$  on rajafunktio eli  $h \in \overline{\Phi(X)} \setminus \Phi(X)$ . Valitaan pisteet  $z'_k$  siten, että  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{z'_k}$  ja uudelleennimeämällä saadaan tällöin myös lauseen 3.11 mukaan osajono  $z_k$  jolla  $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{z_k}$  ja on olemassa yksikköpallon vektori  $w$  jolla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{z_k}(x) = -x \cdot \left( \nabla \|\cdot\|_N \Big|_w \right).$$

Nyt saadaan mahdollisesti uudelleennimeämällä vektoreita  $z_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|y_n\|_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{k \rightarrow \infty} h_{z_k}(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} y_n \cdot \left( \nabla \|\cdot\|_N \Big|_w \right) = \nu.$$

Koska  $\nu \in \mathbb{R}$  ja normin gradientti on rajoitettu yksikköpallossa,  $\frac{1}{n} y_n$  suppenee johonkin vektoriin  $v$  jolla  $v \cdot \left( \nabla \|\cdot\|_N \Big|_w \right) = \nu$ .  $\square$

### 3.6 Cut-off -ilmiö

Markovin ketjujen teoriasta löytyy myös työkaluja neuroverkkojen tutkimiseen. Markovin ketjuksi sanotaan jonoja satunnaismuuttujia, joista seuraavan muuttujan valinta ei riipu muista satunnaismuuttujista kuin juuri edeltävästä. Tutkitaan nyt yksinkertaisia neuroverkkoja muotoa

$$X_{i+1} = \sigma(W_i \cdot X_i),$$

missä  $W_i$  on valittu toisistaan riippumattomasti jostain jakaumasta ja  $X_0$  on kiinnitetty aloituspiste. Tällaista neuroverkkoa voidaan pitää Markovin ketjuna, koska todennäköisyys, että päädytään pisteeseen  $X_{i+1}$  pisteestä  $X_i$  on sama kuin todennäköisyys, että  $W_i$  on sopiva ja tämä ei riipu aiemmista tasoista. Olkoon  $M_n(x, t, \cdot)$  jono Markovin ketjujen todennäköisyysjakaumia, missä ketjut on aloitettu pisteestä  $x$  ja muuttuja on ketjun  $n$  jakauma ajanhetkellä  $t$ . Olkoon näillä ketjuilla muuttumaton jakauma  $\pi_n$ . Määritellään

$$d_n(t) = \max_x \|M_n(x, t, \cdot) - \pi_n\|_{L^1}.$$

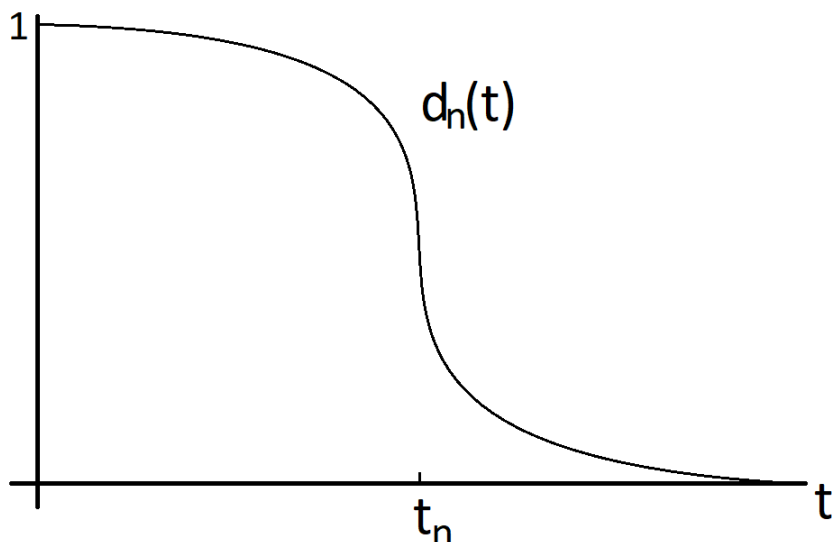
Nyt jos  $w_n = o(t_n)$ ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n(t_n - \alpha w_n) = 1$$

ja

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(t_n + \alpha w_n) = 0,$$

sanotaan että Markovin ketjuilla on cut-off kohdassa  $t_n$  ikkunalla  $w_n$ . Intuitiivisesti siis  $d_n$  on suuri juuri ennen kohtaa  $t_n$  ja pieni juuri sen jälkeen suurilla  $n$  arvoilla, eli  $d_n$  alkaa muistuttamaan askelfunktiota.



Cut-off on "suuriulotteinen" ominaisuus, se ilmenee esimerkiksi kun Markovin ketjut määritellään  $n$ -ulotteisiin hyperkuutioihin.

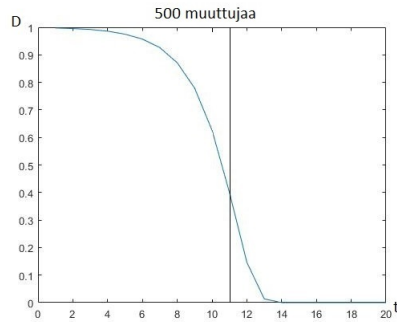
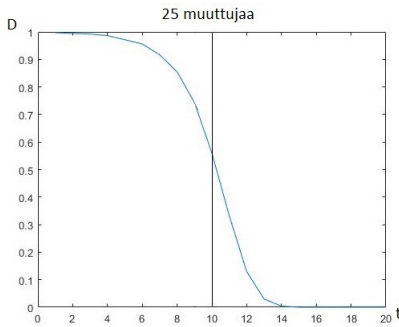
### 3.7 Pieni tutkimus Cut-offista

Valitaan  $W_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$  siten, että jokainen matriisin  $W_i$  alkio on tasaisesta jakaumasta  $U(-\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}})$ . Olkoon  $X_0$  jokin  $N$ -ulotteisen yksikkökuution vektori ja määritellään  $X_{k+1} = \sigma(W_k \cdot X_k)$ , missä  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ . Jaetaan väli  $[-1, 1]$  1001 osaan ja olkoon  $D_k \in \mathbb{R}^{1001}$  sellainen, että sen koordinaatti  $i$  kuvaa välin  $[\frac{2i}{1001} - 1, \frac{2i+2}{1001} - 1)$  pisteiden esiintymiskertoja vektorissa  $X_k$  jaettuna arvolla  $N$ . Tällöin selvästi  $D_k$  on Markovin ketju, koska se on todennäköisyysjakauma joka ei riipu edeltävää aiemmista jakaumista. Välin jako 1001 osaan on mielivaltainen, mutta tarpeeksi iso tarkkuus ja tällöin 0 on "keskimmäisessä" välissä, jolloin voidaan olettaa, että rajalla kaikki arvot ovat tällä välillä.

```

function CUTOFFTEST(N,t)
  for i = 0 to 1000 do
    X ← U(-1, 1)N
    for j = 0 to t do
      W ← U(- $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ )N×N
      X ← tanh(W · XT)
      for k = 1 to 1001 do
        D(k) ← Length(X(X ≥  $\frac{2t-2}{1001} - 1$ , X <  $\frac{2t}{1001} - 1$ ))
      end for
      D ←  $\frac{D}{N}$ 
      D(501) ← 1 - D(501)
      A(i) ← A(i) + max(D)
    end for
  end for
  A =  $\frac{A}{1000}$  return A
end function

```



Selvästi cut-off-ilmiö näkyy, ja huomataan, että cut-off-aika ei juurikaan muutu 25 ja 500 muuttujan välillä.

### 3.8 Neuroverkon koon valinta

Neuroverkon ulottuvuudet, syvyys ja leveys, sekä alustuspainot ovat neuroverkon kannalta selvästi merkityksellisiä asioita. Äärettömässä syvyydessä ei tapahdu erityisen monimutkaisia asioita, ja laskenta on erittäin raskasta suurilla tasomäärillä. Pienemmällä tasomäärillä laskenta on helpompaa, joskin muuttujia on silti paljon.



Kannattaako tasomäärä valita alle cut-off-pisteen vai sen ylitse? Cut-off-pistettä pidempien neuroverkkojen aktivaatiot ovat pieniä, jolloin kaikki "arvaukset" ovat huonoja neuroverkon opettamisen kannalta. Lyhyemmät neuroverkot ovat satunnaisempia, ja aktivaatiot voivat olla mitä vain, mutta toisaalta liian lyhyen neuroverkon toiminta voi olla liian yksinkertaista kouluttaa tarkaksi.

## 4 Rajoitetun variaation funktiot

Tässä osassa tutkitaan, miten hyvin neuroverkoilla voidaan esittää yksikköympyrällä määritettyjä rajoitetun variaation funktioita. Rajoitetun variaation funktiot ovat tietyllä tapaa siistejä funktioita, sillä yksiulotteisessa tapauksessa niillä voi olla vain numeroituva määrä epäjatkuvuuskohtia. Lisäksi rajoitetun variaation funktion ensimmäiset derivaatat ovat olemassa melkein kaikkialla. Rajoitetun variaation funktiot ovat luonnollinen tapa rajoittaa esimerkiksi optimointitehtäviä "siistimpien" funktioiden joukkoon. Tässä osiossa merkitään merkinnällä  $S^1$  kaksiulotteista yksikköympyrää.

**Määritelmä 4.1.** Kaikilla  $(x, y) \in S^1$  on olemassa sellainen  $\alpha \in [0, 2\pi)$  jolla  $(x, y) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ . Tällöin on luonnollista tutkia funktion  $f$  periodista laajennosta  $f^*(\alpha) = f(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ , jolla kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$   $f^*(\alpha + 2k\pi) = f^*(\alpha)$ . Olkoon nyt mitallisen funktion  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  variaatio

$$V_{[0,2\pi)}(f^*) = \frac{1}{2\pi} \sup \left\{ \int_0^{2\pi} f^*(\alpha) \phi'(\alpha) d\alpha, \phi \in C_{per}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}.$$

Tässä merkintä  $C_{per}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tarkoittaa sitä, että  $\phi$  on periodinen jatkuvasti derivoituva funktio  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Erityisesti  $\phi(0) = \phi(2\pi)$ . Funktio  $f$  on rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä, jos se on mitallinen ja sen variaatio on rajoitettu. Toinen tapa kirjoittaa variaatio on

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |f^*(\alpha_{i+1}) - f^*(\alpha_i)| : n \geq 2, 0 = \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 2\pi \right\} < \infty.$$

**Lemma 4.2.** Olkoon  $f$  derivoituva funktio yksikköympyrällä. Tällöin kaikilla  $\phi \in C_{per}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  on voimassa

$$\int_0^{2\pi} f^*(\alpha) \phi'(\alpha) d\alpha = - \int_0^{2\pi} \phi(\alpha) (f^*)'(\alpha) d\alpha.$$

*Todistus.* Osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_0^{2\pi} f^*(\alpha) \phi'(\alpha) d\alpha = f^*(2\pi) \phi(2\pi) - f^*(0) \phi(0) - \int_0^{2\pi} \phi(\alpha) (f^*)'(\alpha) d\alpha,$$

ja funktioiden  $\phi$  ja  $f^*$  määritelmän perusteella  $\phi(0) = \phi(2\pi)$  ja  $f^*(0) = f^*(2\pi)$ .  $\square$

**Määritelmä 4.3.** Olkoon rajoitetun variaation funktion BV-normi

$$\|y\|_{BV} = \|y\|_\infty + V_{[0,2\pi)}(y^*).$$

Selvästi  $\|y\|_{BV} \geq 0$ , ja 0 jos ja vain jos  $y = 0$  melkein kaikkialla, kolmioepäyhtälö ja homogeenisuus pätevät integraalin, supremumin ja normin  $\|\cdot\|_\infty$  ominaisuuksien perusteella.

**Lemma 4.4.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä. Tällöin se on  $L^2$  integroitava, joten se voidaan kirjoittaa Fourierin sarjana

$$y^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\theta) + b_k \cos(k\theta).$$

missä  $|a_k|, |b_k| \leq 2 \frac{\|y\|_{BV}}{k}$ .

*Todistus.* Huomataan, että

$$|y^*(\theta)| \leq |y^*(0)| + |y^*(\theta) - y^*(0)| \leq |y^*(0)| + V_{[0,2\pi]}(y^*),$$

joten  $y^*$  on rajoitettu, ja koska väli on rajoitettu,  $y^*$  on  $L^2$ -integroitava. Carlesonin teoreeman [4] perusteella se voidaan siis kirjoittaa Fourierin sarjana. Valitaan  $\phi(\theta) = -\cos(k\theta)$ , jolloin  $\phi'(\theta) = k \sin(k\theta)$ . Nyt saadaan

$$\|y\|_{BV} \geq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} y^*(\theta) \sin(k\theta) d\theta \geq \frac{ka_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta) d\theta \geq \frac{ka_k}{2}.$$

Valitsemalla  $\phi(\theta) = \cos(k\theta)$  saadaan samalla arviolla  $-\frac{ka_k}{2} \leq \|y\|_{BV}$ , ja valitsemalla  $\phi(\theta) = \pm \sin(k\theta)$  saadaan samat rajat jonolle  $b_k$ . Täten saadaan

$$|a_k|, |b_k| \leq 2 \frac{\|y\|_{BV}}{k}. \quad \square$$

## 4.1 Optimointitehtävä

Olkoon  $y : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitetun variaation funktio ja olkoon  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $a_i \in \{-1, 1\}$  ennalta määrätyt ja  $W = (w_1, \dots, w_m)$ ,  $w_i \in \mathbb{R}^2$ . Merkitään

$$f_{W,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m a_i \sigma(w_i \cdot x),$$

missä  $\sigma(x) = \max\{0, x\}$ . Kutsutaan funktioiden  $f_{W,a}$  joukkoa nimellä  $H_{ma}$ . Olkoon

$$\Phi(W) = \int_{S^1} |f_{W,a}(x) - y(x)|^2 d\mu = \|f_{W,a} - y\|_{L^2(\mu)}^2.$$

Nyt optimointitehtävänä on

$$\inf_W \Phi(W).$$

**Esimerkki 4.5.** Valitaan  $a_1 = -a_2 = 1$  ja olkoon  $y(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{\{x_2 \geq 0\}} x_1$ . Huomataan, että  $y$  ei ole jatkuva, mutta on rajoitetun variaation funktio. Koska kaikki

joukon  $H_{ma}$  funktiot ovat Lipschitz-jatkuvia, on selvästi  $\Phi(W) > 0$  kaikilla  $W \in \mathbb{R}^4$ . Kuitenkin jos valitaan  $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{h}(0, 1) + \sqrt{2}(1, 0)$  ja  $w_2 = \frac{\sqrt{2}}{h}(0, 1)$ , saadaan

$$\begin{aligned} f_{W_h} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sigma \left( \frac{\sqrt{2}}{h} x_2 + x_1 \right) - \sigma \left( \frac{\sqrt{2}}{h} x_2 \right) \right) \\ &= \frac{\sigma(x_2 + hx_1) - \sigma(x_2)}{h} \rightarrow \sigma'(x_2)x_1 = \mathbf{1}_{\{x_2 \geq 0\}}x_1, \end{aligned}$$

kun  $h \rightarrow 0$ . Koska  $|f_{W_h}| \leq 3$ , saadaan dominoidun konvergenssin seurauksena  $\inf_W \Phi(W) = 0$ .

Näin määriteltynä optimointitehtävällä ei siis välttämättä ole ratkaisua. Tämä ongelma johtuu siitä, ettemme rajoita painojen  $W$  komponentteja äärellisiksi. Valitaan  $R > 0$  joka on tarpeeksi suuri ja merkitään  $\Phi_R(W) = \max\{\Phi(W), 4(|W|^2 - R^2)\}$ , jolloin saadaan optimointitehtävä

$$\inf_W \Phi_R(W).$$

Merkitään lisäksi  $|W| = (\sum_{k=1}^m \|w_k\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ . Jos  $|W_R| > R + \|y\|_{L^2(\mu)}$  niin  $4(|W_R|^2 - R^2) > 2\|y\|_{L^2(\mu)} + \|y\|_{L^2(\mu)}^2 > \Phi(W)$ , joten esimerkiksi  $W = 0$  antaisi paremman arvion. Nyt siis jos  $W_R$  on minimoija, niin selvästi  $|W_R| \leq R + \|y\|_{L^2(\mu)}$ .

## 4.2 Merkintöjä

Määritellään yksikköympyrällä  $S^1$  jatkuvasti derivoituvien funktioiden  $C^1$  normi  $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ , missä  $\|f\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in S^1} |f(x)|$ . Lisäksi muistetaan  $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f^2 d\mu$ . Olkoon  $H_{ma}$  joukko funktioita muotoa

$$f_{W,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^m a_i \sigma(w_i \cdot x),$$

missä  $a = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $a_i = \pm 1$ ,  $w_i \in \mathbb{R}^2$  ja  $x \in S^1$ . Merkitään  $|W| = (\sum_{k=1}^m \|w_k\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $I_+ = \{i : a_i = 1\}$  ja  $I_- = \{i : a_i = -1\}$  sekä  $\bar{m} = \min(|I_+|, |I_-|)$ . Huomataan, että voidaan mahdollisesti merkkiä vaihtamalla olettaa, että  $\bar{m} = |I_-| \leq |I_+|$ . Lisäksi järjestellään  $a$  uudelleen siten että  $a = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, 1, 1)$  eli ensimmäiset  $2\bar{m}$  vuorottelevat ja lopussa on vain mahdolliset jäljelle jäävät arvot 1. Merkitään vielä  $f_{as} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  ja  $f_s = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ , kun  $x = (x_1, x_2)$ . Tässä  $f_{as}$  on funktion  $f$  antisymmetrinen osa ja  $f_s$  vastaavasti symmetrinen osa. Lisäksi määritellään joukko funktioita  $L_{al} = \{f \in L^2 : f_{as} \text{ on lineaarinen}\}$ . Lisäksi  $L_{al}^C$  on selvästi joukko funktioita, joilla  $f_{as} \neq 0$ .  $L_{al}$  on hyvä joukko funktioita, koska  $H_{ma} \subset L_{al}$ , sillä  $w_i \cdot x$  on lineaarinen ja  $\sigma(t) = \frac{|t|+t}{2} \in L_{al}$ .

## 4.3 Log-Sobolev-epäyhtälö

Optimointitehtävän optimin tutkimiseen tarvitaan dimensiosta  $2m$  riippumaton arvointimenetelmä, sillä halutaan neuroverkon tasojen lukumäärän olevan rajoittamaton.

**Määritelmä 4.6.** Olkoon  $d\mu$  todennäköisyysmitta avaruudessa  $R^N$ . Sanotaan, että  $\mu$  toteuttaa Log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L$  jos kaikilla Lipschitz-jatkuvilla funktioilla  $u$  joilla  $\int u^2 d\mu = 1$  on voimassa

$$\int u^2 \log(u^2) d\mu \leq 2C_L \int |\nabla u|^2 d\mu.$$

Lisäksi sanotaan, että  $\mu$  toteuttaa Poincarén epäyhtälön vakiolla  $C_P$  jos kaikilla Lipschitz-jatkuvilla funktioilla joilla  $\int u d\mu = 0$  on voimassa

$$\int u^2 d\mu \leq C_P \int |\nabla u|^2 d\mu.$$

**Lemma 4.7.** Gaussin mitta  $d\mu_\Lambda = c_{n,\Lambda} e^{-\frac{\Lambda\|x\|^2}{2}} dx$ , missä  $c_{n,\Lambda}$  missä  $c_{n,\Lambda}$  normalisoi koko avaruuden mitaksi 1, toteuttaa Log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L = \frac{1}{\Lambda}$  [7]

**Lemma 4.8** (Holley-Stroockin perturbaatiolemma[8]). Jos  $d\mu$  toteuttaa Log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L$ , niin mitta  $C^{-1} e^{g(x)} d\mu(x)$  toteuttaa Log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L e^{\text{osc}(g)}$ . Tässä  $\text{osc}(g) = \sup_{x \in X} g(x) - \inf_{x \in X} g(x)$ .

**Lemma 4.9** (Aidan perturbaatiolemma.[1]). Oletetaan, että  $\mu$  toteuttaa Log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L$ . Oletetaan lisäksi, että funktiolla  $g$  ja vakiolla  $\beta \in (0, \frac{1}{4}]$  on voimassa

$$\int e^{2C_L(1+\beta)|\nabla g|^2} d\mu \leq 1 + \frac{\beta}{2},$$

$$\int e^g d\mu \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

ja

$$\int e^{2g} d\mu = 1.$$

Silloin mitalla  $e^{2g(x)} d\mu(x)$  on voimassa Poincarén epäyhtälö vakiolla

$$\frac{64c_L(1+\beta)(1-\frac{\beta}{2})}{\beta^2}.$$

Lemmat 4.10 ja 4.11 perustuvat lähteeseen [2].

**Lemma 4.10.** Olkoon  $y : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitetun variaation funktio ja olkoon  $r \in \mathbb{N}$ . On olemassa  $y_r \in C^\infty(S^1)$  jolla  $\|y_r\|_\infty \leq \|y\|_\infty$ ,  $\|y_r\|_{C^1} \leq 5r\|y\|_{BV}$  ja

$$\|y - y_r\|_2^2 \leq 16\|y\|_{BV}^2 \frac{1}{r}.$$

*Todistus.* Olkoon  $u$  lämpöyhtälön  $\partial_t u = \Delta u$  ratkaisu alkupisteellä  $u(\theta, 0) = y^*(\theta)$ . Merkitään vielä  $y_r(\theta) = u(\theta, r^{-2})$ . Maksimiominaisuuden mukaan lämpöyhtälön ratkaiseva funktio saa maksiminsa kun  $t = 0$  tai kun  $\theta = 0$ , ja jos  $u(0, t)$  ei ole vähenevä, niin  $u(\theta_0, t) > u(0, t)$  jollain  $\theta_0 \neq 0$ , eli maksimia ei saavuteta, kun  $t > 0$ . Joten siis

maksimi on joko  $u(0,0)$  tai  $u(\theta,0)$ , joten saadaan  $\|y_r\|_\infty \leq \|y\|_\infty$ . Kirjoitetaan  $y$  Fourierin sarjan avulla

$$y^*(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\theta) + b_k \cos(\theta)$$

ja myös funktiolle  $u$

$$u(\theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\theta) e^{-k^2 t} + b_k \cos(k\theta) e^{-k^2 t}.$$

Saadaan derivoimalla ja lemmän 4.4 avulla

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, t) \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|k + |b_k|k) e^{-k^2 t} \\ &\leq 4\|y\|_{BV} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} \\ &\leq 4\|y\|_{BV} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \|y\|_{BV}. \end{aligned}$$

Täten kaikilla  $r \geq 1$   $|y'_r(\theta)| = \left| \frac{\partial}{\partial \theta} u(\theta, r^{-2}) \right| \leq 4r\|y\|_{BV}$  ja selvästi  $\|y\|_{C^1} = \|y_r\|_\infty + \|y'_r\|_\infty \leq 5r\|y\|_{BV}$ . Arvioidaan lisäksi  $\|y - u(\cdot, t)\|_2^2$  Fourierin sarjan avulla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |y^*(\theta) - u(\theta, t)|^2 d\theta &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| a_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 + \left| b_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^r \left( \left| a_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 + \left| b_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 \right) \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Arvioidaan jälkimmäistä termiä lemmän 4.4 avulla

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq 8\|y\|_{BV}^2 \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 8\|y\|_{BV}^2 r^{-1}.$$

Arvioidaan myös lemmaa 4.2 käyttäen ensimmäistä termiä ja sitä, että  $1 - e^{-k^2 t} \leq k^2 t$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^r \left( \left| a_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 + \left| b_k (1 - e^{-k^2 t}) \right|^2 \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^r |tk^2 a_k|^2 + |tk^2 b_k|^2 \\ &\leq 8\|y\|_{BV}^2 t^2 \sum_{k=1}^r k^2 = 8\|y\|_{BV}^2 t^2 \frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \\ &\leq 8\|y\|_{BV}^2 t^2 r^3. \end{aligned}$$

Nyt sijoittamalla  $t = r^{-2}$  ylläoleviin epäyhtälöihin saadaan

$$\|y - u(\cdot, r^{-2})\|_2^2 \leq \frac{16\|y\|_{BV^2}}{r}. \quad \square$$

**Lemma 4.11.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä ja kirjoitetaan  $y = y_1 + y_2$  missä  $y_1 \in L_{al}$  ja  $y_2 \in L_{al}^C$ . Silloin  $\|y_1\|_{BV} \leq 4\|y\|_{BV}$ .

*Todistus.* Funktio  $y_1$  voidaan kirjoittaa muodossa  $y_s(x) + l(x)$ , missä  $y_s$  on funktion  $y$  symmetrinen osa ja  $l$  on lineaarinen. Symmetrinen osa voidaan kirjoittaa muodossa  $y_s = \frac{y(x) - y(-x)}{2}$  joten  $\|y_s\|_{BV} \leq \|y\|_{BV}$ . Funktion osien määrittelyn perusteella  $\int_{S^1} y_s(x)l(x)dx = 0$  ja samoin  $\int_{S^1} y_2(x)l(x)dx = 0$ , joten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} y(x) \frac{l(x)}{\|l\|_\infty} dx = \frac{\|l\|_\infty}{2\pi} \int_{S^1} \left( \frac{l(x)}{\|l\|_\infty} \right)^2 dx.$$

Koska  $l(x)$  on lineaarinen, se on muotoa  $l(x) = ax_1 + bx_2$ , ja  $\|l\|_\infty^2 = a^2 + b^2$ . Nyt saadaan

$$\int_{S^1} \left( \frac{l(x)}{\|l\|_\infty} \right)^2 dx = \|l\|_\infty^{-2} \int_0^{2\pi} (a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha))^2 d\alpha = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{\|l\|_\infty^2} = \pi.$$

Täten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} y(x) \frac{l(x)}{\|l\|_\infty} dx = \frac{\|l\|_\infty}{2}.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälöllä saadaan

$$\|l\|_\infty = \frac{2}{2\pi} \int_{S^1} y(x) \frac{l(x)}{\|l\|_\infty} dx \leq \sqrt{2}\|y\|_2,$$

joten

$$\|y_1\|_{BV} \leq \|y_s\|_{BV} + \|l\|_{BV} = \|y\|_{BV} + V_{[0,2\pi]}(l^*) + \sqrt{2}\|y\|_2.$$

Koska  $\|y\|_2^2 = \int_{S^1} y^2 d\mu \leq \int_{S^1} \|y\|_\infty^2 d\mu$ , saadaan  $\|y\|_2 \leq \|y\|_\infty$ . Lisäksi funktion  $l$  lineaarisuudesta yksikköympyrällä saadaan kulmaa vaihtamalla  $l^*(\theta) = \|l\|_\infty \sin(\theta)$ . Nyt jollain  $\phi \in C_{per}^1(\mathbb{R}\mathbb{R})$  saadaan lemmän 4.2 perusteella

$$\begin{aligned} V_{[0,2\pi]}(l^*) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l^*(\theta)\phi'(\theta)d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (l^*)'(\theta)\phi(\theta)d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(l^*)'(\theta)\phi(\theta)|d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |(l^*)'(\theta)|d\theta \\ &= 4 \frac{\|l\|_\infty}{2\pi} \leq \|l\|_\infty. \end{aligned}$$

Lopulta  $\|y_1\|_{BV} \leq \|y\|_{BV} + (1 + \sqrt{2})\|y\|_\infty \leq 4\|y\|_{BV}$ . □

## 4.4 Differentiaaaligeometriaa

**Lause 4.12** (Divergenssilause [5]). Olkoon  $(F_1, F_2, \dots, F_n) = F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sellainen, että  $F_i \in C^1(B(0, r))$ . Tällöin  $\int_{B(0, r)} \nabla \cdot F d\mu(x) = \int_{\partial B(0, r)} F(x) \cdot n(x) d\sigma(x)$ , missä  $n(x)$  on pallopinnalla ulospäin osoittava yksikkövektori ja  $\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i$ . Tässä  $\sigma$  on avaruuden  $\mathbb{R}^{n-1}$  Lebesguen mitta.

**Lause 4.13** (Osittaisintegrointi avaruudessa  $L^2(e^{-\|x\|_2^2} d\mu)$ ). Olkoon  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joissa molemmat ovat rajoitettuja  $C^1$ -funktioita avaruudessa  $L^2(e^{-\|x\|_2^2} d\mu)$ . Tällöin  $\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla f \cdot F) e^{-\|x\|_2^2} d\mu = - \int_{\mathbb{R}^n} f (\nabla \cdot F) e^{-\|x\|_2^2} d\mu$ .

*Todistus.* Tavallisen derivoinnin tulosäännöstä saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f F_i) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) F_i + f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \right),$$

joten

$$\nabla \cdot (f F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f F_i) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) F_i + f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \right) = (\nabla f) \cdot F + f \nabla \cdot F.$$

Divergenssilauseen mukaan saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0, r)} f e^{-\|x\|_2^2} F \cdot n(x) d\sigma &= \int_{B(0, r)} \nabla \cdot (f F e^{-\|x\|_2^2}) d\mu \\ &= \int_{B(0, r)} (\nabla f \cdot F) e^{-\|x\|_2^2} d\mu + \int_{B(0, r)} f (\nabla \cdot F) e^{-\|x\|_2^2} d\mu. \end{aligned}$$

Nyt koska  $f$  ja  $F$  ovat rajoitettuja, on olemassa  $C' \in \mathbb{R}$  jolla  $-C' \leq f F \cdot n(x) \leq C'$ . Lisäksi  $n$ -ulotteisen pallon pinta-ala kasvaa luokassa  $O(r^{n-1})$ , joten saadaan jollain  $C \in \mathbb{R}$

$$-Cr^{n-1} \leq \int_{\partial B(0, r)} f F \cdot N d\sigma \leq Cr^{n-1}.$$

Huomataan, että nämä pätee kaikilla  $r \in \mathbb{R}$  ja  $\lim_{r \rightarrow \infty} \pm Cr^{n-1} e^{-r^2} = 0$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , joten saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla f) \cdot F e^{-\|x\|_2^2} d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} f \nabla \cdot (F e^{-\|x\|_2^2}) d\mu = 0. \quad \square$$

## 4.5 Stokastiset prosessit ja Fokker-Planck-yhtälö

Stokastisen gradienttilaskun tutkimiseksi tarvitaan stokastisten prosessien ja differentiaaliyhtälöiden teoriaa. Stokastisen gradienttilaskun etuna on "kohinan" eli satunnaisen pienen värähtelyn lisääminen, jolloin gradienttilasku ei jää jumiin pieniin kuoppiin. Kohina siloittaa näin gradienttilaskua.

**Määritelmä 4.14.** Olkoon  $(X, \mu)$  jokin todennäköisyysavaruus ja  $T$  jokin indeksijoukko. Stokastinen prosessi on perhe satunnaismuuttujia  $P_t(x)$ , missä  $x \in X$  ja  $t \in T$ .

**Määritelmä 4.15.** Olkoon  $B_t(x) : \mathbb{R}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  stokastinen prosessi jolla  $B_0 = 0$ ,  $B_t$  on jatkuva kaikilla  $t \in [0, 1]$ , kaikilla  $t > 0$ ,  $u \geq 0$   $B_{t+u} - B_t \sim N(0, u)$  ja  $B_{t+u} - B_t$  on riippumaton muuttujista  $B_s$ ,  $s \leq t$ . Tällaista prosessia kutsutaan Wiener-prosessiksi tai "kohinaksi".

**Määritelmä 4.16.** Olkoon  $G$  vasemmalta jatkuva stokastinen prosessi jolla  $\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 G^2 dt d\mu < \infty$ . Merkitään  $\int_0^1 G dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} G_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$ . Tätä kutsutaan stokastiseksi integraaliksi tai Itôn integraaliksi.

**Lemma 4.17** (Fokker-Planck-yhtälö [12]). Olkoon  $X_t$  sellainen stokastinen prosessi, että  $X_{t+s} - X_t = \int_t^{t+s} G(X_u, u) du + \int_t^{t+s} H(X_u, u) dB_u$  kaikilla  $t \in [0, 1]$  ja  $s \in [0, 1 - t]$ . Toinen tapa merkitä tätä on  $dX_t = G(X_t, t) dt + H(X_t, t) dB_t$ . Tällöin prosessin todennäköisyysjakauma  $p(x, t)$  toteuttaa yhtälön

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\nabla \cdot G(X_t, t) p + \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla (Hp).$$

**Lause 4.18.** Määritellään neuroverkon stokastinen gradienttilasku stokastisen differentiaaliyhtälön

$$dW_t = -\nabla \Phi_R(W_t) dt + \sqrt{2\varepsilon} dB_t$$

suhteen. Toisin sanottuna siis

$$W_{t+s} - W_t = \int_t^{t+s} -\nabla \Phi_R(W_u) du + \int_t^{t+s} \sqrt{2\varepsilon} dB_u$$

kaikilla  $t \in [0, 1]$ ,  $s \in [0, 1 - t]$ . Tällöin kun  $p(W, t)$  kuvaa prosessin  $W_t$  jakaumaa ajanhetkellä  $t$ ,  $p(W, t)$  toteuttaa Fokker-Planck-yhtälön

$$\frac{\partial}{\partial t} p = \nabla \cdot (p \nabla \Phi_R(W_t) + \varepsilon^2 \nabla p).$$

*Todistus.* Sijoittamalla  $A(X_t, t) = -\nabla \Phi_R(W_t)$  ja  $B(X_t, t) = \sqrt{2\varepsilon}$  lemmän 4.17 mukaan saadaan

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -\nabla \cdot (-\nabla \Phi_R(W_t) p) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\sqrt{2\varepsilon}^2 \varepsilon^2 \nabla p) = \nabla \cdot (p \nabla \Phi_R(W_t) + \varepsilon^2 \nabla p). \quad \square$$

## 4.6 Virhefunktioista

Tässä osiossa tutkitaan virhefunktioita

$$\Phi(W) = \|f_W - y\|_{L^2(\mu)}^2.$$

Mitasta  $\mu$  oletetaan vain, että se on todennäköisyysmitta yksikköympyrällä. Lisäksi tässä osiossa tarvitaan vain  $L^2(\mu)$ -normia, joten kirjoitetaan se muodossa  $\|\cdot\|$ . Tämä osio perustuu kokonaan lähteeseen [2].

**Lemma 4.19.** Olkoon rajoitetun variaation funktio  $y$  sellainen, että  $\|y\| = 1$ . Silloin

$$\Phi(W) \leq (|W| + 1)^2,$$

$$|\nabla_W \Phi(W)|^2 \leq 4\Phi(W)$$

ja

$$\nabla_W \Phi(W) \cdot W \geq \Phi(W) - 1.$$



*Todistus.* Cauchy-Schwarzin epäytälöllä kaikilla  $f_W \in H_{ma}$  ja kaikilla  $x \in S^1$

$$\begin{aligned} |f_W(x)| &= \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{i=1}^m a_i \sigma(w_i \cdot x) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \sum_{i=1}^m a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^m \sigma(w_i \cdot x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{m}} m^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^m |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |W|, \end{aligned}$$

koska  $a_i^2 = 1$  ja  $\sigma(w_i \cdot x) \leq |w_i|^2$ . Myös Cauchy-Schwarzilla

$$\left| \int_{S^1} f_W y d\mu \right| \leq \|f_W\| \|y\| = \|f_W\|^2 \leq |W|.$$

Virhefunktio saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \Phi(W) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f_W - y)^2 d\mu \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f_W^2 d\mu + \frac{2}{2\pi} \int_{S^1} f_W y d\mu + \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} y^2 d\mu \\ &\leq |W|^2 + 2|W| + 1. \end{aligned}$$

Lisäksi derivoimalla painon  $w_i$  suhteen saadaan

$$\frac{\partial}{\partial w_i} f_W(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} a_i \sigma'(w_i \cdot x) x,$$

joten

$$\begin{aligned} \|\nabla_W f_W\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial w_i} f_W(x) \right)^2 d\mu \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \sum_{i=1}^m a_i^2 |x|^2 \sigma'(w_i \cdot x)^2 d\mu. \end{aligned}$$

Lisäksi  $a_i^2 = 1$ ,  $|x| = 1$  ja  $\sigma(y) \leq 1$  kaikilla  $y \in S^1$  joten

$$\|\nabla_W f_W\|^2 \leq 1.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} |\nabla_W \Phi(W)| &= |\nabla_W \|f_W - y\|^2| \\ &= |\nabla_W \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f_W - y)^2 d\mu| \leq 2 \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |\nabla_W f_W (f_W - y)| d\mu \\ &\leq 2 \|\nabla_W f_W\| \|f_W - y\| \leq 2 \|f_W - y\| = 2\sqrt{\Phi(W)}, \end{aligned}$$

eli  $|\nabla_W \Phi(W)|^2 \leq 4\Phi(W)$ . Lopuksi, koska  $f_{\lambda W}(x) = \lambda f_W(x)$  kaikilla  $\lambda > 0$ , saadaan

$$\nabla f_W(x) \cdot W = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} f_{\lambda W}(x) = f_W(x).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \nabla_W \Phi(W) \cdot W &= \nabla_W \|f_W - y\| \cdot W \\ &= \nabla_W \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f_W - y)^2 d\mu \cdot W \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f_W - y)^2 d\mu \cdot w_k \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial w_k} (f_W - y)^2 \cdot w_k \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} 2(\nabla_W f_W \cdot W)(f_W - y) d\mu \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f_W (f_W - y) d\mu \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f_W - y)^2 d\mu + 2 \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} y (f_W - y) d\mu \\ &\geq \|f_W - y\|^2 - \|y\|^2 \geq \Phi(W) - 1. \end{aligned}$$

Neljännän rivin integroimisen ja derivoimisen järjestyksen vaihdon voi tehdä, koska  $f_W$  on jatkuva funktio kaikkien  $w_i$  suhteen, ja jokainen osittaisderivaatta on jatkuva melkein kaikkialla. □

**Lemma 4.20.** Olkoon  $0 < \varepsilon \leq 1$  ja  $R \geq 10$ . Silloin kaikilla Lipschitz-jatkuvilla funktioilla  $u$ , joilla  $\int_{\mathbb{R}^{2m}} u e^{-\Phi_R(W)\varepsilon^{-2}} dW = 0$ , on voimassa

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} u^2 e^{-\Phi_R(W)\varepsilon^{-2}} dW \leq C_P \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla u|^2 e^{-\Phi_R(W)\varepsilon^{-2}} dW.$$

Vakio  $C_p \leq 140$  kun  $m \geq 24R^2\varepsilon^{-2}$ , muulloin  $C_p \leq \frac{1}{8}e^{(4R^2+2)\varepsilon^{-2}}$ .

*Todistus.* Merkitään  $\Phi_R(W) = V(W) - 2F(W)$ , missä  $V(W) = (4|W|^2 - R^2)$  ja  $F(W) = \frac{1}{2}(V(W) - \Phi(W))\mathbf{1}_{\{\Phi(W) > V(W)\}}$ . Tutkitaan Gaussin mittaa  $d\gamma = c_{2m}e^{-4\varepsilon^{-2}|W|^2}dW$ , missä  $c_{2m} = \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi}\right)^m$ . Lemman 4.7 perusteella  $\gamma$  toteuttaa log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_L = \frac{\varepsilon}{8}$ . Lemman 4.19 perusteella  $\Phi(W) \leq (|W| + 1)^2$ . Nyt kun  $R \geq 10$  ja  $|W|^2 \geq 2R^2$  saadaan

$$V(W) = 4(|W|^2 - R^2) \geq (|W| + 1)^2 \geq \Phi(W).$$

Selvästi nyt  $F(W) = 0$  aina, kun  $|W|^2 \geq 2R^2$ . Myös lemmän 4.19 perusteella saadaan  $4|W|^2 - \Phi(W) \geq 2|W|^2 - 2 \geq -2$ . Tällöin

$$2|F(W)| = |(V(W) - \Phi(W))_-| = |(4|W|^2 - \Phi(W) - 4R^2)_-| \leq 4R^2 + 2.$$

Lemman 4.8 perusteella saadaan, että mitta  $d\gamma_F = e^{2\varepsilon^{-2}F}d\gamma$  toteuttaa log-Sobolev-epäyhtälön vakiolla  $C_{p,\varepsilon} = C_L e^{(4R^2+2)\varepsilon^{-2}}$ . Asettamalla  $C_p = \varepsilon^2 C_{p,\varepsilon}$  saadaan löyhempi arvio. Oletuksella  $m \geq 24R^2\varepsilon^{-2}$  ja valinnalla  $\beta = \frac{1}{4}$  saadaan lemmän 4.9 avulla parempi arvio. Varmistetaan ensin, että lemmän 4.9 oletukset täyttyvät. Huomattiin, että  $F = 0$  pallon  $B_{\sqrt{2}R}$  ulkopuolella. Derivoimalla saadaan  $2\nabla F(W) = \nabla V(W) - \nabla \Phi(W) = 8W - \nabla \Phi(W)$ , kun  $F(W) \neq 0$ . Lemman 4.19 perusteella saadaan arvio

$$\begin{aligned} |\nabla F(W)|^2 &= \frac{1}{4}(64|W|^2 - 16\nabla\Phi(W) \cdot W + |\nabla\Phi(W)|^2) \\ &\leq \frac{1}{4}(64|W|^2 - 16\Phi(W) + 16 + 4\Phi(W)) \\ &\leq 16|W|^2 + 4, \end{aligned}$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2C_L(1+\frac{1}{4})|\nabla(\varepsilon^{-2}F)|^2} d\gamma &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{\frac{\varepsilon^2}{4}(1+\frac{1}{4})|\varepsilon^{-2}\nabla F|^2} d\gamma = \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{\frac{5}{16}\varepsilon^{-2}|\nabla F|^2} d\gamma \\ &\leq 1 + \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi}\right)^m \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{5\varepsilon^{-2}|W|^2 + \frac{5}{4}\varepsilon^{-2}} e^{-4\varepsilon^{-2}|W|^2} dW \\ &\leq 1 + e^{\frac{5}{4}\varepsilon^{-2}} \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi}\right)^m \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{\varepsilon^{-2}|W|^2} dW \\ &\leq 1 + e^{\frac{5}{4}\varepsilon^{-2}} \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi}\right)^m e^{2R^2\varepsilon^{-2}} \int_{B_{\sqrt{2}R}} 1 dW. \end{aligned}$$

$2m$ -ulotteisen pallon tilavuudesta ja Stirlingin kaavalla saadaan  $\int_{B_{\sqrt{2}R}} 1 dW \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{2\pi e R^2}{m}\right)^m$ , joten saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2C_L(1+\frac{1}{4})|\nabla(\varepsilon^{-2}F)|^2} d\gamma \leq 1 + \frac{e^{\frac{5}{4}\varepsilon^{-2}}}{\sqrt{2\pi m}} e^{2R^2\varepsilon^{-2}} \left(\frac{8eR^2}{\varepsilon^2 m}\right)^m \leq 1 + \frac{1}{8}.$$

Olkoon  $G_\varepsilon = \varepsilon^{-2}F + \alpha$ , missä  $\alpha \in \mathbb{R}$  valitaan siten, että  $\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2G_\varepsilon} d\gamma = 1$ . Tällöin riittää todistaa, että  $\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{G_\varepsilon} d\gamma \geq 1 - \frac{1}{8}$ . Saadaan

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{G_\varepsilon} d\gamma = e^\alpha \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{\varepsilon^{-2}F} d\gamma \geq e^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2G_\varepsilon} d\gamma = e^{-\alpha}.$$

Koska  $e^{-\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2\varepsilon^{-2}F} d\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$ , riittää tieto, että  $\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2\varepsilon^{-2}F} d\gamma \geq 1 - \frac{1}{10}$ . Samoin kuin aiemmin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2\varepsilon^{-2}F} d\gamma &= 1 - \int_{B_{\sqrt{2}R}} (1 - e^{2\varepsilon^{-2}F}) d\gamma \geq 1 - \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi}\right)^m \int_{B_{\sqrt{2}R}} 1 dW \\ &\geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{4}{\varepsilon^2\pi} \frac{2\pi e R^2}{m}\right)^m = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{8eR^2}{\varepsilon^2 m}\right)^m. \end{aligned}$$

Nyt koska  $m \geq 24R^2\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon \leq 1$  ja  $R \geq 10$  saadaan, että

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left( \frac{8eR^2}{\varepsilon^2 m} \right)^m \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \left( \frac{8eR^2}{24R^2} \right)^m \leq \frac{1}{10},$$

jolloin lopulta

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{2\varepsilon^{-2}F} d\gamma \geq 1 - \frac{1}{8}.$$

Tällöin lemmän 4.9 oletukset täyttyvät, ja nyt mitta  $e^{2G_\varepsilon} d\gamma$  sekä mitta  $d\gamma_F$  toteuttavat Poincarén epäyhtälön vakiolla  $C_{p,\varepsilon} \leq \frac{64\frac{\varepsilon^2}{8}(1+\frac{1}{4})(1-\frac{1}{8})}{\frac{1}{4}} = 140\varepsilon^2$ , ja jälleen asettamalla  $C_p = \varepsilon^{-2}C_{p,\varepsilon}$  saadaan tarkempi arvio.  $\square$

Lause 4.21 perustuu myös lähteeseen [2]. Alkuperäisestä todistuksesta oli jätetty pois paljon välivaiheita, eikä annettu vastinetta lauseelle 4.13. Nämä on todistukseen lisätty.

**Lause 4.21.** Olkoon  $\varepsilon \in (0, 1]$  ja  $R \geq 10$  ja oletetaan  $\|y\|_{L^2(\mu)} \leq 1$ . Olkoon  $p(W, t)$  funktion  $B_t$  todennäköisyysjakauma, kun  $W_t$  saadaan Stokastisen gradienttilaskun

$$dW_t = -\nabla\Phi_R(W)dt + \sqrt{2}\varepsilon dB_t$$

mukaan aloituspisteestä  $p_0$  ajanhetkellä  $t$ . Tällöin  $p(W, t) \rightarrow p_\infty(W) = e^{-\Phi_R(W)\varepsilon^{-2}}$  eksponentiaalisella nopeudella ja

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |p(\cdot, t) - p_\infty(\cdot)|^2 e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} dW \leq e^{-Ct} \int_{\mathbb{R}^{2m}} |p_0 - p_\infty|^2 e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} dW.$$

Kun  $m \geq 24R^2\varepsilon^{-2}$ ,  $C \geq \frac{1}{70}$ , muulloin  $C \geq 16e^{-(4R^2+2)\varepsilon^{-2}}$ .

*Todistus.* Olkoon  $p(W, t) = u(W, t)e^{-\Phi_R(W)\varepsilon^{-2}}$ . Huomataan, että

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (p(\cdot, t) - p_\infty(\cdot))^2 e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} dW &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u(\cdot, t)e^{-\Phi_R\varepsilon^{-2}} - e^{-\Phi_R\varepsilon^{-2}})^2 e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} dW \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u(\cdot, t) - 1)^2 e^{-\Phi_R\varepsilon^{-2}} dW. \end{aligned}$$

Lisäksi lauseen 4.18 mukaan, kun gradientti lasketaan painon  $W$  mukaan, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (p(x, t)e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}) = \frac{\partial p}{\partial t} e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} = \nabla \cdot (p\nabla\Phi_R + \varepsilon^2\nabla p)e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} \\ &= (\nabla p \cdot \nabla\Phi_R)e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} + p(\Delta\Phi_R)e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}} + \varepsilon^2(\Delta p)e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} \nabla u &= \nabla(pe^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}) = e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}\nabla p + \frac{1}{\varepsilon^2}pe^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}\nabla\Phi_R, \\ \nabla u \cdot \nabla\Phi_R &= e^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}\nabla p \cdot \nabla\Phi_R + \frac{1}{\varepsilon^2}pe^{\Phi_R\varepsilon^{-2}}(\nabla\Phi_R \cdot \nabla\Phi_R) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \nabla \cdot \nabla (pe^{\Phi_R \varepsilon^{-2}}) = \nabla \cdot ((\nabla p)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + p\nabla e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}}) \\
&= \nabla \cdot ((\nabla p)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}}) + \nabla \cdot (p(\nabla e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}})) \\
&= (\Delta p)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla p \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla p \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + p\Delta e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} \\
&= (\Delta p)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla p \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + \frac{1}{\varepsilon^2}(\nabla p \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} \\
&\quad + \frac{p}{\varepsilon^2}(\Delta \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + \frac{p}{\varepsilon^4}(\nabla \Phi_R \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}},
\end{aligned}$$

jolloin

$$\varepsilon^2 \Delta u - \nabla \Phi_R \cdot \nabla u = \varepsilon^2 (\Delta p)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + (\nabla p \cdot \nabla \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} + p(\Delta \Phi_R)e^{\Phi_R \varepsilon^{-2}} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Vielä lopuksi huomataan, että

$$\varepsilon^2 \nabla \cdot ((\nabla u)e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}}) = \varepsilon^2 (\Delta u)e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} - (\nabla u \cdot \nabla \Phi_R)e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}}.$$

Ylläolevan perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW &= \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1) \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1) (\varepsilon^2 \Delta u - \nabla \Phi_R \cdot \nabla u) e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW \\
&= \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1) \nabla \cdot (\nabla u e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}}) dW \\
&= -\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla u|^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW,
\end{aligned}$$

missä viimeinen välivaihe saadaan Lauseen 4.13 avulla, koska suuren pallon ulkopuolella  $e^{\Phi_R(W)} = e^{-|W|^2}$ . Lemman 4.20 perusteella

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW \leq C_P \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla u|^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW,$$

joten saadaan

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW \leq -\frac{2}{C_P} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW.$$

Merkitsemällä nyt  $U(t) = \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u-1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW$ , saadaan epädifferentiaaliyhtälö

$$\frac{d}{dt} U \leq -\frac{2}{C_P} U.$$

Tästä saadaan

$$\int \frac{dU}{U} \leq \int -\frac{2}{C_P} dt.$$

Oikea puoli on  $\ln |U|$  ja  $U \geq 0$  joten saadaan

$$U \leq e^{-\frac{2}{C_P} t} U(0).$$

Tämä taas tarkoittaa, että

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} (u(\cdot, t) - 1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW \leq e^{-\frac{2}{C_P} t} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (u_0(\cdot) - 1)^2 e^{-\Phi_R \varepsilon^{-2}} dW. \quad \square$$

## 4.7 Funktioavaruuden $H_{ma}$ sulkeuma

Tutkiaksemme tarkemmin virhefunktioiden  $\Phi(W)$  ja  $\Phi_R(W)$  eroa tarvitsemme muotoilun funktioille, jotka saadaan funktoiden  $f_W$  rajana, kun  $|W|$  kasvaa rajatta. Merkitään tätä funktioavaruuden sulkeumaa  $L^2$ -normin suhteen  $\overline{H_{ma}}$ . Funktion  $f_W$  määritelmän osa  $\frac{1}{\sqrt{m}}$  voidaan unohtaa tässä osassa, koska painoavaruus pysyy samana.

**Lemma 4.22.** Olkoon  $S \subset S^1$  yhtenäinen ja  $v \in \mathbb{R}^2$ . Olkoon  $L(S)$  kaaren pituus. Silloin

$$\int_S (v \cdot x)^2 dx \geq c|v|^2 L(S)^3$$

jollain  $c > 0$ .

*Todistus.* Jos  $L(S) = 0$ , väite on selvä. Kääntämällä koordinaatistoa voidaan olettaa, että  $\bar{v} = \frac{v}{|v|} = (0, 1)$ . Nyt jollain  $a, b \in [-2\pi, 2\pi]$  saadaan

$$\begin{aligned} \int_S (v \cdot x)^2 dx &= |v|^2 \int_S ((0, 1) \cdot x)^2 dx \\ &= |v|^2 \int_a^b ((0, 1)) \cdot (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^2 d\alpha \\ &= |v|^2 \int_a^b \sin(\alpha)^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Lisäksi yksikköympyrällä  $L(S) = b - a$ . Riittää siis todistaa, että on olemassa  $c > 0$  jolla kaikilla  $0 < b - a \leq 2\pi$  on voimassa  $\int_a^b \sin(\alpha)^2 d\alpha \geq c(b - a)^3$ . Jos  $b - a \geq \frac{\pi}{2}$ , silloin  $\int_a^b \sin(\alpha)^2 d\alpha = \frac{b-a}{2} - \frac{\sin(2a) - \sin(2b)}{4} > \frac{\pi}{4} - \frac{2}{4} > \frac{1}{4}$ . Tällöin valitsemalla  $c = \frac{1}{64\pi^3}$  väite pätee. Jos taas  $b - a < \frac{\pi}{2}$  voidaan funktion  $\sin(\alpha)$  jaksollisuuden nojalla olettaa, että  $-\frac{3\pi}{4} < a < b < \frac{3\pi}{4}$ . Nyt välillä  $[a, b]$

$$\sin(\alpha)^2 \geq \frac{8}{9\pi^2} x^2$$

joten

$$\int_a^b \sin(\alpha)^2 d\alpha \geq \frac{8}{9} \int_a^b \alpha^2 d\alpha = \frac{8}{27\pi^2} (b^3 - a^3).$$

Lisäksi  $b^3 - a^3 \geq \frac{(b-a)^3}{10} = \frac{L(S)^3}{10}$  kaikilla  $b \geq a$  joten väite pätee.  $\square$

Lause 4.23 perustuu lähteeseen [2]. Lauseen todistuksessa käytetty lemma 4.22 oli jätetty harjoitustehtäväksi.

**Lause 4.23.** Funktio  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  kuuluu funktiojoukkoon  $\overline{H_{ma}}$  jos ja vain jos se on muotoa

$$g(x) = \sum_{i \in J} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(v_i \cdot x) + \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x),$$

missä  $\bar{w}_i$  ovat yksikkövektoreita,  $K, J \subset I$ ,  $K \cap J = \emptyset$  ja  $|J| \leq \bar{m}$ .

*Todistus.* Oletetaan, että  $|W_k| \rightarrow \infty$  ja  $\|f_{W_k}\|_{L^2} \leq C$ . Kirjoitetaan

$$f_{W_k}(x) = \sum_{i \in I} a_i \sigma(W_{i,k} \cdot x)$$

ja tutkitaan yhtä indeksin  $i$  arvoa. Jos  $\liminf_{k \rightarrow \infty} |w_{i,k}| = 0$ , selvästi osajonon valinnalla nämä indeksit voidaan jättää huomiotta. Jos  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |w_{i,k}| < \infty$ , merkitään  $w_i = \lim_{k \rightarrow \infty} w_{i,k}$  joka on olemassa osajonon raja-arvona. Valitaan indeksit joilla tämä pätee joukkoon  $K$ . Jos kumpikaan ylläolevista ei päde indeksillä  $i$ , valitaan  $i \in I_\infty$ . Näillä valinnoilla, kun merkitään  $f_{k,K} = \sum_{i \in I \setminus I_\infty} a_i \sigma(w_{i,k} \cdot x)$ , saadaan

$$f_{k,K} \rightarrow \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x).$$

Merkitään lisäksi

$$f_{k,J} = \sum_{i \in I_\infty} a_i \sigma(w_{i,k} \cdot x).$$

Olkoon  $i \in I_\infty$  ja merkitään  $\overline{w_{i,k}} = \frac{w_{i,k}}{|w_{i,k}|}$ . Nyt on olemassa osajono jolla  $\lim_{k \rightarrow \infty} |w_{i,k}| = \infty$  ja jono  $\overline{w_{i,k}}$  suppenee vektoriin  $\overline{w_i}$ . Nyt koska  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{W_k}\|_2 \leq C$  niin kaikilla  $i \in I_\infty$  on olemassa  $j \in I_\infty$  jolla  $\overline{w_i} = \overline{w_j}$  ja  $a_i = -a_j$ . Täten toisistaan eroavia vektoreita  $\overline{w_i}$  on korkeintaan  $\overline{m}$  kappaletta. Olkoon joukko  $J$  näiden toisistaan eroavien vektoreiden indeksit. Merkitään nyt

$$f_{k,J} = \sum_{i \in I_\infty} a_i \mathbb{1}_{\{\overline{w_{i,k}} \cdot x \geq 0\}}(w_{i,k} \cdot x).$$

Valitaan lisäksi  $\varepsilon > 0$  ja olkoon  $A_\varepsilon = \{x \in S^1 : |\overline{w_i} \cdot x| \leq \varepsilon \text{ jollain } i \in J\}$ . Nyt koska  $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{w_{i,k}} = \overline{w_i}$ , indeksille  $i \in I_\infty$  ja tarpeeksi suurella  $k$  saadaan

$$\{x \in S^1 \setminus A_\varepsilon : (\overline{w_{i,k}} \cdot x) \geq 0\} \subset \{x \in S^1 : (\overline{w_i} \cdot x) \geq 0\},$$

joten kaikilla  $x \in S^1 \setminus A_\varepsilon$  voidaankin kirjoittaa

$$f_{k,J} = \sum_{i \in I_\infty} a_i \mathbb{1}_{\{\overline{w_i} \cdot x \geq 0\}}(w_{i,k} \cdot x).$$

Olkoon  $\mathcal{S}$  joukko kaaria  $S$ , joissa funktio  $\sum_{i \in J} \mathbb{1}_{\{\overline{w_i} \cdot x \geq 0\}}$  on vakio. Valitaan joku näistä kaarista ja olkoon  $I_S \subset I_\infty$  ne indeksit joilla  $\overline{w_i} \cdot x > 0$  kaikilla  $x \in S$ . Nyt koska

$$\int_{S \setminus A_\varepsilon} \left( \sum_{i \in I_\infty} a_i \mathbb{1}_{\{\overline{w_{i,k}} \cdot x \geq 0\}}(w_{i,k} \cdot x) \right)^2 dx \leq \|f_{k,J}\|_{L^2}^2 \leq C,$$

lemman 4.22 mukaan jollain  $c > 0$  on voimassa

$$cL(S \setminus A_\varepsilon)^3 \left| \sum_{i \in I_S} a_i w_{i,k} \right|^2 \leq \int_{S \setminus A_\varepsilon} \left( \sum_{i \in I_S} a_i w_{i,k} \cdot x \right)^2 dx \leq C.$$

Nyt kun  $\varepsilon \rightarrow 0$ , selvästi  $L(S \setminus A_\varepsilon) \rightarrow L(S)$ , ja tämä pätee kaikilla sektoreilla  $S \in \mathcal{S}$ , joten saadaan

$$\sup_{x \in S^1} \left| \sum_{i \in I_\infty} \mathbb{1}_{\{\overline{w_i} \cdot x \geq 0\}} a_i w_{i,k} \right| \leq C'.$$

Tällöin kaarilla  $S$  on suppeneva osajono vektoreita  $\sum_{i \in I_S} a_i w_{i,k}$ . Merkitään tätä vektoria  $v_S$ . Tällöin  $f_{k,J}$  suppenee funktioon  $g_1(x) = \sum_S \mathbb{1}_{\{x \in S\}}(v_S \cdot x)$   $L^2$ -normin suhteen. Korvaamalla kaaret  $S$  niiden määritelmällä saadaan lopulta

$$g_1 = \sum_{i \in J} \mathbb{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(v_i \cdot x),$$

missä  $\sum_{i \in I_S} v_i = v_S$ . Nyt olkoon funktio  $g \in L_2(S^1)$  muotoa

$$g(x) = \sum_{i \in J} \mathbb{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(v_i \cdot x) + \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x)$$

missä  $\bar{w}_i$  ovat yksikkövektoreita,  $J, K \subset I$  ovat erillisiä ja  $J \leq \bar{m}$ . Koska oletamme, että  $a_i = -a_{i+1}$  kaikilla  $i \in \{1, \dots, 2\bar{m}\}$ . Olkoon nyt

$$f_{W_h} = \frac{1}{h} \left( \sum_{i=1}^{2|J|} \sigma((\bar{w}_i + h v_i) \cdot x) - \sigma(\bar{w}_i \cdot x) \right) + \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x).$$

Selvästi  $f_{W_h} \in H_{m,a}$ .  $\|f_{W_h}\|_{L^2}$  on myös rajoitettu pienellä  $h$ , koska vektorin  $h v_i$  vaikutus pistetuloon häviää. Tällöin selvästi  $\lim_{h \rightarrow 0} f_{W_h} = g(x)$  melkein kaikilla  $x \in S^1$ .  $\square$

## 4.8 Tasainen arviointiteoreema

Tässä osiossa tutkitaan rajoittamattomien painojen optimointitehtävää eli sitä, kuinka hyvin funktio  $g \in \overline{H_{ma}}$  voi approksimoida rajoitetun variaation funktiota  $y$ . Lemmat 4.24, 4.25 ja 4.26 sekä lause 4.27 perustuvat lähteeseen [2].

**Lemma 4.24.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä. Merkitään  $y = y_1 + y_2$  missä  $y_1 \in L_{al}$  ja  $y_2 \in L_{al}^C$ . Millä tahansa  $f \in L_{al}$

$$\|f - y\|_2^2 = \|f - y_1\|_2^2 + \|y_2\|_2^2.$$

Lisäksi jos  $y \in L_{al}^C$ , saadaan

$$\inf_{W \in \mathbb{R}^{2m}} \|f_W - y\|_2^2 = \|y\|_2^2.$$

*Todistus.* Vektoriavaruudet  $L_{al}$  ja  $L_{al}^C$  ovat erillisiä ja  $H_{ma} \subset L_{al}$ .  $\square$

Lemman 4.24 perusteella on luonnollista rajoittautua rajoitetun variaation funktioihin joiden symmetrinen osa on lineaarinen.

**Lemma 4.25.** Olkoon  $m = 4$  ja  $\bar{m} = 2$ . Olkoon  $mak = c \mathbb{1}_{(\theta_1, \theta_2)} + c \mathbb{1}_{(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ . Tällöin on olemassa  $g \in \overline{H_{ma}}$  jolla  $g(\theta) = 0$  kaikilla  $\theta \in [0, \theta_1] \cup [\theta_2, \theta_1 + \pi] \cup [\theta_2 + \pi, 2\pi]$  ja

$$\|g - y\|_2^2 \leq \frac{c^2}{1000} (\theta_2 - \theta_1)^5.$$



*Todistus.* Koordinaatistoa muuttamalla voidaan olettaa  $c = 1$  ja  $-\theta_1 = \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ . Lauseen 4.23 mukaan on olemassa  $g \in \overline{H_{ma}}$  jolla  $g(x) = \mathbb{1}_{\{\overline{w}_1 \cdot x \geq 0\}} x_1 - \mathbb{1}_{\{\overline{w}_2 \cdot x \geq 0\}} x_1$  missä  $\overline{w}_1 = (\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))^T$  ja  $\overline{w}_2 = (-\sin(\theta_2), \cos(\theta_2))^T$ . Napakoordinaateissa siis

$$g(\theta) = \mathbb{1}_{(-\theta_2, \theta_2)} \cos(\theta) - \mathbb{1}_{(-\theta_2 + \pi, \theta_2 + \pi)} \cos(\theta).$$

Selvästi  $g(\theta) = 0$  kun  $\theta \in [0, \theta_1] \cup [\theta_2, \theta_1 + \pi] \cup [\theta_2 + \pi, 2\pi]$ . Lisäksi koska  $|1 - \cos(\theta)| \leq \frac{\theta^2}{2}$  kun  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  saadaan

$$\begin{aligned} \|g - y\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\theta_2}^{\theta_2} (1 - \cos(\theta))^2 d\theta + \int_{-\theta_2 + \pi}^{\theta_2 + \pi} (1 + \cos(\theta))^2 d\theta \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_2} (1 - \cos(\theta))^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_2} \theta^4 d\theta \\ &= \frac{1}{10\pi} \theta_2^5 \leq \frac{1}{1000} (2\theta_2)^5. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 4.26.** Olkoon  $y^s$  rajoitetun variaation funktion  $y$  symmetrinen osa. Tällöin kaikilla  $N \in \mathbb{N}$  on olemassa  $N$  symmetrisen askelfunktion summa  $v_N$  jolla

$$\|y^s - v_N\|_2^2 \leq \frac{\pi^2 \|y\|_{BV}^2}{N}.$$

*Todistus.* Jaetaan väli  $[0, \pi)$   $N$  yhtäsuureen osaan  $I_1, \dots, I_N$ ,  $I_k = [\theta_k, \theta_{k+1})$ . Tällöin selvästi  $|I_k| = \frac{\pi}{N}$ . Korvataan  $y$  oikealta jatkuvalla funktiolla, joka on sama melkein kaikkialla. Määritetään yksinkertainen funktio  $v_N : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v_N(\theta) = \begin{cases} y^s(\theta_k), & \text{kun } \theta \in I_k \text{ tai } \theta - \pi \in I_k \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Selvästi  $v_N$  saadaan  $N$  askelfunktion summana. Huomataan, että melkein kaikilla  $\theta \in I_k$

$$\begin{aligned} |y^s(\theta) - y^s(\theta_k)| &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |y^s(\alpha_{i+1}) - y^s(\alpha_i)| : \theta_k = \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \theta_{k+1} \right\} \\ &= V_{I_k}(y) \leq \|y^s\|_{BV}. \end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \|y^s - v_N\|_2^2 &= \frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{I_k} |y(\theta) - y(\theta_k)|^2 d\theta \\ &\leq \frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{I_k} \|y^s\|_{BV} V_{I_k}(y) d\theta \\ &= \frac{1}{N} \|y^s\|_{BV} \sum_{k=1}^N V_{I_k}(y) \\ &\leq \frac{1}{N} \|y^s\|_{BV}^2 \leq \frac{1}{N} \|y\|_{BV}^2 \end{aligned} \quad \square$$

**Lause 4.27.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä ja  $y \in L_{al}$ . Tällöin

$$\inf_{f_W \in H_{ma}} \|f_W - y\|_2^2 \leq \frac{62\|y\|_{BV}^2}{\bar{m}}.$$

*Todistus.* Oletetaan, että  $\bar{m} \geq 3$ . Oletuksen mukaan  $y = y^s + l$ , ja lineaarinen osa  $l$  saadaan

$$g_l(x) = a_1\sigma(w_0 \cdot x) + a_2\sigma(-w_0 \cdot x) = l(x).$$

Nyt koska  $\bar{m} \geq 3$  voidaan arvioida symmetristä osaa yksinkertaisen funktion avulla. Valitaan  $N = \lfloor \frac{\bar{m}-1}{2} \rfloor$ . Olkoon  $v_N$  se funktio, joka saadaan lemmän 4.26 mukaan. Valitaan nyt lemmän 4.25 avulla  $g_s \in \overline{H_{ma}}$ , muotoa

$$g_s(x) = \sum_{i=3}^{2\bar{m}} \mathbb{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(v_i \cdot x),$$

jolla

$$\begin{aligned} \|v_N - g_s\|_2^2 &\leq \frac{1}{1000} \|y^s\|_\infty^2 \sum_{k=1}^N |I_k|^5 = \frac{\pi^5}{1000} \|y^s\|_\infty^2 \frac{1}{N^4} \\ &\leq \frac{3\pi^5 \|y\|_{BV^2}}{1000\bar{m}} \leq \frac{\|y\|_{BV}^2}{\bar{m}}, \end{aligned}$$

koska  $c \leq \|y^s\|_\infty$  ja  $N \geq \frac{\bar{m}}{3} \geq 1$ . Olkoon lopulta  $g = g_l + g_s \in \overline{H_{ma}}$  ja tällöin

$$\begin{aligned} \inf_{W \in \mathbb{R}^{2m}} \|f_W - y\|_2^2 &\leq \|g - y\|_2^2 = \|y_s - g_s\|_2^2 \\ &\leq 2\|y_s - v_N\|_2^2 + 2\|v_N - g_s\|_2^2 \\ &\leq \frac{2\pi^2 \|y\|_{BV}^2}{N} + \frac{2\|y\|_{BV}^2}{\bar{m}} \leq \frac{62\|y\|_{BV}^2}{\bar{m}}. \quad \square \end{aligned}$$

## 4.9 Paikallistusteoreema

Tämä osio perustuu kokonaan lähteeseen [2]. Lemman 4.28 todistuksessa on käsitelty alkuperäisessä käsittelemättömät tapaukset indeksien  $i, j$  paikoista ja selvennetty, miten saaduilla kaarilla saadaan mielivaltainen haluttu kaari.

**Lemma 4.28.** Olkoon  $y \in L^2(S^1)$ . Tällöin se funktio  $g \in \overline{H_{ma}}$  joka toteuttaa yhtälön  $\inf_W \|f_W - y\|_2^2 = \|g - y\|_2^2$  toteuttaa myös kaikilla sektoreilla  $S$  joissa funktio  $\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}$  on vakio

$$\int_S g^s(x) x dx = \int_S y^s(x) x dx.$$

*Todistus.* Olkoon  $g \in \overline{H_{ma}}$  se funktio joka saadaan lauseen 4.29 perusteella ja se on muotoa

$$g(x) = \sum_{i \in J} \mathbb{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(v_i \cdot x) + \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x),$$

missä  $w_i \neq w_j$  kun  $i \neq j$ . Valitaan  $i, j \in I$  ja olkoon  $S_k = \{\overline{w}_k \cdot x \geq 0\}$ . Merkitään lisäksi

$$S_{ij} = S_i \setminus S_j \text{ ja } S_{ji} = S_j \setminus S_i.$$

Hajotetaan normi kuten lemmassa 4.24 muotoon

$$\|g - y\|_2^2 = \|g^s - y^s\|_2^2 + \|g^a - y^a\|_2^2,$$

missä  $a$  tarkoittaa antisymmetristä ja  $s$  tarkoittaa symmetristä osaa. Olkoon lisäksi  $u \in \mathbb{R}^2$ . Nyt joko  $i, j \in K$ ,  $i, j \in J$  tai symmetrisesti  $i \in J$  ja  $j \in K$ . Ensimmäisessä tapauksessa merkitään

$$g_t(x) = g(x) + t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x) - t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_j \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x),$$

toisessa merkitään

$$g_t(x) = g(x) + a_i(\sigma((w_i - a_i t u) \cdot x) - \sigma(w_i \cdot x)) - a_j(\sigma((w_j - a_j t u) \cdot x) - \sigma(w_j \cdot x))$$

ja kolmannessa merkitään

$$g_t(x) = g(x) + t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x) + a_j(\sigma((w_j - a_j t u) \cdot x) - \sigma(w_j \cdot x)).$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} & t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x) - t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot (-x) \geq 0\}}(u \cdot (-x)) \\ &= t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x) + t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \leq 0\}}(u \cdot x) = tu \cdot x, \end{aligned}$$

ja koska  $\sigma(x) - \sigma(-x) = x$ , saadaan

$$\begin{aligned} & a_i(\sigma((w_i - a_i t u) \cdot x) - \sigma(w_i \cdot x)) - (a_i(\sigma((w_i - a_i t u) \cdot (-x)) - \sigma(w_i \cdot (-x)))) \\ &= a_i((w_i - a_i t u) \cdot x - (w_i \cdot x)) = -tu \cdot x. \end{aligned}$$

Tällöin saadaan

$$(g_t)^a = \frac{g_t(x) - g_t(-x)}{2} = \frac{g(x) - g(-x)}{2} + \frac{tu \cdot x - tu \cdot x}{2} = g^a.$$

Koska  $g$  on minimoija, täytyy olla

$$\left( \frac{d}{dt} \|g_t - y\|_2^2 \right) \Big|_{t=0} = 0,$$

ja hajottamalla normi osiin  $\|g_t - y\|_2^2 = \|(g_t)^s - y^s\|_2^2 + \|(g_t)^a - y^a\|_2^2$  saadaan muoto

$$\left( \frac{d}{dt} \|(g_t)^s - y^s\|_2^2 \right) \Big|_{t=0} = 0.$$

Koska  $(g_t)^s$  on jatkuva ja rajoitettu arvon  $t$  suhteen, voidaan integraali ja derivaatta vaihtaa ja saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S^1} ((g_t)^s - y^s)^2 dx &= \int_{S^1} \frac{d}{dt} ((g_t)^s - y^s)^2 dx \\ &= \int_{S^1} ((g_t)^s - y^s) \frac{d}{dt} (g_t)^s dx. \end{aligned}$$

Huomataan, että  $t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u \cdot x) + t\mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot (-x) \geq 0\}}(u \cdot (-x)) = t \operatorname{sgn}(w_i \cdot x)(u \cdot x)$  ja että  $a_i(\sigma((w_i - a_i t u) \cdot x) - \sigma(w_i \cdot x)) - (a_i(\sigma((w_i - a_i t u) \cdot (-x)) - \sigma(w_i \cdot (-x)))) = a_i|(w_i - a_i t u) \cdot x|$  sillä  $\sigma(x) + \sigma(-x) = |x|$ . Tämän perusteella ensimmäisessä tapauksessa

$$\frac{d}{dt}(g_t)^s = (\operatorname{sgn}(w_i \cdot x) - \operatorname{sgn}(w_j \cdot x))(u \cdot x),$$

toisessa

$$\frac{d}{dt}(g_t)^s = (\operatorname{sgn}((w_i - a_i t u) \cdot x) - \operatorname{sgn}((w_j - a_j t u) \cdot x))(u \cdot x)$$

ja kolmannessa tapauksessa

$$\frac{d}{dt}(g_t)^s = (\operatorname{sgn}(w_i \cdot x) - \operatorname{sgn}((w_j - a_j t u) \cdot x))(u \cdot x).$$

Sijoittamalla tämä aiempaan yhtälöön ja sijoittamalla  $t = 0$  saadaan muoto

$$\int_{S^1} (g^s - y^s)(\operatorname{sgn}(w_i \cdot x) - \operatorname{sgn}(w_j \cdot x))(u \cdot x) dx$$

ja  $w_i \cdot x$  ja  $w_j \cdot x$  eroavat vain kaarilla  $S_{ij}$  ja  $S_{ji}$ , joten saadaan

$$\int_{S_{ij}} (g^s - y^s)(u \cdot x) dx = \int_{S_{ji}} (g^s - y^s)(u \cdot x) dx.$$

Koska kaaret  $S_{ij}$  ja  $S_{ji}$  ovat toistensa peilikuvat ja integroitava funktio on antisymmetrinen, saadaan  $\int_{S_{ij}} (g^s - y^s)(u \cdot x) dx$  ja koska  $u$  on mielivaltainen, saadaan myös  $\int_{S_{ij}} x g^s dx = \int_{S_{ij}} x y^s dx = (0, 0)$ . Antisymmetrisyyttä käyttämällä saadaan

$$\int_{S^1} x g^s dx = \int_{S^1} x y^s dx = 0,$$

joten

$$\int_{S^1 \setminus S_{ij}} x g^s dx = \int_{S^1 \setminus S_{ij}} x y^s dx.$$

Huomataan, että  $S^1 \setminus (S_{ij} \cup S_{ji}) = S_i \cap S_j \cup \{x \mid -x \in S_i \cap S_j\}$ , ja täten antisymmetrisyydellä saadaan myös, että yhtälö pätee myös sektoreiden leikkauksen yli integroituna. Näiden avulla saadaan generoitua mielivaltainen lemman määritelmän mukainen sektori.  $\square$

**Lemma 4.29.** Olkoon  $y \in C^1(S^1)$  ja  $g \in \overline{H_{ma}}$  sellainen, että se toteuttaa yhtälön  $\inf_W \|f_W - y\|_2^2 = \|g - y\|_2^2$ . Olkoon  $S$  sektori, jossa funktio  $\sum_{i \in I} \mathbb{1}_{\{\overline{w}_i \cdot x \geq 0\}}$  on vakio ja olkoon  $\overline{w}_i$  sellainen vektori, että toisella sektorin  $S$  reunapisteistä  $\overline{w}_i \cdot x = 0$ . Silloin funktion  $g$  symmetrinen osa  $g^s(x)$  on lineaarinen. Lisäksi  $\frac{1}{\sqrt{m}}|v_S \cdot w_i^\perp| \leq (4 + \pi^2)\|y\|_\infty$  ja  $\frac{1}{\sqrt{m}}|v_S| \leq 3\pi^2 \min(\|y\|_{C^1}, \|y\|_\infty/L(S))$ , kun  $v_S$  on kuten lauseen 4.23 todistuksessa.

*Todistus.* Olkoon sektori  $S$  kuten lemmän oletuksessa ja valitaan koordinaatisto siten, että  $S = \{s(\theta) \in \mathbb{R}^2 : -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\}$  ja  $s(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Silloin vektorin  $w_i$  määritelmän mukaan ja ehdosta  $w_i \cdot w_i^\perp = 0$  saadaan että  $w_i^\perp = (\cos(\theta_0), \pm \sin(\theta_0))$ . Merkitään lisäksi  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}v_S \cdot e_1$  ja  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}v_S \cdot e_2$ . Lemman 4.28 ja vektorin  $v_S$  määritelmän mukaan saadaan

$$\int_S (v_S \cdot x) dx = \int_S y^s(x) dx.$$

Arvioidaan ensin  $|\frac{1}{L(S)} \int_S y^s(x) x_1 dx| \leq \|y\|_\infty$ . Lisäksi

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(S)\sqrt{m}} \int_S (v_S \cdot x) x_1 dx &= \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{v_1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos \theta)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Nyt koska  $|\frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\cos \theta)^2 d\theta| \geq \frac{1}{4}$ , saadaan  $|v_1| \leq 4\|y^s\|_\infty \leq 4\|y\|_\infty$ . Lisäksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(S)} \int_S (v_S \cdot x) x_2 dx &= \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \frac{v_2}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (\sin \theta)^2 d\theta = \frac{v_2}{2\theta_0} \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin(2\theta_0) \right), \end{aligned}$$

jolloin saadaan  $|\frac{1}{L(S)} \int_S y^s(x) x_2 dx| \leq \frac{\|y^s\|_\infty}{L(S)} \int_{\theta_0}^{\theta_0} |\sin \theta| d\theta \leq \frac{\|y^s\|_\infty}{L(S)} \int_{\theta_0}^{\theta_0} |\theta| d\theta \leq \frac{\|y\|_\infty \theta_0}{2}$ .  
Kaikilla  $\theta_0 \in [0, \pi]$  on voimassa

$$\theta_0 - \frac{1}{2} \sin(2\theta_0) \geq \frac{\theta_0^3}{\pi^2},$$

joten saadaan

$$|v_2| \leq \frac{2\pi^2 \|y^s\|_\infty}{2\theta_0} \leq \frac{2\pi^2 \|y\|_\infty}{L(S)}.$$

Toisaalta väliarvolauseen mukaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(S)} \int_S y^s x_2 dx &= \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} y^s(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} (y^s(\theta) - y^s(0)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{(y^s(\theta) - y^s(0))}{\theta} \theta \sin(\theta) d\theta \\ &= (y^s)'(\theta_1) \frac{1}{L(S)} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \theta \sin(\theta) d\theta \\ &= (y^s)'(\theta_1) \left( \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} - \cos(\theta_0) \right) \end{aligned}$$

jollain  $\theta_1 \in (-\theta_0, \theta_0)$ . Nyt koska  $|\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0| \leq \frac{\theta_0^3}{3}$  kun  $\theta_0 \in [0, \pi]$ , saadaan

$$|v_2| \leq \pi^2 \|y^s\|_{C^1} \leq \pi^2 \|y\|_{C^1}.$$

Nyt  $|v_2| \leq \min(\frac{2\pi^2 \|y\|_\infty}{L(S)}, \pi^2 \|y\|_{C^1})$  ja  $|v_1| \leq 4 \|y\|_\infty$ ,  $L(S) \leq \pi$ , joten ehdosta  $\frac{1}{\sqrt{m}} |v_S| \leq \sqrt{2} \max(|v_1|, |v_2|)$  seuraa, että

$$\frac{1}{\sqrt{m}} |v_S| \leq 3\pi^2 \min\left(\|y\|_{C^1}, \frac{1}{L(S)} \|y\|_\infty\right).$$

Lisäksi

$$\frac{1}{\sqrt{m}} |v_S \cdot w_i^\perp| \leq |v_1| + |\sin(\theta_0)| |v_2| \leq 4 \|y\|_\infty + \pi^2 \|y\|_\infty. \quad \square$$

**Lemma 4.30.** Olkoon  $g$  ja  $y$  kuten lemmassa 4.29. Funktion  $g$  symmetrinen osa  $g^s$  saa muodon  $g^s = \frac{1}{2\sqrt{m}} \sum_{i \in I} \operatorname{sgn}(\bar{w}_i \cdot x)(v_i \cdot x)$  ja kirjoitetaan  $v_i = \alpha_i \bar{w}_i + u_i$ , missä  $u_i \cdot \bar{w}_i = 0$  ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tällöin  $\frac{1}{\sqrt{m}} |u_i| \leq 6\pi^2 \|y\|_\infty$  ja  $\frac{1}{\sqrt{m}} |\alpha_i| \leq 6\pi^2 \|y\|_{C^1}$ .

*Todistus.* Identiteetin  $\sigma(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} x$  perusteella funktio  $g$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$g(x) = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{w_i \cdot x \geq 0\}} (v_i \cdot x),$$

jolloin

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m} g^s(x) &= \sqrt{m}(g(x) + g(-x)) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}} (v_i \cdot x) + \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot (-x) \geq 0\}} (v_i \cdot (-x)) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}} (v_i \cdot x) - \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \leq 0\}} (v_i \cdot x) \\ &= \sum_{i \in I} \operatorname{sgn}(\bar{w}_i \cdot x)(v_i \cdot x). \end{aligned}$$

Lemman 4.29 perusteella

$$\frac{1}{\sqrt{m}} |\alpha_i| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} |v_S| \leq 3\pi^2 \|y\|_{C^1}.$$

Valitaan jokin  $\bar{w}_i$  ja uudelleennimeämällä indeksit nimetään se  $\bar{w}_1$ . Koordinaatistoa kääntämällä oletetaan lisäksi  $\bar{w}_1 = e_2$ . Olkoon  $S_1$  se sektori joka on muotoa  $\{x \in S^1 : 0 \leq x_2 \leq \sin(L(S_1)), x \geq 0\}$  ja olkoon sektori  $S_2$  "edellinen" sektori, muotoa  $S_2 = \{x \in S^1 : 0 \leq \bar{w}_2 \cdot x \leq \sin(L(S_2)), x_1 \geq 0\} \subset \{x_2 \leq 0\}$ . Nyt  $L(S_2) \geq |\bar{w}_1 - \bar{w}_2|$  ja kirjoitetaan  $g^s(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} v_{S_i}$  kun  $x \in S_i$ . Nyt lemmän 4.29 perusteella

$$\frac{1}{\sqrt{m}} |v_{S_2}| \leq 3\pi^2 \frac{\|y\|_\infty}{L(S_2)}.$$

Kaarien määrittelyn perusteella  $\operatorname{sgn}(\bar{w}_1 \cdot x) = 1$  kaikilla  $x \in S_1$  ja  $\operatorname{sgn}(\bar{w}_1 \cdot x) = -1$  kaikilla  $x \in S_2$ . Tällöin

$$\frac{1}{\sqrt{m}} v_{S_1} - \frac{1}{\sqrt{m}} v_{S_2} \geq \frac{1}{\sqrt{m}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} \alpha_1 \bar{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{m}} u_1.$$

Olkoon  $\bar{u}_1$  se vektori jolla  $u_1 \cdot \bar{u}_1 = |u_1|$ , jolloin  $\bar{u}_1 = \pm e_1$  on kollineaarinen vektorin  $w_i^\perp$  kanssa, jolloin lemmän 4.29 perusteella

$$(4 + \pi^2)\sqrt{m}\|y\|_\infty \geq |v_{S_1} \cdot \bar{u}_1| = |v_{S_2} \cdot \bar{u}_1 + |u_1||.$$

Myös lemmän 4.29 mukaan

$$|v_{S_2} \cdot \bar{u}_2| \leq (4 + \pi^2)\sqrt{m}\|y\|_\infty,$$

kun  $\bar{u}_2 \cdot \bar{w}_2 = 0$  ja  $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 > 0$ . Nyt

$$L(S_2) \geq |\bar{w}_2 - \bar{w}_1| = |\bar{u}_2 - \bar{u}_1|.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} |v_{S_2} \cdot \bar{u}_1| &\leq |v_{S_2} \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)| + |v_{S_2} \cdot \bar{u}_2| \\ &\leq \frac{3\pi^2\|y\|_\infty}{L(S_2)}L(S_2) + (4 + \pi^2)\sqrt{m}\|y\|_\infty \leq \sqrt{m}(4\pi^2 + 4)\|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Lopulta saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{m}}|\bar{u}_2| \leq (4 + \pi^2)\|y\|_\infty + (4\pi^2 + 4)\|y\|_\infty \leq 6\pi^2\|y\|_\infty. \quad \square$$

**Lemma 4.31.** Olkoon  $W \in \mathbb{R}^{2m}$ . Silloin

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \int_{S^1} \sigma(w_i \cdot x) \right)^2 dx \geq \frac{1}{4} \frac{|W|^2}{m}.$$

*Todistus.*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \int_{S^1} \sigma(w_i \cdot x) \right)^2 dx \geq \frac{1}{2\pi m} \sum_{i=1}^m \int_{S^1} \sigma(w_i \cdot x)^2 dx.$$

Lisäksi koordinaatistoa kääntämällä  $\sigma(w_i \cdot x)$  voidaan kirjoittaa muodossa  $\sigma(|w_i| \cos(\theta))$  joten saadaan muoto  $\int_0^{2\pi} \sigma(|w_i| \cos(\theta))^2 d\theta = |w_i|^2 \frac{\pi}{2}$  joten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \left( \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^m \int_{S^1} \sigma(w_i \cdot x) \right)^2 dx \geq \frac{1}{4m} \sum_{i=1}^m |w_i|^2 = \frac{1}{4} \frac{|W|^2}{m}. \quad \square$$

**Lemma 4.32.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä ja  $\|y\|_2 \leq 1$ . Oletetaan että  $m' < m$ ,  $\bar{m}' = m'/2 \leq \bar{m}$  ja merkitään  $C(m) = \sqrt{m/\bar{m}}$ . Tällöin kaikilla  $R > 1$  on voimassa

$$\min_{|W| \leq C(m)R} \|f_W - y\|_2^2 \leq \min_{W' \leq R} \|f_{W'} - y\|_2^2$$

kun  $f_W \in H_{ma}$  ja  $f_{W'} \in H_{m'a'}$ .

*Todistus.* Olkoon  $W_\lambda = \lambda(W', W', \dots, W', 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{2m}$ , missä  $W'$  esiintyy  $k = \lfloor 2\bar{m}/m' \rfloor$  kertaa. Nyt saadaan

$$f_{W_\lambda}(x) = \frac{k}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m'} a_i \sigma(\lambda w'_i \cdot x) = k\lambda \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{m}} f_{W'}(x).$$

Nyt valinnalla  $\lambda = k^{-1} \frac{\sqrt{m'}}{\sqrt{m}}$  saadaan  $f_{W_\lambda} = f_{W'}$ . Lisäksi koska  $k \geq \bar{m}/m'$  saadaan

$$|W|^2 = k\lambda^2 |W'|^2 \leq \frac{m}{\bar{m}} |W'|^2 \leq C(m)^2 R^2. \quad \square$$

Lause 4.33 perustuu myös lähteeseen [2]. Lauseen todistukseen on lisätty selvennys Jensenin epäyhtälön käytöstä, siitä, milloin  $I(i, h, t) \neq 0$ , ja hieman muita välivaiheita.

**Lause 4.33.** Olkoon  $y$  rajoitetun variaation funktio yksikköympyrällä ja  $\|y\|_2 \leq 1$ . Silloin kaikilla  $R \geq R_0$

$$\min_{f_W \in H_{m,a}, |W| \leq C(m)R} \|f_W - y\|_2^2 \leq \inf_{f_W \in H_{m,a}} \|f_W - y\|_2^2 + 5 \cdot 10^4 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{-\frac{1}{9}},$$

missä  $C(m) = \sqrt{\frac{m}{\bar{m}}} > \sqrt{2}$  ja  $R_0 = \max((10\|y\|_{BV})^6, 4 \cdot 10^7)$ .

*Todistus.* Oletetaan ensin että  $\bar{m}^9 \leq R$ . Valitaan  $r \in \mathbb{N}$  jolla  $r \leq R^{\frac{1}{3}} \leq 2r$ . Valitaan funktio  $y_r$  lemmän 4.10 mukaan, jolloin

$$\|y - y_r\|_2^2 \leq \frac{16\|y\|_{BV}^2}{r} \leq \frac{32\|y\|_{BV}^2}{R^{\frac{1}{3}}} \leq 1.$$

Nyt koska  $\|y\|_2 \leq 1$ , selvästi  $\|y_r\|_2 \leq 2$  ja kaikilla  $p > 0$

$$\min_{|W| \leq p} \|f_W - y_r\| \leq 4.$$

Valitaan nyt  $p > 0$  ja  $W_p \in \mathbb{R}^{2m}$ , jolla  $|W_p| \leq p$  ja

$$\|f_{W_p} - y_r\|_2^2 = \min_{|W| \leq p} \|f_W - y_r\|_2^2.$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned} & \min_{|W| \leq p} \|f_W - y\|_2^2 - \min_{|W| \leq p} \|f_W - y_r\|_2^2 \\ & \leq \|f_{W_p} - y\|_2^2 - \|f_{W_p} - y_r\|_2^2 \\ & = (\|f_{W_p} - y\|_2 - \|f_{W_p} - y_r\|_2)(\|f_{W_p} - y\|_2 + \|f_{W_p} - y_r\|_2) \\ & \leq (\|f_{W_p} - y\|_2 + \|f_{W_p} - y_r\|_2)(\|y - y_r\|_2) \\ & = (\|f_{W_p} - y - y_r + y\|_2 + \|f_{W_p} - y_r\|_2)(\|y - y_r\|_2) \\ & \leq (\|y_r - y\|_2 + 2\|f_{W_p} - y_r\|_2)(\|y - y_r\|_2) \leq 5\|y - y_r\|_2. \end{aligned}$$

Valitsemalla samoin ehdoin  $W_{p'}$  jolla

$$\|f_{W_{p'}} - y\|_2^2 = \min_{|W| \leq p} \|f_W - y\|_2^2$$



saadaan

$$\left| \min_{|W| \leq p} \|f_W - y\|_2^2 - \min_{|W| \leq p} \|f_W - y_r\|_2^2 \right| \leq 5\|y - y_r\|_2$$

kaikilla  $p \geq R_0$ . Olkoon nyt  $g \in \overline{H_{ma}}$  jolla

$$\inf_W \|f_W - y_r\|_2^2 = \|g - y_r\|_2^2.$$

Funktio  $g$  voidaan lauseen 4.23 ja lemmän 4.30 mukaan kirjoittaa muodossa

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in J} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u_i \cdot x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in J} \alpha_i \sigma(\bar{w}_i \cdot x) + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x),$$

missä  $|J| \leq \bar{m}$ ,  $|K| \leq m - 2|J|$ ,  $K \cap J = \emptyset$  ja  $u_i \cdot \bar{w}_i = 0$ . Olkoon nyt funktiojoukko

$$f_{W_h} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \sum_{i \in J} \left( \sigma \left( \left( \frac{1}{h} \bar{w}_i + u_i \right) \cdot x \right) - \sigma \left( \left( \frac{1}{h} - \alpha_i \right) \bar{w}_i \cdot x \right) \right) + \sum_{i \in K} a_i \sigma(w_i \cdot x) \right).$$

Selvästi  $f_{W_h} \rightarrow g$  kun  $h \rightarrow 0$ . Huomataan, että  $W_h = (\frac{1}{h} \bar{w}_i + u_i, \dots, (\frac{1}{h} - \alpha_i) \bar{w}_i, \dots, w_i \dots)$ . Jaetaan  $g = g_+ + g_-$ , missä

$$g_+ = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in K \cap I_+} \sigma(w_i \cdot x)$$

ja

$$g_- = \frac{1}{\sqrt{m}} \left( \sum_{i \in J} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u_i \cdot x) + \sum_{i \in J} \alpha_i \sigma(\bar{w}_i \cdot x) - \sum_{i \in K \cap I_-} \sigma(w_i \cdot x) \right).$$

Nyt koska  $\|y_r\|_{L^2} \leq 2$  ja  $g$  on minimoiija, saadaan  $\|g\|_{L^2} \leq 4$  ja

$$\|g_+\|_2 \leq \|g\|_2 + \|g_-\|_2 \leq 4 + \|g_-\|_2.$$

Nyt lemموjen 4.30 ja 4.10 mukaan  $\frac{1}{\sqrt{m}} |u_i| \leq 6\pi^2 \|y\|_{BV}$  ja  $\frac{|\alpha_i|}{\sqrt{m}}, \frac{|w_i|}{\sqrt{m}} \leq 30\pi^2 R^{\frac{1}{3}} \|y\|_{BV}$ . kaikilla  $i \in J \cup K$ . Nyt arvoidaan

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \left\| \sum_{i \in J} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}}(u_i \cdot x) \right\|_2 \leq 6\pi^2 \|y\|_{BV} \bar{m}$$

ja koska  $|I_-| \leq \bar{m}$  saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \left\| \sum_{i \in K \cap I_-} \sigma(w_i \cdot x) \right\|_2, \frac{1}{\sqrt{m}} \left\| \sum_{i \in J} \alpha_i \sigma(\bar{w}_i \cdot x) \right\|_2 \leq 30\pi^2 \|y\|_{BV} R^{\frac{1}{3}} \bar{m}.$$

Nyt saadaan

$$\|g_-\|_2 \leq (6\pi^2 + 60\pi^2 R^{\frac{1}{3}}) \|y\|_{BV} \bar{m}$$

ja

$$\|g_+\|_2 \leq 4 + (6\pi^2 + 60\pi^2 R^{\frac{1}{3}}) \|y\|_{BV} \bar{m}.$$

Nyt lemmän 4.31 mukaan

$$\left( \sum_{i \in K \cap I_+} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 8\sqrt{m} + 2(6\pi^2 + 60\pi^2 R^{\frac{1}{3}}) \|y\|_{BV} \bar{m} \sqrt{m}.$$

Nyt vektorin  $W_h$  muodon perusteella

$$\begin{aligned} |W_h| &\leq \left( \frac{4\bar{m}}{h^2} + 2(6\pi^2 + 30^2\pi^4 R^{\frac{2}{3}}) \|y\|_{BV} m \bar{m} + \sum_{i \in K \cap I_+} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2\sqrt{\bar{m}}}{h} + 4(6\pi^2 + 42\pi^2 R^{\frac{1}{3}}) \|y\|_{BV} \bar{m} \sqrt{m} + 8\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Valitaan  $h_0 = (R\bar{m}m)^{-\frac{1}{2}}$  ja  $R \geq R_0 \geq \max((10\|y\|_{BV})^6, 4 \cdot 10^7)$ , jolloin ehdosta  $1 \leq \bar{m}^9 \leq R$  saadaan

$$\begin{aligned} |W_{h_0}| &\leq 2\bar{m}\sqrt{m}\sqrt{R} + 170\pi^2 R^{\frac{1}{3}} \|y\|_{BV} \bar{m} \sqrt{m} + 8\sqrt{m} \\ &\leq (2\sqrt{R} + 170\pi^2 R^{\frac{1}{3}} \|y\|_{BV} + 8) \left( \frac{m}{\bar{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{m}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq (3 + 17\pi^2) C(m) \sqrt{R} \bar{m}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq (3 + 17\pi^2) C(m) R^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \frac{1}{2} C(m) R. \end{aligned}$$

Jolloin  $f_{W_{h_0}}$  on osa joukkoa, jonka yli minimiä tutkitaan. Merkitään

$$F_h(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in J} \frac{\sigma((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma(\bar{w}_i \cdot x)}{h}$$

ja

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in J} \mathbf{1}_{\{\bar{w}_i \cdot x \geq 0\}} (u_i \cdot x),$$

jolloin selvästi  $f_{W_h} - g = F_h - G$ . Tutkitaan nyt, mitä on  $\frac{d}{dh} \|F_h - G\|_2$ . Kolmioepäyhtälöstä

$$\left| \frac{\|z(x+h)\| - \|z(x)\|}{h} \right| \leq \left\| \frac{z(x+h) - z(x)}{h} \right\|,$$

joten  $\frac{d}{dh} \|z(x)\| \leq \left\| \frac{d}{dh} z(x) \right\|$ . Nyt saadaan

$$\frac{d}{dh} \|F_h - G\|_2 \leq \left\| \frac{d}{dh} (F_h - G) \right\|_2 = \left\| \frac{d}{dh} F_h \right\|_2.$$

Myös kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$\left\| \frac{d}{dh} F_h \right\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i \in J} \left\| \frac{d}{dh} \frac{\sigma((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma(\bar{w}_i \cdot x)}{h} \right\|_2,$$

missä

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{d}{dh} \frac{\sigma((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma(\bar{w}_i \cdot x)}{h} \right\|_2 \\
&= \frac{1}{h^2} \|h\sigma'((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x)(u_i \cdot x) - \sigma((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma(\bar{w}_i \cdot x)\|_2 \\
&= \frac{1}{h} \left\| \frac{1}{h} \int_0^h [\sigma'((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma'((\bar{w}_i + tu_i) \cdot x)](u_i \cdot x) dt \right\|_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \left( \int_{S^1} \left( \frac{1}{h} \int_0^h [\sigma'((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma'((\bar{w}_i + tu_i) \cdot x)](u_i \cdot x) dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \left( \frac{1}{h} \int_0^h |u_i|^2 \int_{S^1} (\sigma'((\bar{w}_i + hu_i) \cdot x) - \sigma'((\bar{w}_i + tu_i) \cdot x))^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö saadaan arvioimalla Jensenin epäyhtälöllä  $\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu\right)^2 \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_A f^2 d\mu$  ja vaihtamalla integroimisjärjestystä sekä siitä, että  $(u_i \cdot x)^2 \leq |u_i|^2$ . Nyt koska  $\sigma'(t) = \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$ , saadaan

$$\frac{d}{dh} \|F_h - G\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}h\sqrt{m}} \sum_{i \in J} |u_i| \left( \frac{1}{h} \int_0^h I(i, h, t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

missä  $I(i, h, t) = \int_{S^1} |\mathbb{1}_{\{(\bar{w}_i + hu_i) \cdot x \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{(\bar{w}_i + tu_i) \cdot x \geq 0\}}| dx$ . Selvästi  $I(i, h, t) = I(i, h, t)^2$ . Indikaattorien erotus on erisuuri kuin 0 vain, kun

$$x \in (\{(\bar{w}_i + hu_i) \cdot x \geq 0\} \setminus \{(\bar{w}_i + tu_i) \cdot x \geq 0\}) \cup (\{(\bar{w}_i + tu_i) \cdot x \geq 0\} \setminus \{(\bar{w}_i + hu_i) \cdot x \geq 0\}),$$

ja geometrisesti perusteltuna tämän alueen koko on yhtä suuri kuin kaksi kertaa vektorien  $\bar{w}_i + hu_i$  ja  $\bar{w}_i + tu_i$  välinen kulma  $\theta$ . Koska  $hu_i \perp tu_i$ , suurin kulma saadaan arvolla  $t = 0$  ja suorakulmaisesta kolmiosta saadaan arvio  $2\theta \leq 2 \arctan(h|u_i|) \leq 2h|u_i|$ , jolloin  $I(i, h, t) \leq 2h|u_i|$  kaikilla  $t \in (0, h)$ . Nyt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh} \|F_h - G\|_2 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}hm} \sum_{i \in J} |u_i|^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}h} \sum_{i \in J} (6\pi^2 \|y\|_{BV} \sqrt{m})^{\frac{3}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}h} 15\pi^3 \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} \bar{m} m^{\frac{1}{4}} \leq \frac{15}{\sqrt{h}} \pi^{\frac{5}{2}} \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} \bar{m} m^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Koska  $\lim_{h \rightarrow 0} F_h = G$ , valinnalla  $h_0 = (R\bar{m}m)^{-\frac{1}{2}}$  ja integroimalla välin  $(0, h_0)$  yli saadaan

$$\begin{aligned}
\|f_{W_{h_0}} - g\|_2 &\leq 30\pi^{\frac{5}{2}} \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} \bar{m} m^{\frac{1}{4}} \sqrt{h_0} \\
&\leq 30\pi^{\frac{5}{2}} \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} \bar{m}^{\frac{3}{4}} R^{-\frac{1}{4}} \\
&\leq 30\pi^{\frac{5}{2}} \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} R^{-\frac{1}{6}} \leq 94 \|y\|_{BV}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\min_{\|W\| \leq C(m)R/2} \|f_W - y_r\|_2^2 - \inf_{H_{ma}} \|f_W - y_r\|_2^2 &\leq \|f_{W_{h_0}} - y_r\|_2^2 - \|g - y_r\|_2^2 \\
&\leq (\|f_{W_{h_0}} - y_r\|_2 + \|g - y_r\|_2) \|f_{W_{h_0}} - g\|_2 \\
&\leq (\|f_{W_{h_0}} - g\|_2 + 2\|g - y_r\|_2) \|f_{W_{h_0}} - g\|_2 \\
&\leq 30\pi^3 \|y\|_{BV}^{\frac{3}{2}} (94\|y\|_{BV}^{\frac{1}{2}} + 4) R^{-\frac{1}{6}} \\
&\leq 10^5 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{-\frac{1}{6}},
\end{aligned}$$

ja lopulta

$$\begin{aligned}
&\min_{\|W\| \leq C(m)R/2} \|f_W - y\|_2^2 - \inf_{H_{ma}} \|f_W - y\|_2^2 \\
&= \min_{\|W\| \leq C(m)R/2} \|f_W - y\|_2^2 - \min_{\|W\| \leq C(m)R/2} \|f_W - y_r\|_2^2 \\
&\quad + \min_{\|W\| \leq C(m)R/2} \|f_W - y_r\|_2^2 - \inf_{H_{ma}} \|f_W - y_r\|_2^2 \\
&\quad + \inf_{H_{ma}} \|f_W - y_r\|_2^2 - \inf_{H_{ma}} \|f_W - y\|_2^2 \\
&\leq 10\|y - y_r\|_2 + 10^5 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{-\frac{1}{6}} \\
&\leq (60\|y\|_{BV} + 10^5 (\|y\|_{BV}^2 + 1)) R^{-\frac{1}{6}} \\
&\leq 4 \cdot 10^4 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{-\frac{1}{9}}.
\end{aligned}$$

Nyt oletetaan  $\bar{m}^9 > R$ . Valitaan  $m' \leq 2\bar{m}$ , parillinen jolla  $R^{\frac{1}{9}} \geq \frac{m'}{2} \geq \frac{R^{\frac{1}{9}}}{2}$ . Nyt aiemman perusteella saadaan

$$\min_{|W'| \leq R} \|f_{W'} - y\|_2^2 \leq \inf_{H_{m'a'}} \|f_{W'} - y\|_2^2 + 4 \cdot 10^4 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{\frac{1}{9}}.$$

Lisäksi lauseen 4.27 ja lemmän 4.11 perusteella

$$\inf_{H_{m'a'}} \|f_{W'} - y_1\|_2^2 \leq \frac{62\|y\|_{BV}^2}{\bar{m}'} \leq 2000\|y\|_{BV}^2 R^{-\frac{1}{9}},$$

joten rajoitetussa avaruudessa  $H_{m'a'}$  saadaan

$$\min_{|W'| \leq R} \|f_{W'} - y\|_2^2 \leq \|y_2\|_2^2 + 5 \cdot 10^4 (\|y\|_{BV}^2 + 1) R^{-\frac{1}{9}}.$$

Nyt lemmän 4.32 mukaan

$$\min_{|W| \leq C(m)R} \|f_W - y\|_2^2 \leq \min_{|W'| \leq R} \|f_{W'} - y\|_2^2. \quad \square$$

## Kirjallisuutta

- [1] S. Aida, and I. Shigekawa, Logarithmic Sobolev Inequalities and Spectral Gaps: Perturbation Theory, J. Funct. Anal. 126, 2 (1994), 448–475.

- [2] B. Avelin and V. Julin, Approximation of BV functions by neural networks: A regularity theory approach, arXiv: Analysis of PDEs (2020)
- [3] B. Avelin, A. Karlsson, Deep limits and cut-off phenomena for neural networks, Journal of Machine Learning Research 23 (2022) 1-29
- [4] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Mathematica 116 (1966): 135-157
- [5] L. C. Evans, Partial Differential Equations, 2nd Edition, American Mathematical Society, (2010)
- [6] S. Gouëzel and A. Karlsson, Subadditive and Multiplicative Ergodic Theorems, Journal of the European Mathematical Society (2020)
- [7] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 97, 4, (1975)
- [8] R. Holley and D. Stroock, Logarithmic Sobolev inequalities and stochastic Ising models. Journal of Statistical Physics (1987), 46, 1159–1194
- [9] J. Horan, A Proof of Birkhoff’s Ergodic Theorem (2015)
- [10] J.M. Steele, Kingman’s subadditive ergodic theorem, Annales de l’Institut, H.P., (1989)
- [11] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York (2000)
- [12] A. Wibisono, Focker-Planck equation (2016)