

Arkipäivän matematiikan hyödyntäminen yläkouluikäisten matematiikan opetuksessa

Matematiikan opettajalinjan
pro gradu -tutkielma

Laatija:
Suvi Heino

19.1.2024
Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Matematiikka

Tekijä: Suvi Heino

Otsikko: Arkipäivän matematiikan hyödyntäminen yläkouluikäisten matematiikan opetuksessa

Ohjaaja: Professori Vesa Halava

Sivumäärä: 32 sivua

Päivämäärä: 19.1.2024

Tämä matematiikan didaktinen pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa pohditaan arkielämän matematiikan yhteyksiä koulumatematiikkaan sekä näiden yhteyksien vaikutuksia opetustilanteisiin ja oppilaiden oppimiseen. Tutkielman aineiston keruussa on pyritty keskittymään yläkouluikäisten (12-17-vuotiaiden) lasten ja nuorten oppimisesta kertoviin tutkimuksiin ja artikkeleihin.

Katsauksen perusteella todetaan, että matematiikan arkielämään liittämällä, konkretian hyödyntämisellä ja näiden avulla luokkahuoneen ilmapiiriin ja opetustilanteeseen vaikuttamalla voidaan mahdollisesti lisätä oppilaiden kiinnostusta matematiikan oppiainetta kohtaan. Lisäksi arkielämään liittämällä voidaan lisätä oppilaiden motivaatiota matematiikan opiskelua kohtaan ja konkretian avulla korjata esimerkiksi yleisiä matemaattisia virhekäsityksiä. Haasteita opetuksen uudelleen suunnitteluun tuovat koulujen rajalliset resurssit, opettajien kuormitus ja toisaalta asenne opetuskäytäntöjen muuttamista vastaan.

Avainsanat: opetusmenetelmät, arkielämä, opetus, konkretia, matematiikka

Sisällysluettelo

1	Johdanto	1
1.1	Tutkielman rakenne	1
1.2	Tutkielman tavoitteet	2
2	Tutkimuskysymykset- ja menetelmä	3
2.1	Tutkimuskysymykset	3
2.2	Tutkimusmenetelmä	3
3	Arkipäivän matematiikka	5
3.1	Opettajien uskomuksista	6
3.2	Vaikutukset oppilaisiin ja opetustilanteeseen	10
3.3	Vaikutukset oppimiseen sukupuolittain	11
4	Matematiikan opetus	13
4.1	Opetussuunnitelma ja -lainsäädäntö	13
4.2	Matematiikkakäsitykset opetuksen lähtökohtana	14
4.3	Oppilaiden käsitysten vaikutus motivaatioon	17
4.4	Opetusjärjestelyt ja opetusmateriaalit	18
5	Konkreettisia esimerkkejä arkielämän matematiikasta	20
5.1	Konkretian tarpeen selvittäminen	20
5.2	Pelit ja matematiikka	21
5.3	Työtapoja ja välineitä	23
6	Pohdinta	27
6.1	Opetuksen haasteet	28
6.2	Ehdotuksia tulevia tutkimuksia varten	30
6.3	Päätelmät	31
	Lähteet	33

1 Johdanto

Tämän tutkielman kirjoittajan omien havaintojen perusteella peruskoulun yläluokilla matematiikan opetus noudattaa usein tuttua kaavaa; ensin kotitehtävien tarkistus, jota seuraa opettajajohtoinen teoriaosuus oppikirjan pohjalta, jonka jälkeen oppilaat laskevat tehtäviä itsenäisesti ja opettaja kiertää luokassa auttamassa. Sen lisäksi, että luokkahuone on täynnä erilaisia oppijoita, jotka opettajan tulee ottaa huomioon opetuksessaan ja sen suunnittelussa (Roiha & Polso 2018), opettajan tulisi ottaa opetusta suunnitellessaan huomioon myös matematiikan liittäminen käytäntöön ja osaksi arkielämää (Ahtee & Pehkonen 2000; Opetushallitus 2014). Tässä kirjallisuuskatsauksessa on pyritty selvittämään, millaisia vaikutuksia konkreettisten ja arkielämään liittyvien matemaattisten ongelmien käytöllä on yläkoulun matematiikan opetuksessa. Työssä pohditaan myös, miten arkielämää voitaisiin tuoda osaksi yläkouluikäisten matematiikan opetusta ja toisaalta sitä, millaisia haasteita opetuksen arkeen liittämisessä mahdollisesti on.

1.1 Tutkielman rakenne

Tutkielma on jaettu kuuteen lukuun. Luvussa 2 esitellään tämän tutkielman tutkimuskysymykset ja -menetelmä, joiden avulla pyritään avaamaan tämän tutkielman tarkoitusta ja tarvetta laajemmin. Työn tarkoitus on tarkastella arkipäivän matematiikan hyödyntämistä matematiikan opetuksessa pohtimalla sen hyötyjä ja haittoja aiemmin kirjoitettujen tutkimusten pohjalta. Tutkimuskysymysten jälkeen luvussa 3 käsitellään arkielämän matematiikan käsitettä laajemmin sekä opettajan että oppilaan näkökulmasta. Luvussa pohditaan muun muassa opettajan omien uskomusten vaikutuksia matematiikan opetukseen sekä arkielämän matematiikan sisällyttämisen vaikutuksia oppilaiden kokemuksiin opetustilanteesta.

Luvussa 4 käydään läpi itse matematiikan opetusta ja muun muassa sitä, mitä matematiikan opetuksesta sanotaan opetussuunnitelmassa sekä opetuslainsäädännössä. Luvussa pohditaan, millaisia matematiikkakäsityksiä oppilailla on ja miten ne mahdollisesti vaikuttavat oppilaiden motivaatioon opiskella matematiikkaa. Lopuksi luvussa 5 esitellään vielä muutama käytännön esimerkki matematiikan oppitunneilla hyödynnettävistä konkreettisista, arkielämää jollain tavoin sisältävistä, tehtävistä tai projekteista. Lisäksi luvussa pohditaan pelien ja matematiikan suhdetta sekä pelien hyödyntämistä matematiikan opetuksessa. Tämän kokonaisuuden avulla on pyritty vastaamaan tässä työssä esitettyihin tutkimuskysymyksiin ja

tutkielmaa kokonaisuudessaan on pohdittu luvussa 6, jossa on myös esitetty ehdotuksia tulevia tutkimuksia ja tutkielmia varten.

1.2 Tutkielman tavoitteet

Tämän tutkielman tavoitteena on tarkastella matematiikan opetuksessa yleisesti käytössä olevia käytäntöjä ja oppilaan oppimista sekä matematiikan ymmärtämistä arkipäivän matematiikan avulla. Arkielämän esimerkkejä ja ongelmia voidaan opetuksen lisäksi hyödyntää myös esimerkiksi virhekäsityksien korjaamisessa tai selventämisessä. Tutkielman tarkoitus on selvittää ja analysoida, millaisia vaikutuksia konkretian ja arkielämän tilanteiden tuomisella opetustilanteeseen on oppilaisiin, heidän oppimiseensa sekä yleisesti matematiikan oppiaineeseen suhtautumiseen. Arkielämän matematiikka on mahdollisesti keino tuoda konkretiaa muuten ehkä abstraktiin matematiikan opetukseen ja lisätä näin aiheen ja oppiaineen kiinnostavuutta ja korostaa sen hyödyllisyyttä myöhemmin elämässä.

2 Tutkimuskysymykset- ja menetelmä

Tämän kirjallisuuskatsauksen tarkoituksena on selvittää ja analysoida millaisia vaikutuksia konkretian ja arkielämän tilanteiden tuomisella opetustilanteeseen on oppilaisiin, heidän oppimiseensa sekä mahdollisesti yleisesti matematiikan oppiaineeseen suhtautumiseen. Tässä luvussa on esitelty lähteiden valinnassa käytetyt tutkimuskysymykset sekä pyritty kuvaamaan tutkimusaineiston keruussa käytetty tutkimusmenetelmä. Tutkielman toivotaan myös avaavan matematiikan aineenopettajalle yläkoululaisen oppilaan ajatuksia matematiikasta ja erityisesti sitä, missä oppilas kokee tarvitsevänsä ja käyttävänsä matematiikkaa kuin myös antavan vinkkejä ja keinoja siitä, kuinka tätä arkielämään linkittyvää opetusta voidaan toteuttaa käytännössä.

2.1 Tutkimuskysymykset

Tämän kirjallisuuskatsauksen edetessä pyritään vastaamaan seuraaviin kysymyksiin:

1. Millaisia vaikutuksia konkreettisten ja arkielämään liittyvien matemaattisten ongelmien käytöllä yläkoulun matematiikan opetuksessa on opetustilanteisiin?
2. Miten arkielämää ja konkretiaa voitaisiin tuoda osaksi yläkouluikäisten matematiikan opetusta?
3. Minkälaisia haasteita arkielämän matematiikan hyödyntämisessä ja opetukseen liittämisessä on?

2.2 Tutkimusmenetelmä

Kirjallisuuskatsauksen tutkimusaineistoa kerättiin syksyllä 2023 ja alkuvuodesta 2024 hakemalla englanninkielisiä tieteellisiä artikkeleita eri tietokannoista kuten Volterista ja ERIC:istä. Hakulausekkeena käytettiin muun muassa yhdistelmää (learning OR teaching) AND (math OR mathematics) AND (everyday life OR daily living) AND (13-17 years old OR teenagers). Lisäksi vastaavilla hakusanoilla haettiin aineistoa suoraan kansainvälisten matematiikan koulutukseen keskittyvien lehtien kuten Educational Studies in Mathematics ja Mathematical Thinking and Learning julkaisuarkistoista. Näiden artikkelien viitteitä läpikäymällä löydettiin myös lisää aiheeseen liittyvää aineistoa. Tutkielman kirjoittamisessa on hyödynnetty myös suomenkielisiä didaktiikan teoksia kuten Roihan ja Polson (2018)

toimivan opetuksen opasta *Onnistu eriyttämisessä* sekä Ahteen ja Pehkosen (2000) kirjaa *Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan*.

Aineistoa etsittäessä monet hakusanoilla löydetty julkaisut keskittyivät oppimisvaikeuksista tai muusta kehityksellisestä puutteesta (engl. special needs, disable ja handicap) kärsiviin lapsiin ja nuoriin. Nämä rajattiin aineiston haussa tämän tutkielman ulkopuolelle, sillä tarkoituksena on keskittyä arkielämästä löytyvän matematiikan hyödyntämiseen matematiikan opetuksessa yleisesti koskien kaikkia yläkouluikäisiä oppilaita. Näiden julkaisujen lukumäärä verrattuna löydettyyn tutkimusaineistoon osoittaa kuitenkin hyvin sen, että konkreettisten esimerkkien ja käsillä tekemisen hyödyntäminen nähdään monesti vain oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden apukeinona, eikä niinkään kaikkia hyödyttävänä ja opetusta yleisesti rikastavana opetusmetodina.

Arkielämästä ja koululuokan ulkopuolelta löytyvästä matematiikasta ja sen hyödyntämisestä koulumatematiikan opetuksessa on kirjoitettu jo pitkään ja melko laajalti. Artikkelien etsimisen suhteen ei tehty aikarajausta, mutta painotus on pyritty pitämään uudemmissa tutkimuksissa, sillä matematiikan opetus on kehittynyt ja muuttunut viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana erityisesti digitalisaation myötä melko runsaastikin. Esimerkkinä tästä kehityksestä ovat muun muassa sähköiset ylioppilaskokeet ja perusopetuksen puolella sähköiset oppikirjat sekä verkosta löytyvät oppimispelit ja muut oppimisalustat. Opetusmenetelmät ja välineet ovat siis ehkä pakonkin sanelemana hieman muuttuneet, mutta itse matematiikan opetus on pysynyt kuitenkin melko samana ja samat arkielämään liittyvät pohdinnat tulevat esille niin aineiston uudemmissa kuin vanhemmissakin artikkeleissa.

3 Arkipäivän matematiikka

Käsitettä ”arkipäivän matematiikka” on hieman vaikea määritellä. Samasta asiasta saatetaan usein puhua eri nimityksillä, kuten matematiikka arjessa, matematiikka jokapäiväisessä elämässä, matematiikan yhteys oikeaan elämään tai realistinen matematiikka (engl. mathematics in daily life, mathematics in everyday life, real-life connections, realistic mathematics education). Arkipäivän matematiikalla tai arkielämän matematiikalla tarkoitetaan tässä tutkielmassa esimerkiksi sellaisia tehtäviä, laskuja tai ongelmia, joita yläkouluikäiset oppilaat voivat liittää omaan arkeensa tai jokapäiväiseen elämäänsä. Se voi tarkoittaa myös oppilaille tuttuja aiheita tai ongelmia, jotka eivät välttämättä toistu heidän jokapäiväisessä elämässään, mutta ovat kuitenkin kiinnostusta herättäviä tai jollain tavalla hyödyllisiä. Tehtävät voivat olla esimerkiksi sanallisia tehtäviä, joiden aihe liittyy johonkin arkipäivän tilanteeseen tai ne voivat olla konkretiaa sisältäviä tehtäviä, jotka voivat vaatia esimerkiksi fyysisesti jonkin asian mittaamista tai punnitsemista. Tässä luvussa käydään tutkimusaineiston valossa läpi arkipäivän matematiikan opetukseen sisällyttämisen vaikutuksia oppimis- ja opetustilanteisiin erilaisissa tapauksissa sekä opettajien uskomusten vaikutuksia arkeen liittyvän matematiikan opetuksessa.

Matematiikan ja arkielämän välistä yhteyttä ovat tutkineet tahoillaan muun muassa professorit Joanna O. Masingila (2002) ja Reidar Mosvold (2005). Masingilan (2002) mukaan yksi matematiikan opetuksen tärkeimmistä tehtävistä on auttaa oppilaita luomaan yhteyksiä koulussa opittavan teoreettisen matematiikan ja koulun ulkopuolisen arkielämään liittyvän matematiikan välille. Näin matematiikan opetus ohjaa oppilaita muotoilemaan omia epävirallisia matemaattisia tietojaan tieteellisemmällä tavalla ja yhdistää samalla matematiikan osaksi koulun ulkopuolista elämää. Myös Mosvold (2005) toteaa, että arjen elämäntilanteiden tulisi muodostaa perusta matematiikan opetukselle. Näiden kahden professorin tutkimukset lähestyvät aihetta kuitenkin hieman eri näkökulmista, sillä Masingila tutkii työssään oppilaita ja heidän näkemyksiään, kun taas Mosvold keskittyy opettajien näkemyksiin ja uskomuksiin. Mosvold tarkastelee tutkimuksessaan, millaisia ovat opettajien uskomukset koulumatematiikan ja arjen yhdistämisestä sekä sitä, minkälaisia opetuskäytäntöjä opettajat näiden uskomustensa pohjalta toteuttavat omassa työssään.

3.1 Opettajien uskomuksista

Opettajan käyttämät opetusmenetelmät, esimerkit ja yleisesti tämän tapa kohdata oppilaat vaikuttavat kaikki siihen, millainen opetustilanne on. Näiden lisäksi myös opettajan omat uskomukset vaikuttavat tämän opetustapoihin (Mosvold 2005). Opetustilanne on vuorovaikutusta opettajan ja oppilaiden välillä, joka lähtee perinteisessä opettajajohtoisessa opetustavassa (vrt. käänteinen opetus) liikkeelle opettajasta, jolla on luokassa auktoriteettinen asema. Onkin syytä tarkastella, ei vain oppilaiden kokemuksia, mutta sitä, miten opettajat itse kokevat matematiikan arkielämään liittämisen ja miten se puolestaan näkyy heidän opetuksessaan.

Sillä miten opettaja toimii ja opettaa, voidaan varmuudella sanoa olevan vaikutusta oppilaiden oppimiseen ja yleisesti opetustilanteeseen sekä luokassa vallitsevaan ilmapiiriin. Mosvold (2005) tutki väitöskirjassaan norjalaisten opettajien uskomuksia koulumatematiikan ja arjen yhdistämisestä. Hän oli tutkimuksessaan kiinnostunut siitä, mitä opettajat ajattelevat arkielämän matematiikasta, miten he käsittelevät sitä ja kuinka se näkyy heidän opetuksessaan. Tutkimus oli jaettu kolmeen osaan. Ensimmäisessä osassa tutkimuksen kohteena olevat opettajat vastasivat kyselyyn, jossa kartoitettiin heidän opetustaan teoreettisella tasolla kysymällä heidän ajatuksiaan väittämistä kuten ”korostan matematiikan ja oppilaiden arjen välistä yhteyttä” ja ”käytän usein projektitöitä opettaessani matematiikkaa”. Tämän jälkeen opettajia haastateltiin, jotta saatiin vielä paremmin selville heidän ajatuksiaan arkielämän ja koulumatematiikan välisistä yhteyksistä ja niiden mahdollisesta hyödyntämisestä matematiikan opetuksessa. Lopuksi tutkimuksessa seurattiin näiden opettajien opetusta ja tutkittiin, kuinka hyvin heidän ajatuksiaan aiheesta voitiin havaita käytännössä heidän opetustyössään.

Tutkimus toteutettiin Norjassa ja sen tavoitteena oli tutkia, minkälaisia opetusstrategioita opettajat hyödynsivät täyttääkseen norjalaisen opetussuunnitelman tavoitteet matematiikan yhdistämisestä jokapäiväiseen elämään. Käytännössä tutkimuksessa pyrittiin selvittämään opettajien käyttämiä opetusmateriaaleja, opetuksen sisältöä ja luokan organisointimenetelmiä. Tutkimuksen tuloksissa toistuva teema oli opettajien kokemus oppikirjaan sidottuna olemisesta. Osalle se oli oma ja toivottu valinta, osalle esimerkiksi osaamattomuutta halusta huolimatta. Eräs tutkimuksessa haastateltu opettaja kertoi kokevansa matematiikan projektityöt täysin yliarvostetuiksi ja piti näitä täysin sopimattomina omaan opetukseensa. Sama opettaja kertoi myös kokevansa avoimet ja arkeen liittyvät tehtävät vaikeiksi ja turhiksi.

Turhalla tässä tarkoitetaan sitä, että opettaja koki, ettei matematiikan arkeen liittäminen ollut matematiikan opetuksen tarkoitus, vaikka opetussuunnitelmassa niin todettiin, vaan koki, että sen tarkoitus oli ennemminkin harjoittaa oppilaiden aivoja ja ajattelua. Toinen opettaja taas koki, että koulumatematiikan arkeen liittäminen olisi järkevää, tärkeää ja tavoittelemisen arvoista, mutta myönsi, ettei itse kokenut osaavansa tehdä tätä. Sama opettaja kertoi myös olevansa kuormittunut ja kokevansa ajankäytöllisiä haasteita haastattelun toteutushetkellä.

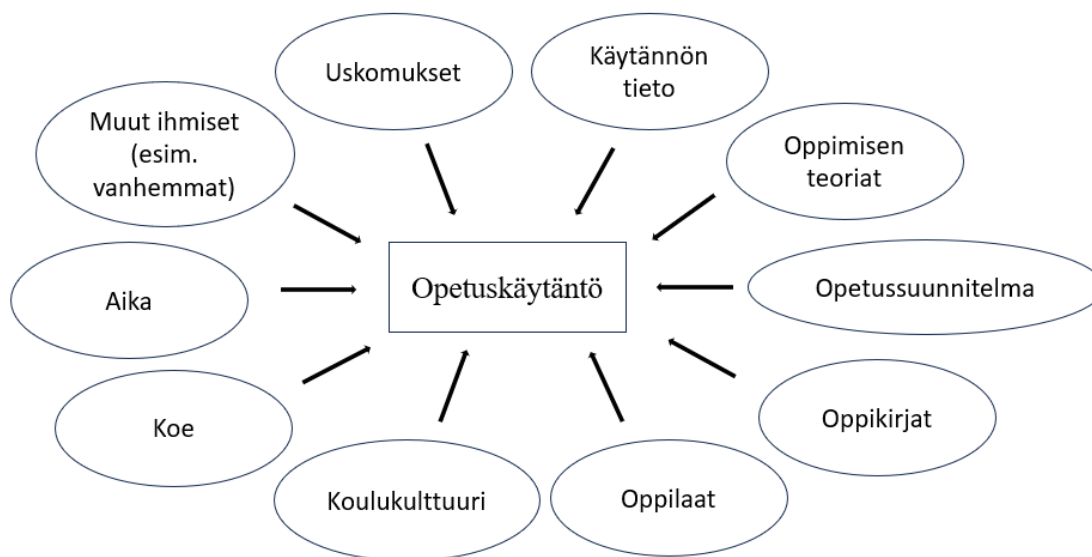
Mosvold (2005) toteaa tutkimuksessaan, että sen lisäksi, että opettajat kokevat koulussa opetettavan matematiikan liittämisen arkielämään hankalaksi, monella opettajalla saattaa kielteinen suhtautuminen opetussuunnitelman toteuttamiseen jo terminologian vuoksi. ”Arkipäivän matematiikan” koetaan rajoittuvan vain siihen, mitä oppilaat kohtaavat jokapäiväisessä elämässä, ja tämän vuoksi osa opettajista kokee tämän rajoittavan matematiikan opetuksen suunnittelua opetussuunnitelman pohjalta. Arkipäivän matematiikka voi kuitenkin olla myös yleisesti arkeen liittyvää ongelmanratkaisua matematiikan keinoin ja tämän mahdollisuudet ovat lähes rajattomat. Arkeen ja konkreettisiin esimerkkeihin liittyvää opetusta ei siis ole täysin mahdotonta löytää tai laatia, se vain vaatii opettajalta alkuun enemmän työtä.

Yksi Mosvoldin (2005) tutkimuksessa haastatelluista opettajista pohti työssään paljon koulussa opetetun matematiikan ja tosielämän välisen yhteyden muodostamista. Opettaja kertoi miettivänsä asiaa paljon oppitunteja suunnitellessaan ja oli huolissaan oppilaiden aktivoimisesta, koska uskoi, että oppilaat oppisivat enemmän toimimalla ja olemalla vuorovaikutuksessa keskenään. Sama opettaja kertoi kyselyssä korostaneensa usein koulumatematiikan yhteyttä oppilaiden arkeen, mutta kertoi myös kokevansa käsitteen ”koulumatematiikka” hankalana. Hän uskoi, että oppilaat pitivät koulussa oppimaansa matematiikkaa usein hyödyllisenä ja kertoi oppilaidensa työskentelevän usein sellaisten ongelmien parissa, jotka auttavat heitä ymmärtämään matematiikkaa. Opettaja kertoi haastattelussa kohdanneensa usein erimielisyyttä kollegoidensa taholta yrittäessään ehdottaa muille opettajille, että esimerkiksi laskentatekniikat eivät olisi niin tärkeitä matematiikan opetuksessa ja että opetuksen tulisi mahdollistaa enemmän oppilaiden omia selityksiä ja tehtävänantoja.

Tätä opettajaa kuvailtiin tutkimuksessa innovatiiviseksi opettajaksi, jolla on monia uusia ideoita ja visioita, mutta kuten hän itse totesi, hänen oli toisinaan vaikea saada yhteyttä kollegoihinsa. Opettajat ovat usein haluttomia kokeilemaan uusia asioita, ja koulut ja

koulujärjestelmä muuttuvat hitaasti. Haastateltu opettaja kuitenkin uskoi, että useimmat opettajat tarvitsevat hyvän ideoiden, toimintojen ja projektien lähteen, koska tällä hetkellä opettajat ovat usein liian sidoksissa oppikirjaan. Jotta matematiikkaa voitaisiin tehdä ymmärrettäväksi oppilaille, opettajan tulee konkretisoida ongelma, herättää oppilaissa uteliaisuutta ja kiinnostusta, ja tarjota erilaisia tapoja oppia uusi asia. Näitä tapoja varten opettajilla olisi hyvä olla jonkinlainen ideapankki, jossa jakaa ideoita ja ajatuksia, sillä haastatellun opettajan mukaan opettajilla ei välttämättä ole aina mahdollisuuksia tai resursseja etsiä näitä itse.

Opettajalla yksin on suurin rooli siinä, minkälaista arkeen liitettyä opetusta oppilaat saavat koulussa, sillä viime kädessä opettaja on se, joka tekee päätökset oppitunnin kulusta, siitä mitä opetusmateriaalia käytetään ja kuinka hyvin tunnin aihe liitetään arkipäivään – jos ollenkaan. Mosvoldin (2005) tutkimuksessa pyrittiin selvittämään, mitä muita lähteitä kuin oppikirjaa opettajat käyttävät, ottavatko opettajat esimerkkejä mediasta ja kannustavatko he oppilaita projekteihin ja erilaisiin ratkaisutapoihin avoimissa tehtävissä. Mosvoldin (2005) tutkimuksessa esitetty kaavio seikoista, jotka vaikuttavat opettajan opetuskäytäntöön on kuvattu alla kuviossa 1. Siihen, miten opettajat muodostavat oppitunnin rakenteen yrittäessään saavuttaa opetussuunnitelman tavoitteet matematiikan osalta vaikuttavat tutkimuksen mukaan useat eri tekijät ja opettajan uskomukset yhtenä niistä. Mosvoldin (2005) mukaan opetuskäytäntö on tulos päätöksistä, joita opettajat tekevät opetussuunnitelman tulkintojen ja uskomustensa perusteella. Jotta opetussuunnitelman tavoitteet toteutuisivat opetuskäytännössä, olisi tarkoituksenmukaista keskittyä opettajille annettavaan tietoon opetussuunnitelmasta ja sen tavoitteista. Tämän lisäksi Mosvoldin (2005) mukaan opettajille olisi tarjottava esimerkiksi kursseja, jotka haastavat heidän omia uskomuksiaan matematiikan opetuksesta. Kun pohditaan esimerkiksi PISA-tutkimuksen heikentyneitä tuloksia matematiikan osalta (Opetus- ja kulttuuriministeriö 2023), opettajien uskomusten tutkiminen voisi olla yksi luonnollinen tutkimuskohde, joka saattaisi antaa tietoa, jonka avulla voitaisiin pyrkiä vaikuttamaan matematiikan opetuskäytäntöihin.



Kuvio 1. Mosvoldin (2005) tutkimuksessa (s.251) käytetty kuvio opetuskäytäntöön vaikuttavista tekijöistä suomeksi käännettynä.

Syy siihen, miksi yksi Mosvoldin (2005) tutkimuksen opettajista koki avoimet tehtävät matematiikan opetuksessa vaikeiksi, liittyy itseasiassa osittain psykologiaan (Mosvold 2005). Kun opetuksessa käytetään avoimempia tehtäviä, jotka muistuttavat usein sellaisia ongelmia, joita kohtaamme tosielämässä, opettaja menettää osan kontrollistaan. Tehtävän tai ongelman vastausta tai ratkaisua ei välttämättä anneta yksiselitteisesti, ja oppimistilanteeseen vaikuttavat niin monet tekijät, että opettajajohtoiseen opetukseen tottunut saattaa tuntea menettävänsä niin sanotusti ohjaket näiden tehtävien kanssa. Toiset opettajat pitävät tätä ongelmallisena. Suoraan vastaukseen, joka voi olla oikea tai väärä, on helpompi samaistua. Tämä saattaa myös olla syy siihen, miksi monet opettajat sanovat, että matematiikan yhdistäminen jokapäiväiseen elämään ei välttämättä tee sen ymmärtämistä helpommaksi heikoimmille oppilaille, vaan se saattaa jopa päinvastoin tehdä asiasta vaikeamman hahmottaa.

Yksi tutkimuksen opettajista kertoi ilmiöstä keskustellessaan, että hän koki projektitöiden olevan nimenomaan ensisijaisesti huippuoppilaita varten, joilla on jo syvempää ymmärrystä asiasta ja kykyä soveltaa ja tutkia aihetta itsenäisesti. (Mosvold 2005) Roiha ja Polso (2018) puolestaan kirjoittavat, että vaikka monelle heikolle oppilaalle projektityöskentelyn kaltainen vapaus ja abstraktisuus saattavat olla vaikeita, tämänkin kaltaista työskentelyä on mahdollista eriyttää. Tällöin matematiikan konkreettisuutta ja esimerkiksi sen tutkimista pystytään mahdollistamaan koko luokalle. Heikompien oppilaiden on toisinaan vaikeaa päästä työskentelyssään alkuun tai eteenpäin, jos he eivät tiedän tarkalleen, mitä heidän pitäisi tehdä.

Roihan ja Polson (2018) mukaan tällaisille oppilaille on tärkeää antaa raameja ja vaihtoehtoja työntekoa varten. Toisinaan heikommat oppilaat voivat myös pitäytyä projektissaan pinnallisen ja konkreettisen tiedon tasolla. Lehtinen, Vauras ja Lerkkanen (2016) muistuttavat lisäksi, että käytännön työnkin tulee olla jollain tavalla ohjattua ja strukturoitua, sillä vaarana on, että kokeellisesta työskentelystä tulee muussa tapauksessa vain pelkkää epämääräistä puuhastelua.

3.2 Vaikutukset oppilaisiin ja opetustilanteeseen

Loogisesti ajatellen oppilaan voisi ajatella innostuvan ja kiinnostuvan matematiikasta enemmissä määrin silloin, kun tämä näkee missä tätä laskua tai taitoa tarvitaan käytännössä ja missä erilaisissa tilanteissa muun muassa kaavoja voidaan hyödyntää. Opettajan vastuulla on motivoida oppilasta matematiikan opiskeluun ja toisinaan tämä saattaa tuntua hyvinkin hankalalta. Matematiikan tärkeyden painottaminen voi olla vaikeaa silloin, kun oppilas itse kokee, ettei tule tarvitsemaan opetettavaa tietoa tai taitoa myöhemmin elämässään. Tällöin opetuksen suunnittelu vaatii opettajalta vaivannäköä, selvitystyötä ja usein hieman erilaisen lähestymistavan kuin vain oppikirjan esimerkkien toistamisen eri luvuilla.

Matematiikan arkielämään ja konkretiaan liittämällä voi olla positiivinen vaikutus erityisesti niihin oppilaisiin, jotka eivät muuten välttämättä loista tai pärjää matematiikassa. Heikommin pärjäävä oppilas ei välttämättä uskalla olla esillä luokassa tai osallistua opetukseen viittaamalla, jos hän kokee, ettei osaa tai pelkää tekevänsä virheen tai olevansa väärässä. Arkielämään liittyvillä käytännönharjoituksilla, opettaja voi antaa useammalle tällaiselle oppilaalle onnistumisen ja osallisuuden kokemuksen matematiikan tunnilla. Matematiikan opetuksen mielenkiintoisuutta lisää, jos kuution tilavuuden laskemiseksi oppilaiden onkin aluksi mitattava kuution sivun pituus itse. Näissä harjoituksissa on monesti paljon soveltamisen varaa ja näiden avulla voidaan myös painottaa oppilaille, että tehtävän tai ongelman ratkaisuun on joskus monta oikeaa tapaa tai reittiä. Näiden harjoitusten toteuttaminen pienemmissä ryhmissä tarjoaa myös hiljaisemmille tai ujoille oppilaille mahdollisuuden harjoitella esiintymis- ja vuorovaikutustilanteita turvallisessa ympäristössä myös matematiikan tunnilla (Roiha & Polso 2018).

Chapman (2022) kuvaa artikkelissaan yhden nuoren oppilaan reaktiota uuden matematiikan aiheen esille tulemiseen. Kyseisestä tilanteesta on nähtävissä, kuinka matematiikan oppiminen koululuokan ulkopuolella saattaa sujua ja vaikuttaa oppimiseen sekä matematiikkaan suhtautumiseen. Artikkelissaan Chapman (2022) siis tarkastelee kesäleiriä, jolla 11 nuorta

oppii neulomaan. Tarkoituksena on neuloa ensin mallitilkku, josta lasketaan oma neuletiheys, jonka pohjalta nuoret voivat suunnitella eli laskea omaa suurempaa neuletyötään varten tarvittavan silmukkamäärän. Leirillä on ohjaajia, joiden puoleen nuoret voivat kääntyä, kun he tarvitsevat apua neuletyönsä edetessä. Chapman (2022) kuvaa artikkelissa tilannetta, jossa yksi leirille osallistujista istuu alas ohjaajan kanssa, ja he alkavat laskea työhön tarvittavia silmukoita osallistujan mallitilkun pohjalta. Ohjaaja esittää osallistujalle kysymyksiä ja tämä ottaa esille muistivihkonsa, johon hän alkaa kirjoittaa lukuja ylös ja yrittää laskea näitä paperilla. Kun tilanne kehittyy alun rennosta keskustelusta lähemmäs ”koulumatematiikkaa”, oppilaan voi nähdä muuttavan asentoaan ja äänensävyään. Hän nojautuu taaksepäin pöydästä, istuu suurempana tuolissaan ja keskittyy ohjaajaan odottaessaan tämän arviointia.

Leirillä tapahtuva toiminta haastaa oppilaiden mahdollista mielikuvaa matematiikasta oppiaineena, jolla ei ole juurikaan kytköksiä todellisuuteen (Ahtee & Pehkonen 2000; Chapman 2022; Masingila 2002). Arkipäiväiseen tekemiseen liittyy usein matematiikkaa, jota emme välttämättä osaa ajatella juuri matematiikkana. Koulumatematiikka nähdään usein muodollisena ja jopa irrallisena arkipäiväisestä elämästä. Tämä vaikuttaa myös matematiikkaan suhtautumiseen, kuten yhden osallistujan tapauksessa nähtiin. Kyseinen tilanne jatkui niin, että ohjaajaa työnsi muistivihon sivuun ja palasin mallitilkun ja puikkojen pariin paperilla laskemisen sijaan. Tällöin osallistuvan oppilaan ryhti pehmeni ja hän siirsi keskittymisensä takaisin neuletyön pariin – ja onnistui laskemaan työhönsä tarvittavien silmukoiden määrän.

Matematiikan arkipäivään ja konkreettisiin esimerkkeihin liittäminen tarkasteltuna yhden oppilaan tasolla toi työskentelyyn matematiikan parissa siis positiivisen tunteen. Tämä voisi siis jossain tapauksissa luoda mahdollisesti myös luokkahuoneeseen erilaisen oppimisen ilmapiirin. Kun luokassa vallitsee turvallinen ja rento ilmapiiri, se lisää oppilaiden positiivisuutta, rauhaa ja innostuneisuutta, joka puolestaan edistää oppimista (Roiha & Polso 2018). Myös PISA- ja TIMSS-tuloksiin pohjautuen on suositeltu, että matematiikan opetuksessa tulisi korostaa oppimisen iloa sekä kehittää oppilaiden itsevarmuutta ja sinnikkyyttä vastata myös haasteellisiin tehtäviin ja tilanteisiin (Fenyvesi, Koskimaa & Lavicza 2015).

3.3 Vaikutukset oppimiseen sukupuolittain

Monissa tätä tutkielmaa varten etsityissä aineistossa oli maininta erityisesti tyttöjen motivoimisesta matematiikan pariin (esim. Atallah 2003). Tähän vaikuttavat osaltaan erilaiset

kulttuurit ja syvälle juurtuneet asenteet sekä yhteiskunnan tytöille ja pojille asettamat erilaiset odotukset. Suomessa tyttöjen ja poikien väliset erot matematiikan osaamisessa ovat PISA-arvioinnin mukaan olleet maltillisia (Opetus- ja kulttuuriministeriö 2023). Vuoden 2012 jälkeen tytöt ovat kuitenkin menestyneet arvioinnissa hieman paremmin. Uusimman PISA-tutkimuksen mukaan tyttöjen matematiikan osaamisen keskiarvo oli 487 pistettä ja poikien 482. Ryhmien välinen osaamisero oli tällöin siis 5 pistettä. Kuitenkin pojat ja miehet suuntautuvat Suomessa tyttöjä ja naisia useammin teknisille aloille ja valitsevat opiskeltaviksi aineiksi luonnontieteitä ja matematiikkaa (THL 2023).

Motivointiin vaikuttavat luonnollisesti oppilaiden kiinnostuksen kohteet. Näiden selvittämiseksi on monia keinoja, joista on kirjoitettu enemmän tämän tutkielman luvussa 5. Nykypäivänä ei luultavasti ole mahdollista tai edes järkevää jakaa oppilaita sukupuolen mukaan motivoidessa luokkaa matematiikan pariin. Aiemmin on saatettu ajatella esimerkiksi oppimispelien kasvattavan enemmän poikien kuin tyttöjen motivaatiota. Tämä ei välttämättä pidä paikkaansa, jos tutkitaan esimerkiksi pelaajabarometria vuodelta 2022, jossa todetaan, että naisista 98,9 % pelaa jotain digitaalista tai ei-digitaalista peliä toisinaan tai aktiivisesti, saman luvun ollessa miehillä 97,6 % (Kinnunen, Tuomela ja Mäyrä 2022). Miehillä aktiivinen digitaalinen pelaaminen on kuitenkin selvästi naisia yleisempää (71,4 % > 58,8 %) ja tämä on seikka, jonka voisi mahdollisesti ottaa huomioon myös matematiikan opetusta suunnitellessa.

4 Matematiikan opetus

Matematiikan opetuksesta sekä yleisemmin opetuksesta on säädetty muun muassa perusopetuslaissa sekä perusopetuksen opetussuunnitelmassa. Tässä luvussa käsitellään, mitä esimerkiksi perusopetuksen opetussuunnitelma toteaa matematiikan opettamisesta ja millaisia matematiikkakäsityksiä oppilailla on ja miten ne mahdollisesti vaikuttavat matematiikan oppimiseen, opettamiseen ja oppilaiden motivaatioon opiskella matematiikkaa.

4.1 Opetussuunnitelma ja -lainsäädäntö

Oppilaat tuovat opetustilanteeseen mukanaan aina omia arjen kokemuksiaan ja näiden kokemusten pohjalta aineenopettajan tulisi lähteä liikkeelle oman opetuksensa suunnittelussa. Näin mahdollistetaan se, että uusi opittava tieto rakentuu kumulatiivisesti eli kertyen aiemmin opitun tiedon päälle. Sama asia tulee esille useassa tieteellisessä tekstissä sekä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa – matematiikan opetuksen tulisi perustua arjen tilanteisiin ja lähteä liikkeelle oppilaiden oman elämän matematiikan tutkimisesta. (Evans 1999; Masingila 2002; Mosvold 2005; Opetushallitus 2014). Arkielämään liitetyt ongelmat tukevat usein myös matemaattisen ajattelun kehittymistä, joka on perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa listattu yhdeksi matematiikan opettamisen tavoitteeksi.

Opetussuunnitelmassa (Opetushallitus 2014) yläkouluikäisten eli 7.-9.-luokkalaisten oppimisympäristöihin ja työtapoihin liittyvissä tavoitteissa konkretia listataan edelleen tärkeänä osana matematiikan opiskelua. Lisäksi opetussuunnitelman työskentelytaitojen tavoitealue seitsemän kertoo, että yksi matematiikan oppiaineen tavoitteista on rohkaista oppilasta soveltamaan matematiikkaa myös ympäröivässä yhteiskunnassa. Tämä on linjassa perusopetuslain kanssa, jossa todetaan opetuksen yhtenä tavoitteena olevan tukea oppilaan kasvua osaksi yhteiskuntaa. Perusopetuslaissa opetuksen tehtäväksi listataan myös elämässä tarpeellisten tietojen ja taitojen antaminen. (Perusopetuslaki 1998)

Kun siis pohditaan matematiikan opetuksen järjestämistä lain ja opetussuunnitelman näkökulmasta, niin viesti on selvä – opetuksen tulisi sisältää konkretiaa ja se tulisi liittää osaksi arkipäivää, jotta oppilaat saavat matematiikankin osalta omassa elämässään tarpeellisia tietoja. Yhdeksi tärkeäksi seikaksi nousee jälleen se, että oppilaiden tulee itse tiedostaa, missä he tulevat tarvitsemaan kulloinkin opiskeltavaa aihetta. Matematiikan opettajalle tuttu kysymys ja ajatus oppilaiden suusta onkin ”mihin tulen tarvitsemaan tätä”. Matematiikan oppiaineelle on siis asetettu tavoitteita, joihin sen opettajat pyrkivät parhaansa mukaan

vastaamaan. Ongelmana onkin ehkä se, että matematiikan arviointi ei todennäköisesti koskaan sisällä minkäänlaista konkreettisen taidon arviointia osana kirjallista työtä. Matematiikka on eksaktitiede, mutta se niputetaan usein osaksi luonnontieteitä. Luonnontieteissä, toisin kuin matematiikassa, arvioinnin osana on usein kokeellisen työn arviointi. Työ saattaa olla esimerkiksi kemiassa pH-arvon selvittäminen ja se voidaan järjestää kirjallisen kokeen kanssa samaan aikaan niin, että jokainen oppilas käy vuorollaan luokan takana tekemässä työn kokeellisen osan. Matematiikassa vastaavaa ei ole, ja on ehkä vaikea kuvitella sen milloinkaan sopivan osaksi matematiikan oppiaineen opetusta.

Arviointi olisi siis vain yksi keino varmistaa, että matematiikan opetukseen kuuluisi myös konkretiaa kaikilla samaa opetussuunnitelmaa noudattavilla, mutta mahdollisesti siihen löytyisi myös muita keinoja. Opetussuunnitelman noudattaminen on kuitenkin opettajan vastuulla ja riippuu paljon tämän tulkinnasta, miten opetus käytännössä toteutetaan. Siinä, mitä opettaja olettaa ohjeistuksen tarkoittavan, saattaa olla suurta vaihtelua opetussuunnitelman tavoitteiden ollessa melko laajoja ja avoimia.

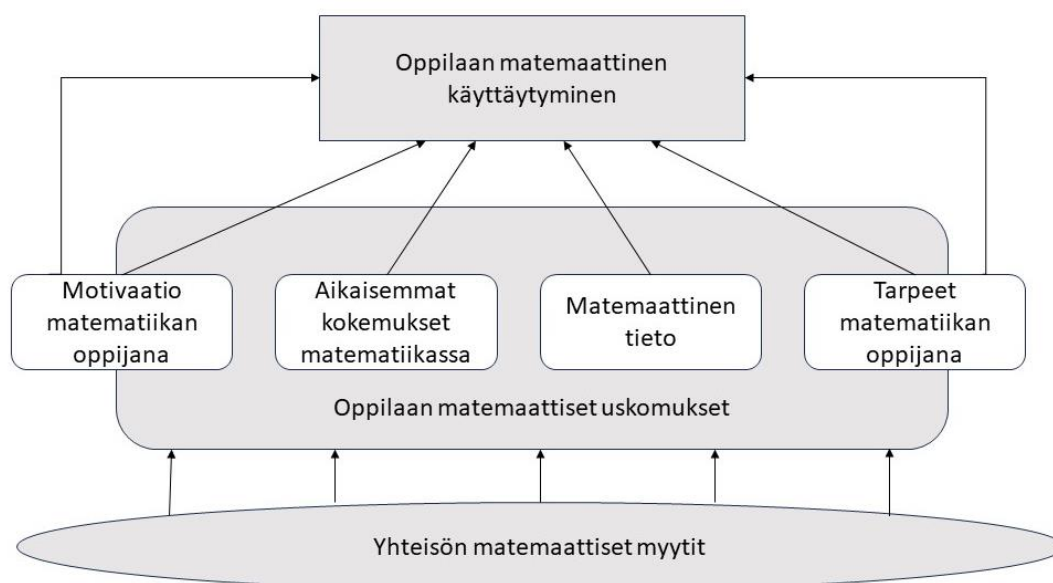
4.2 Matematiikkakäsitykset opetuksen lähtökohtana

Yleisesti voidaan sanoa, että oppilaiden aiemmat uskomukset opittavasta aiheesta vaikuttavat keskeisesti oppimiseen (Ahtee & Pehkonen 2000; Ausubel, Novak & Hanesian 1978).

Oppilaiden aiempien käsitysten ei siis tarvitse olla virhekäsityksiä vaikuttaakseen oppimiseen. Toki virhekäsitysten huomaaminen ja korjaaminen on osa opetusta, mutta yleisellä tasolla oppilaiden vakiintuneet uskomukset sekä aiempi tieto ja sen puutteet ovat kaikki taustalla vaikuttavia asioita, kun lähdetään opettelemaan uutta asiaa.

Jotta voimme auttaa oppilaita luomaan yhteyksiä koulumatematiikan ja koulumaailman ulkopuolisen matematiikan välille, meidän on ensin selvitettävä, missä oppilaat käyttävät matematiikkaa ja missä he itse ajattelevat käyttävänsä matematiikkaa (Masingila 2002). Ahteen ja Pehkosen (2000) mukaan oppilaiden matematiikkaan liittyviä käsityksiä ja uskomuksia on tutkittu jo 1980-luvulta lähtien. Oppilaiden uskomusten keskeistä vaikutusta oppimiseen on siis tutkittu, mutta nämä tutkimukset eivät kohtaa arkielämän matematiikkaan keskittyvien tutkimusten kanssa. Nämä tutkimukset, jotka käsittelevät matematiikkaa jokapäiväisissä käytännötilanteissa, ovat yleisesti ottaen tutkineet matematiikan käsitteitä ja prosesseja, joita nimenomaan aikuiset käyttävät näissä eri yhteyksissä ja lasten jokapäiväistä matematiikan harjoittelua on tutkittu hyvin vähän (Masingila 2002).

Oppilaan matemaattisiin uskomuksiin vaikuttavat yhteisön matemaattiset myytit, joita oppilaat kuulevat muun muassa ihmisiltä ympärillään, sosiaalisessa mediassa sekä vanhemmilta oppilailta esimerkiksi sisaruksiltaan. Toisinaan nämä uskomukset ovat jo lähtökohtaisesti virheellisiä, toisinaan niissä saattaa olla oikean ajatuksen siemen. Matemaattiset uskomukset saattavat myös toisinaan olla osittain oikein, mutta jäädä hieman vaillinaisiksi, jolloin ajatus ei ole yleisesti pätevä tai sovellettavissa. Ahteen ja Pehkosen didaktiikan kirjan (2000) mukaisesti oppilaiden matemaattiseen käyttäytymiseen vaikuttavien tekijöiden ja uskomusten välistä yhteyttä on kuvattu kuviossa 2.



Kuvio 2. Ahteen ja Pehkosen (2000) kirjasta *Johdatus matemaattisten aineiden didaktikkaan* (s.41) löytyvä kuvio oppilaan matemaattiseen käyttäytymiseen vaikuttavien tekijöiden ja uskomusten välisestä yhteydestä.

Yllä olevasta kuviossa 2 käy ilmi, että aikaisemmat kokemukset matematiikassa sekä motivaatio matematiikan oppijana liittyvät vahvasti oppilaan matemaattisiin uskomuksiin. Etenkin näihin tekijöihin matematiikan arkeen liittämällä ja konkretian hyödyntämisellä voi olla suuri vaikutus. Decin ja Ryanin (2000) itsemääräämisteorian (engl. self-determination theory) mukaan ihmisellä on kolme psykologista perustarvetta, jotka ovat tarve tuntea itsensä päteväksi, tarve kuulua joukkoon ja tarve vaikuttaa itseä koskevilla asioilla (engl. competence, relatedness, autonomy). Aiemmin tässä tutkielmassa on kirjoitettu siitä, että opettaja pystyy konkreettisia toimintatapoja hyödyntämällä tarjoamaan useammalle oppilaalle onnistumisen ja osallisuuden tunteen matematiikan tunnilla. Nämä ovat yksinkertaisia tapoja vaikuttaa oppilaan kokemuksiin matematiikasta, jotka puolestaan vaikuttavat oppilaan

matemaattiseen käyttäytymiseen ja lopulta matematiikan oppimiseen. Konkreettisten esimerkkien ja esimerkiksi käsillä tekemistä vaativien tehtävien lisääminen lisäävät myös oppilaiden autonomian tunnetta. Tälle otollinen tilanne on järjestetty niin, että oppilaat ovat vastuussa omasta tekemisestään ja kokevat, että he voivat itsenäisesti vaikuttaa siihen, mitä ovat tekemässä (Lehtinen, Vauras ja Lerkkanen 2016).

Oppimisen kannalta oppilaiden uskomusten selvittäminen etukäteen ennen opetusta on tärkeää (Ahtee & Pehkonen 2000). Ausubel (1978) totesi, että jos hänen pitäisi tiivistää koko koulutuspsykologia vain yhteen periaatteeseen, se olisi: ”Tärkein yksittäinen oppimiseen vaikuttava tekijä on se, mitä oppija ennestään tietää. Ota siitä selvää ja opeta sen mukaisesti.” Opettajalle tärkeää on oppilaiden käsitysten selvittämisen lisäksi se, miten näitä käsityksiä voidaan tarvittaessa korjata. Opettajan työhön kuuluu olennaisesti pohtia, miten saamme oppilaat muuttamaan virheellisiä käsityksiään ja toisaalta ilmaisemaan jo oikeat ajatukset matemaattisesti oikein.

Matematiikan opettajan on myös tärkeää opettaa oppilaita hyväksymään virheen mahdollisuus. Virheen tekeminen tai väärin vastaaminen eivät ole asioita, joita oppilaiden tulisi pelätä. Opettajan tulee rohkaista oppilasta vastaamaan pelkäämättä väärää vastausta ja kertoa, että oppiminen itseasiassa usein tapahtuu juuri virheiden kautta. Tiedettä tehdessä virheiden tekeminen on melkein välttämätöntä. Tämä on erittäin tärkeää matematiikan opetuksen onnistumiselle, sillä jos oppilaat eivät kerro ajatuksistaan, opettajalta voi helposti jäädä huomaamatta jokin helposti korjattavissa oleva systemaattinen virhekäsitys. Tällöin virheet kasautuvat kurssin tai jakson koetta tehdessä, jolloin opettajan on lähdettävä korjaamaan näitä käsityksiä silloin, kun pitäisi jo siirtyä uuteen aiheeseen.

Oppilaiden matemaattisten virhekäsitysten korjaamisessa on joskus mahdollista käyttää konkreettisia välineitä ja havainnollistavia esineitä tai asioita. Usein arkielämän esineiden ottaminen mukaan virhekäsitysten korjaamiseen tuo oppilaille vaihtelua tavanomaiseen luokkahuonetyöskentelyyn, jossa opiskelu tapahtuu joko kynän ja paperin avulla tai tietokoneen ruudulla. Myös tämä lisää kiinnostavuutta. Yksi yleinen virhekäsitysten kohde matematiikassa on murtoluvut. Murtoluvuilla laskemiseen liittyy useitakin virhekäsityksiä, mutta tarkastellaan nyt hetki murtolukujen suuruuksia. Yksi yleinen virhekäsitys voisi olla esimerkiksi: ”Murtolukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ väliin ei mahdu yhtään murtolukua.” Tässä esimerkissä yksi erinomainen tapa ottaa arkielämän esineet tai asiat mukaan, on puhua vaikkapa pizzasiivuista tai piirakkapaloista. Toinen, konkreettisempi tapa, on ottaa esille

murtokakkupalat, joita nykyisin löytyy luultavasti lähes jokaisesta koulusta. Suullisessa esimerkissä opettajan on mahdollista herätellä oppilasta pohtimaan kahta erikokoista pizzasiivua, joiden väliin mahtuu useampikin erikokoinen siivu. Murtokakkujen kohdalla havainnollistus on konkreettisempi, kun oppilaan on mahdollista itse tutkia erikokoisia paljoja ja sommitella näitä päällekkäin, joka helpottaa murto-osien vertailua. Oppilasta voi pyytää esimerkiksi perustelemaan murtokakkujen avulla, onko murtolukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä jokin murtoluku. Tämän jälkeen saman voi pyytää osoittamaan luvuin.

4.3 Oppilaiden käsitysten vaikutus motivaatioon

Kuviosta 2 kävi ilmi myös oppilaiden uskomusten vaikuttavan heidän motivaatioonsa matematiikan oppijana. Oppilaan uskomuksiin kuuluu myös tämän käsitys itsestään matematiikan oppijana. Kotoa saatavalla mallilla saattaa olla osaltaan suuri vaikutus siihen, miten oppilas näkee itsensä matematiikan oppijana. Vanhempien puhe omasta ”matikkapään” puutteesta, saattaa aiheuttaa lapsessa uskomuksen hänen kyvyttömyydestään oppia matematiikkaa. Toisaalta kotoa saatu tuki voi näkyä myös positiivisesti lapsen matemaattisessa osaamisessa (Mues, Wirth, Birtwistle & Niklas 2022).

Oppilaiden käsitys siitä, missä he tarvitsevat ja tulevat tarvitsemaan matematiikkaa vaikuttaa heidän opiskelumotivaatioonsa matematiikan tunneilla. Myös tässä kotiväen rooli on suuri, sillä vanhemmat saattavat ajattelemattaan lannistaa oppilaan opiskelumotivaatiota toteamuksilla kuten, ”en tarvinnut tätä koskaan, joten et sinäkään tule sitä tarvitsemaan”. Kuten aiemmin todettu, matematiikan opiskelun tulee lähteä oppilaiden omista kokemuksista ja mahdollisuuksien mukaan heidän arjen kokemuksistaan, mutta opettajan tehtävä on myös osoittaa oppilaille, mistä kaikkialta matematiikkaa voi löytää. Käsitys matematiikan tärkeydestä voi olla tärkeä osa motivaation syntyä. Matematiikan arkipäivään liittäminen ja esimerkkien etsiminen ja löytäminen arjesta tulisivat siis olla osa matematiikan perusopetusta. Ahteen ja Pehkosen (2000) kaaviossa korostetaankin juuri tätä uskomusten keskeistä roolia oppilaan ajattelun ja toiminnan taustatekijänä.

Matematiikka on aine, jossa uskomuksilla on valtava merkitys motivaatiolle ja sitä kautta oppimiselle. Ihmiselle, joka ymmärtää matematiikkaa ja on siitä kiinnostunut, on selvää, että matematiikkaa löytyy kaikkialta ympäriltämme. Lapsilla on jo pitkään tutkittu heidän kykyään kiinnittää huomiota lukumääriin (engl. Spontaneous Focusing On Numerosity) (Rathé, Torbeyns, De Smedt, & Verschaffel 2022). Samalla tavalla iän karttuessa he löytävät

ja näkevät matematiikkaa ja sen muotoja ja rakenteita ympärillään. Olisiko siis matematiikan opetukselle tarkoituksenmukaista pyrkiä auttamaan oppilaita huomaamaan matemaattisia malleja ja rakenteita, joita löytyy kaikkialta ympäriltämme? Näin voitaisiin myös kasvattaa oppilaan käsitystä matematiikasta ja sen tärkeydestä, joka joissain tapauksissa korreloisi myös motivaation kasvuun.

Mosvoldin (2005) tutkimuksessa tutkittavilta opettajilta kysyttiin heidän näkemystään siitä, pitävätkö oppilaat koulussa oppimaansa matematiikkaa hyödyllisenä. Kysymys osoittautui opettajille vaikeaksi vastata, joten sitä ei tule tässä painottaa liikaa. Kyseiset vastaukset painottuivat opettajien subjektiiviseen näkemykseen oppilaiden ajatuksista ja kokemuksista, ja opettajan on usein vaikea tietää, mitä asioita oppilas todella pitää hyödyllisenä. Masingila (2002) puolestaan selvitti tutkimuksessaan nimenomaan oppilaiden käsityksiä matematiikasta. Yhtenä tutkimuksen osana oli haastattelu, jossa oppilailta kysyttiin muun muassa missä nämä käyttävät matematiikkaa luokkahuoneen ulkopuolella ja mitä matematiikka heidän mielestään on. Masingila (2002) toteaa, että jos selvitämme missä oppilaat käyttävä matematiikkaa jokapäiväisessä elämässään, voimme rakentaa matematiikan opetusta jo olemassa olevan tiedon päälle ja esittää tuon tiedon formaalimmalla tavalla. Jos oppilaat ajattelevat matematiikan olevan yhtä kuin vain koulussa opiskeltava matematiikka, he eivät myöskään kykene huomaamaan sitä samoissa määrin arkielämässään. Siksi on tärkeää selvittää myös, mitä oppilaat ajattelevat matematiikan olevan.

4.4 Opetusjärjestelyt ja opetusmateriaalit

Arkipäivän matematiikkaa on mahdollista tuoda luokkahuoneeseen monin tavoin. Kiinnittämällä huomiota opetusjärjestelyihin, voidaan konkreettisia välineitä ottaa osaksi opetusta sujuvasti ja helposti. Roiha ja Polso (2018) toteavat, että kaikella oppitunneilla hyödynnettävällä materiaalilla on hyvä olla oma paikkansa luokassa. Erilaiset laskemisen apuvälineet, kuten murtokakut ja palikat on sijoitettava niin, että oppilaat tietävät mistä ne löytyvät ja voivat tarvittaessa käydä hakemassa niitä tehtäviä pohtiessaan ja laskemisen avuksi. Opettajan tehtäväksi jää varata luokkaan monipuolisesti opetus- ja havainnollistamisvälineitä. Myös Ahtee ja Pehkonen (2000) kirjoittavat, että havaintovälineiden käyttö ei ole pahitteeksi yläkoulussakaan. Päinvastoin matematiikan abstrakteja sisältöjä opetettaessa on keskeistä käyttää hyödyksi erilaisia havaintovälineitä. Opetuksen järjestämisperiaatteista Ahtee ja Pehkonen (2000) mainitsevat muun muassa konkreettisen tai kokeellisen työskentelyn, yhteyden arkielämään sekä havainnollistamisen.

Konkreettiossa työskentelyssä oppilas käyttää erilaisia konkreettisia apuvälineitä ja tutustuu tutkimalla opetettavaan aiheeseen. Kokeellinen työskentely taas on osa fysiikan ja kemian opiskelua. Arkielämään ja sen esimerkkeihin liittyvää opetusta suunnitellessaan opettaja voi pohtia myös tunnilla käytettäviä työtapoja. Matematiikan tunneilla ehkä vähemmän käytettyjä työtapoja ovat luokkakeskustelu ja ryhmätyöskentely. Näitä hyödyntämällä opettaja voi tarjota oppilaille sekä vastuuta että vapautta ja lisätä näin muun muassa oppilaiden autonomian tunnetta.

Esimerkiksi Mosvoldin (2005) tutkimukseen nojaten opettajan ja koulun resurssit ovat avain asemassa, kun pyritään vaikuttamaan matematiikan opetukseen. Näitä resursseja ovat niin raha, aika, koulun henkilökunta kuin opetusmateriaalit. Toisinaan koulun mahdollistamat tai tarjoamat opetusmateriaalit eivät riitä tai vastaa aivan täysin oppilaiden tai opettajan tarpeisiin. Tällöin opettajan on luotava itse materiaaleja, jotka tukevat sellaista opetuskäytäntöä, jota opettaja haluaa työssään toteuttaa. Kuten todettu, Mosvold (2005) kysyi tutkimuksessaan haastatelluilta opettajilta, käyttivätkö he opetuksessaan perinteisten oppikirjojen lisäksi joitain muita lähteitä ja kuinka usein. Kysymyksessä oppikirjan ulkopuolisista lähteistä mainittiin muun muassa esimerkkien ottaminen mediasta, joka on oiva tapa liittää koulumaailman ulkopuolisesta elämästä irrallisena pidettävää matematiikkaa arjen yhteyteen. Täysin opettajan vastuulle jäävä materiaalien hankkiminen, valmistaminen ja pohtiminen on kuitenkin kuormittava tekijä opetusarjessa. Tähän liittyvistä opetuksen haasteista on kirjoitettu enemmän tämän tutkielman luvussa 6.

5 Konkreettisia esimerkkejä arkielämän matematiikasta

Matematiikka on eksaktitiede, ei siis luonnontiede kuten vaikkapa fysiikka tai kemia. Luonnontieteiden opetuksessa käytäntö tulee sujuvasti luonnolliseksi osaksi opetusta ja ilmiöiden tutkimista, mutta matematiikassa opettajan on nähtävä ehkä hieman enemmän vaivaa ja tehtävä selvitystyötä sen eteen, että opetettavaan asiaan tulee mukaan myös konkretiaa, jotta se ei jää täysin abstraktille tasolle. Opettajan tulee miettiä etukäteen, miten tunnin asian voisi liittää joko suoraan oppilaiden omaan elämään tai johonkin muuhun yleisesti arjessa hyödynnettävään asiaan. Opettajan tulee pohtia, miten aiheeseen tutustuessa, sitä opiskeltaessa tai tutkiessa voitaisiin hyödyntää konkretiaa ja käytännön esimerkkejä. Lisäksi opettajan on hyvä valmistautua kertomaan, missä opiskeltava aihe tulee esille tulevaisuudessa esimerkiksi jatko-opinnoissa tai mille tulevaisuudessa opiskeltavalle asialle se luo pohjaa, jos joku oppilaista osoittaa kiinnostusta aihetta kohtaan.

5.1 Konkretian tarpeen selvittäminen

Aiemmin tässä tutkielmassa todettiin, että opetukseen olisi hyvä sisällyttää oppilaita kiinnostavia aiheita. Yläkouluikäiselle asuntolainan korkojen laskeminen ei luultavasti ole yhtä mielenkiintoista tai samaistuttavaa kuin esimerkiksi YouTube-tähtien seuraajamäärien kehittymisen tutkiminen. Opetuksen on siis hyvä lähteä liikkeelle siitä, mitä oppilaat pitävät mielenkiintoisena. Laskurutiinin oppiminen onnistuu joka tapauksessa, olivat luvut mitä tahansa. Keinoja selvittää oppilaiden mielenkiinnonkohteita on monia. Tämän lisäksi, kuten Masingila (2002) totesi, on tärkeää selvittää, missä oppilaat ajattelevat käyttävänsä matematiikkaa ja ehkä jopa mitä he ajattelevat matematiikan olevan. Keinoja tähän ovat esimerkiksi oppilaiden haastattelut sekä kirjalliset kyselyt jaksojen alussa tai lopussa. Haastattelujen toteuttaminen on luultavasti lähes kaikille opettajille utopistinen ajatus, mutta esimerkiksi kokeen yhteydessä oleva lyhyt kysely on helppo toteuttaa, eikä se syö liialti opettajan resursseja. Kokeen lopuksi opettaja voi kurssipalautteen yhteydessä kysyä oppilailta heidän mielenkiinnonkohteistaan, heidän ajatuksiaan siitä, missä he käyttävät matematiikkaa ja samalla kokemuksia ja mielipiteitä niistä tunteista, joilla konkretiaa on hyödynnetty jakson aikana.

Sitä minkälaisiin asioihin oppilaat kaipaavat selkeyttä ja mahdollisesti konkreettisia esimerkkejä voi selvittää suoraan kysymällä asiaa oppilailta, mutta myös seuraamalla koemenestystä ja oppilaiden muuta edistymistä. Esimerkiksi kotitehtävien tekemisen tarkkailu

ja tunneilla osaaminen ovat asioita, joihin opettaa kiinnittää työssään huomiota. On tietysti selvää, että esimerkiksi tunnilla osallistumiseen vaikuttavat myös muut tekijät kuin vain oppilaan aiheen osaaminen. Opettajan vastuulla on havaita, jos jokin aihealue osataan huonosti, sitä ei ymmärretä tai se jää pinnalliselle tasolle ja kaipaisi täten syvempää tutustumista, läpikäymistä tai selkeytystä. Konkreettisia apuvälineitä käyttämällä oppilas voi luoda pohjaa syvemmälle oppimiselle (Ahtee & Pehkonen 2000). Myös virhekäsitysten muuttamisen apuna voidaan hyödyntää havainnollistavia välineitä tai ihan vain arkipäivän esineitä.

5.2 Pelit ja matematiikka

Ilman matematiikkaa meillä ei olisi digitaalisia pelejä. Pelien rakentaminen tietokoneella vaatii matematiikkaa, ja ehkä tärkein näistä matematiikan osa-alueista on binäärimatematiikka. Se muodostaa olennaisen osan tietokoneohjelmointia ja käyttää nimensä mukaisesti vain binäärijärjestelmän kahta merkkiä eli tyypillisesti lukuja 1 ja 0. (The Math Learning Center 2022) Mutta jos yläkouluikäiselle oppilaalle yrittää perustella matematiikan opiskelun tarvetta pelien käyttämällä matematiikalla, saattaa oppilaan suhtautuminen asiaan olla melko vastahakoista. Oppilaat kokevat monesti, että heidän ei tarvitse välttämättä tietää, miten jokin matematiikkaan pohjautuva sovellus, peli tai sosiaalisen median algoritmi toimii, kunhan se vain toimii ja he voivat käyttää sitä. Matematiikan opiskelu ei kuitenkaan ole vain laskemista ja laskukaavojen käytön opettelua, vaan siihen kuuluu oleellisena osana matemaattisen ajattelun kehittäminen ja kehittyminen (Munroe 2015). Yksi matematiikan opiskelun tehtävistä on laajentaa oppilaiden matemaattista maailmankuvaa ja auttaa heitä hahmottamaan ja löytämään matematiikkaa omasta arjestaan. Matematiikan opettaja voi siis kertoa matematiikan hyödyllisyydestä, sen käyttökohteista ja sovelluksista, mutta myös mahdollistaa näiden asioiden huomaamisen ja tutkimisen käytännössä. Opettajan tehtävä onkin tarjota oppilaalle mahdollisuus tutustua esimerkiksi pelien kehittämiseen tämän ikä- ja kehitystasoon sopivalla tavalla. Kehittämällä oppilaiden matematiikan ymmärrystä ja matemaattista ajattelua, oppilaat oppivat näkemään matematiikkaa laajemmin ympärillään (Woo 2018).

Oppimispelien vaikutusta oppimiseen on tutkittu paljon, mutta etenkin matematiikan arkeen liittämässä ne toimivat erityisen hyvin. Pelaaminen on osa monen yläkouluikäisen arkea ja liittämällä matematiikan oppimisen osaksi pelien pelaamista voidaan matematiikkaa opettaa oppilaille heille arkisella tavalla. Pelien itsensä sisältämä matematiikka, kuten videopelien

3D-maisemat, tilastot ja todennäköisyydet mahdollistavat erilaisten matematiikan aiheiden oppimisen näiden muiden valmiiksi luomien rakennelmien pohjalta. Esimerkkinä tästä on palikkapeliksikin kutsuttu Minecraft. Pelin taustalla on luonnollisesti valtavasti matematiikka, mutta peli itsessään mahdollistaa erityisesti geometrinen muotojen rakentelun ja tutkimisen oppilaille mielenkiintoisella tavalla. Peli rakentuu siis eri ”materiaaleja” sisältävistä 3D-lohkoista, joista voidaan rakentaa yksinkertaisia asioita kuten taloja tai uskomattomia, monimutkaisia ja suuria rakennelmia kuten tietokoneita. Luokkahuoneessa opetuskäyttöön soveltuu erityisesti MinecraftEdu-opetuspelejä, jota lähdettiin kehittämään seitsemän vuotta sitten suomalaisidean pohjalta (YLE 2016).

Minecraft ja erityisesti sen versio MinecraftEdu antavat opettajalle mahdollisuuden käyttää enemmän luovuutta opetustyössään. Lisäksi pelin käyttö tarjoaa myös oppilaille vapauden osoittaa omaa oppimistaan ja osaamistaan eri tavoin. Esimerkiksi suhdelukujen ja tilavuuksien oppimisessa mahdollisuuksia Minecraftin kaltaisessa pelimaailmassa on runsaasti. Moninpeleminaisuutta hyödynnettäessä pelimäisessä opetustilanteessa voi olla mukana koko opetettava luokka. Tällöin pelaaminen tukee myös muita opetuksen tavoitteita kuten yhteistyötaitojen ja ryhmässä toimimisen opettelua. Muun muassa ongelmanratkaisutaitojen kehittymistä voi tukea erilaisten näkökulmien kuuleminen. Yhtä lailla ongelmanratkaisun harjoittelu yhdessä luokkana tai pienemmissä ryhmissä auttaa oppilasta tiedostamaan usean erilaisen, mutta silti oikean, ratkaisutavan olemassaolon. Matematiikassa, kuten arjessa, ongelmiin on usein monta ratkaisutapaa, eikä matematiikan opetuksessakaan ole mielekää pyrkiä aina vain yhteen oikeaan vastaukseen. Eri vaihtoehtojen testaaminen oikean tai toimivan ratkaisun löytämiseksi kehittää myös sinnikkyyttä, keskittymistä ja pitkäjänteistä työskentelyä, joka on mahdollisesti katoava taito nykypäivänä.

Vaikka oppilas ei osoittaisi kiinnostusta pelien taustalla olevaa matematiikkaa kohtaan, opettaja voi sanoittaa ja oikeita käsitteitä käyttäen nimetä peleissä näkyvissä olevaa matematiikkaa. Myös erilaisten toistuvien mallien huomaaminen on osoitus matemaattisesta ajattelusta. Vihollisen toistuvan liikeradan oppiminen on esimerkki matemaattisen mallin huomaamisesta. Pelit harjoittavat usein aivan huomaamatta myös logiikkaa ja loogista päättelykykyä. Roiha ja Polso (2018) ehdottavat kirjassaan, että toisinaan kotitehtävien antamisen sijaan, läksyksi voisi antaa ohjeen pelata jotain tiettyä peliä. He toteavat, että tämä voisi motivoida kotitehtävien kanssa tuskaillevaa oppilasta tavanomaisia läksyjä enemmän.

Matematiikan yhdistäminen arkielämään pelien kautta ei kuitenkaan vaadi onnistuakseen nimenomaan digitaalisia pelejä. Strategialautapelit, jotka eivät vaadi suoraan matemaattista laskentataitoa, vaativat suuresti loogista päättelykykyä. Usein strategiapelit sisältävät myös pisteenlaskentaa, joka puolestaan yhdistää oman strategian miettimiseen ja luomiseen sen, kuinka paljon pisteitä jokaisesta siirrosta voi saada. Kun pohditaan pelissä tehtäviä siirtoja suhteessa pisteenlaskuun, kyse on taas matemaattisesta optimoinnista. Tällaisten matemaattisten käsitteiden nimeäminen ja avaaminen oppilaille voi toimia motivoivana tekijänä matematiikan oppiaineen opiskelussa. Toisinaan oppilaita motivoi myös peleissä pärjääminen, jolloin tilastojen ja todennäköisyyksien opetteluun on helppo ohjata niin arkielämän esimerkkien kuin pelien avulla, mutta tämä, kuten moni muukin, on hyvin yksilöllistä.

Erilaiset koulumaailman ulkopuoliset pelit voivat siis tarjota virikkeellisen oppimisympäristön tai toimia matemaattisen ajattelun tukena. Muun muassa shakki kehittää suoraan matemaattista ajattelua (Roiha & Polso 2018). Matematiikan tunneilla hyödynnetään myös monesti oppimispelejä, jotka ovat suoraan opetusta varten luotuja, usein tiettyyn matematiikan osa-alueeseen keskittyviä pelejä, kuten potenssidomino tai kertolaskubingo. Nämä pelit toimivat kentässään hyvin, mutta jos tavoitteena on tuoda matematiikkaa lähemmäs oppilaiden omaa elämää ja arkea, esimerkiksi tässä mainittu Minecraft saattaa vedota oppilaisiin enemmän. Kokeelliset työpajat ja digitaaliset pelit muodostavat yhdessä rikkaan oppimisalustan, jonka avulla voidaan tarjota entistä enemmän erilaisia oppimistapoja ja mahdollisuuksia oppia erilaisille matematiikan oppijoille (Fenyvesi, Koskimaa & Lavicza 2015). Opettajan vastuulle jää pohtia missä tilanteissa oppilas tai oppilaat hyötyvät enemmän digitaalisen maailman hyödyntämisestä ja milloin samaa asiaa on kannattavaa tutkia esimerkiksi fyysisillä materiaaleilla, kuten legopalikoilla, luokkahuoneessa.

5.3 Työtapoja ja välineitä

Osa matematiikan osa-alueista, kuten esimerkiksi geometria, on saanut alkunsa arkielämän tarpeesta. Matemaattisilla malleilla pyritään monesti kuvaamaan oikean elämän ja tavallisen arjen asioita tai ratkaisemaan jokapäiväisessä elämässä vastaantulevia ongelmia. Eräästä tällaisesta arkipäivään ja tarkemmin vielä turvallisuuteen liittyvästä käytännön tutkimuksesta kirjoitti Bruce Duncan (2011) Tasmanian yliopistosta artikkelissaan Numeracy in household safety. Tutkimuksessaan hän kuvaa australialaiselle yhdeksäsluokkalaisten (engl. Year 9 class) eli 14-15-vuotiaiden joukolle annettua tehtävää selvittää pihan kaltevuus.

Pohjustuksena tehtävälle kerrotaan, että erään päältäajettavan ruohonleikkurivalmistajan ohjeistuksessa todetaan, että ruohonleikkurilla ei tulisi turvallisuussyistä ajaa maastossa, jossa on yli 10 asteen kulma. Oppilaat pyrkivät siis keksimään tapoja, joiden avulla he voivat osoittaa kulman olevan alle 10 astetta tai mahdollisesti sen yli. Projektissa käytettyjä ratkaisutapoja tarkasteltaessa on nähtävissä niiden monipuolisuus ja vaihtelevuus. Esimerkkejä oppilaiden keksimistä ratkaisuista on esitetty kuvissa 1 ja 2.



Kuva 1. Vas. Duncanin (2011) artikkelissa esitetty oppilaan ratkaisu hyödyntäen pystysuoraa referenssiiviivaa.

Kuva 2. Oik. Ratkaisu, jossa on hyödynnetty astelevyä. / Duncan (2011)

Duncan (2011) kertoo artikkelissaan, että tätä projektia toteutettaessa on hyvä varata erilaisia materiaaleja, kuten narua, vettä, erilaisia astioita, puun ja pahvin palasia sekä erilaisia työkaluja merkitsemiseen, mittaamiseen ja leikkaamiseen. Hän toteaa myös, että on olettavissa, että jokainen ryhmä haluaa jossain vaiheessa rakennusprosessiaan käyttää astelevyä, joko suoraan työhön kiinnittäen tai merkitsemään sillä etukäteen jonkinlaisia rajoja tai referenssiiviivoja. Artikkelin kuvissa on nähtävissä hyvin, kuinka samaan tilanteeseen on löydettävissä useita erilaisia ratkaisutapoja, ja kuinka ongelmanratkaisussa ei aina ole vain yhtä oikeaa ratkaisua tai vastausta. Samasta avoimesta lähestymistavasta ongelmanratkaisuun kirjoittaa myös Munroe (2015) kuvaillessaan Japanin pitkää historiaa avoimien tehtävien (engl. open-ended problems, open approach) käytöstä matematiikan opetuksessa oppilaiden korkeamman ajattelun kehittämiseksi. Tämäntyyppistä arkielämään suoraan linkittyvää ongelmaa ratkaistaessa voidaan myös jakaa oppilaat ryhmiin, jolloin

projektin aikana harjoitellaan myös yhteistoiminnallisen työskentelyn periaatteita, joista jokainen oppilas hyötyy myöhemmin esimerkiksi työelämässä. Näin opetustilanne vastaa hyvin suomalaisessakin opetussuunnitelmassa listattuja tavoitteita ja sisältöjä.

Duncanin (2011) artikkelissa esitetty ongelma on vain yksi esimerkki arkipäivään liitettävissä olevista matematiikan sisällöistä. Kyseinen esimerkki liittyy vahvasti kulmien mittaamiseen, arvioimiseen ja esimerkiksi vieruskulman ja suplementtikulmien käsitteiden oppimiseen. Oppilaat saavat mahdollisuuden hyödyntää oppimaansa käytännössä ja näkevät, kuinka paljon 10 astetta todellisuudessa on. Erityisesti geometrian puolella arkipäivän sovelluksia löytyy paljon, mutta myös muita matematiikan aiheita on mahdollista lähestyä konkretian ja arkipäivän esimerkkien kautta. Konkretian hyödyntäminen voi auttaa oppilaita muun muassa näiden avaruudellisen hahmotuskyvyn kehittymisessä. Duncanin (2011) tehtävässä mahdollisia ratkaisuja oli useita, mutta matematiikassa etsitään toisinaan myös parasta mahdollista ratkaisua kaikkien mahdollisten ratkaisujen joukosta. Tätä kutsutaan matemaattiseksi optimoinniksi ja myös se on helposti liitettävissä jokapäiväiseen elämään, sillä toisinaan teemme sitä lähes huomaamattamme.

Esimerkki arkipäivän tilanteesta, jossa optimoidaan, voisi olla parhaimman reitin valitseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa on kuljettava pisteestä A pisteeseen B ja halutaan optimoida matkaan käytettävä aika mahdollisimman pieneksi. Etsitään siis nopeinta reittiä. Jos tarkastellaan kuljettavaa matkaa kartalla, nopein reitti ei välttämättä ole aina suorin ja lyhyin reitti. Kartalle piirretty suora viiva saattaa kulkea esimerkiksi suon poikki tai vuoren tai mäen yli. Myös kartan lukeminen vaatii matematiikkaa muun muassa mittakaavojen hahmottamisen muodossa. Parhaimman reitin valitsemiseen vaikuttavat esimerkiksi käytössä olevat tiet ja maasto, ruuhka-ajat sekä käytettävissä olevat kulkuneuvot. Parasta ratkaisua etsiessä pohditaan muun muassa onko kannattavampaa kulkea osa matkasta hiekkatietä pitkin ja oikaista metsän läpi vai kulkea koko matka asfaltoitua tietä pitkin.

Matematiikkaa voi liittää arkeen loputtomilla erilaisilla tavoilla. Toisaalta arkielämää ja siihen liittyviä esineitä ja asioita voi hyödyntää matematiikan opetuksessa hyvin monin, mielikuvituksellisin tavoin. Erilaisten muotojen, tilavuuksien ja suhteiden tutkiminen onnistuu helposti myös luokkahuoneessa. Toisinaan avuksi voidaan ottaa digitaaliset materiaalit kuten pelit. Negatiivisilla luvuilla laskiessa jokaisen oppilaan vihosta on hyvä löytyä lämpömittari, jonka asteikko on helposti luettavissa. Opettaja voi hyödyntää opetuksessaan koulusta löytyvää materiaalia tai rakentaa sitä itse. Esimerkiksi tilavuuksiin siirryttäessä voidaan

luokassa tutkia yhdessä oppilaiden kanssa kuutiota, jonka sivu on metrin mittainen. Tällöin opettajan on tietysti joko löydettävä tällainen kuutio, tai rakennettava sellainen itse saatavilla olevista materiaaleista. Konkreettisia välineitä hyödynnettäessä on hyvä muistaa, että opettajan ei tarvitse aina keksiä kaikkea itse, vaan hän voi hyödyntää välineiden valmistamisessa ja löytämisessä myös oppilaiden omia ideoita. Tämä on lisäksi oiva tapa saada oppilaat itse huomaamaan ympärillään sellaisia asioita, joita he voivat käyttää hyödyksi matematiikan asioita opiskellessaan ja tutkiessaan. Tavallisten luokasta löytyvien välineiden kuten murtokakkujen, noppien ja erimuotoisten astioiden lisäksi ei välttämättä tarvita erikoisia matemaattisia välineitä. Esimerkiksi yhtälönratkaisun tukena tai virhekäsitysten kitkemiseksi voidaan käyttää apuna tavallisia banaaneja ja mandariineja.

6 Pohdinta

Jokapäiväisen matematiikan tutkimus on toistuvasti tuottanut näyttöä siitä, että ihmiset oppivat matematiikkaa koulun ulkopuolella (Carragher & Schliemann 2002). Vaikka koulut pyrkivät valmistamaan oppilaita jonkinlaiseen yhdistelmään arjen, työpaikan ja jatkokoulutuspaikan matemaattisia käytäntöjä, perinteinen koulumatematiikka tarjoaa edelleen pääsyyntä enimmäkseen vain koulumatematiikkaan. Oppikirjojen sanalliset tehtävät eivät vastaa rakenteeltaan arkipäivän ongelmia, jotka voivat olla avoimia, usealla tavalla ratkaistavissa tai vaatia apuvälineitä ja muiden ihmisten apua. (Moschkovich 2002) Miksi pienillä lapsilla konkretian hyödyntämiseen matematiikan opetuksessa rohkaistaan, mutta isommilla ei, vaikka matematiikan tehtävät käyvät vuosi vuodelta yhä abstraktimmiksi? Miksi näin on, vaikka esimerkiksi Ahteen ja Pehkosen (2000) mukaan yhdeksännen luokan oppilaita noin puolet saattavat olla ajattelussaan konkreettisen tuen tarpeessa. Näiden kysymysten pohdinta johti tämän tutkielman kirjoittamiseen.

Tutkielmassa pyrittiin selvittämään, minkälaisia tutkittuja vaikutuksia oppilaiden oppimiseen matematiikan arkeen liittämällä voi olla. Tutkimusta, jossa olisi käsitelty aihetta suoraan juuri näillä sanoilla ei kuitenkaan löytynyt, joten kirjallisuuskatsauksessa on pyritty yhdistelemään tutkimustietoa eri lähteistä ja suhteuttamaan sitä tutkimuksen alla olevaan arkipäivän matematiikkaan. Monessa lähteessä mainittu oppimisen kumulatiivisuus ja tiedon rakentuminen arkielämästä saadun tiedon päälle saivat pohtimaan samaa kysymystä, jonka Masingila (2002) esitti tutkimuksessaan: kannustetaanko oppilaita tuomaan omia arjen kokemuksiaan luokkahuoneeseen? Niin matematiikan opetuksessa kuin opetuksessa yleisesti on tunnetusti tärkeää osallistaa oppilaita opetuksen suunnittelussa, jotta opetus voi lähteä liikkeelle siitä, mitä oppilaat jo tietävät. Opetuksen suunnittelun lisäksi oppilaita tulisi kuunnella ongelmanratkaisuprosessia harjoitellessa. Oppilaiden tulisi siis voida harjoitella ongelmanratkaisuprosessia ilman valmista kohta kohdalta noudatettavaa pohjaa tai mallia sekä päästä kokeilemaan erilaisia ratkaisutapoja ja saada niistä palautetta joko vertaisiltaan tai opettajalta. Tässä arkipäivän ongelmien hyödyntäminen sekä konkreettisilla välineillä tutkiminen tulevat helposti luonnolliseksi osaksi matematiikan opetusta.

Yliopiston kursseilla on usein tapana antaa kurssin lopuksi kurssipalaute. Samaa käytäntöä olisi toisinaan hyödyllistä ja kannattavaa kokeilla myös nuoremmilla oppilailta. Oppilaat saisivat tällöin harjoitusta palautteen antamisesta samaan tapaan kuin he saavat koulussa jatkuvasti harjoitusta palautteen vastaanottamisesta. Matematiikan opetuksessa erityisesti

enemmän konkretiaa ja käytännönharjoituksia sisältäneistä oppitunneista olisi hyvä kerätä oppilaiden kommentteja. Jos asiaa ajatellaan intuitiivisesti, niin oletuksena voisi olla, että matematiikan tunneilla pelkkään laskuharjoitteluun totunut oppilas kokisi erilaisen oppitunnin mukavana vaihteluna. On myös täysin mahdollista, että oppilas, joka pitää matematiikassa juuri teoreettisuudesta ja numeroiden pyörittelystä kokee käytännönharjoitukset epämukavina häiriötekijöinä. Oppilas saattaa pitää konkretian tuomista oppitunnille jopa turhana. Tämän vuoksi on tärkeää kuunnella tuntien suunnittelussa oppilaiden ajatuksia ja kokemuksia ja pyytää palautetta oppitunneista. Monesti opetetavat ryhmät ovat myös keskenään hyvin erilaisia. Mikä toimii toiselle ryhmälle, ei välttämättä toimi toiselle lainkaan tai ainakaan samoissa määrin. Oppilaantuntemus ja oman opetuksen jatkuva reflektointi ovatkin aineenopettajan työssä erittäin tärkeitä.

6.1 Opetuksen haasteet

Opettajat kokevat matematiikan arkeen liittämisen toisinaan hankalaksi. Yksi yleisimmistä syistä, miksi opettajat eivät käytä opetuksessaan konkretiaa tai käytännön esimerkkejä on ajanpuute. Arkielämän esimerkit, projektityöt ja avoimet tehtävät koetaan ”ylimääräisinä” sirkustempuina, joilla ei ole paljoakaan tekemistä matematiikan opiskelun kanssa. Tähän vaikuttavat paljon opettajien omat uskomukset arkielämän matematiikasta sekä puutteelliset tiedot opetussuunnitelman tavoitteista. Yksi tapa lisätä konkretiaa matematiikan opetukseen olisi opettajille järjestettävät koulutukset tai seminaarit uuden opetussuunnitelman julkaisun aikaan, jolloin opetussuunnitelman tavoitteista ja sisällöistä sekä siitä miten ne ymmärretään, voitaisiin tarjota enemmän tietoa ja keskustelua. On täysin totta, että esimerkiksi yläkoulun matematiikan opetus etenee toisinaan hurjaakin vauhtia, jolloin on hyvin ymmärrettävää, että opettajat kokevat opetukseen käytettävän ajan riittämättömäksi jo ilman näitä ”ylimääräisiä” asioita, joita opetukseen olisi kuitenkin tärkeää liittää.

Luvussa 5 esitetty Duncanin (2011) artikkelin esimerkki kulman mittaamisesta konkreettisilla välineillä on esimerkki työstä, joka vie paljon aikaa. Kyseiseen työhön kuuluu kokeen suunnittelu, rakentaminen, testaaminen sekä lopuksi tietysti tilanteen purku yhteisesti. Tähän kaikkeen Duncan (2011) on arvioinut kuluvan useamman oppitunnin verran aikaa. Lisäksi työssä on paljon tarvittavia välineitä ja materiaaleja. Tässä konkretia on niin suuressa osassa, että se syö paljon resursseja – niin aikaa kuin materiaaleja. Tällainen projektityö on varmasti antoisa ja monelle oppilaalle mielenkiintoinen, mutta nykyisessä matematiikan opetuksessa ehkä jopa utopistinen. Arkielämän mukaan ottaminen ei kuitenkaan aina vaadi yhtä suuria

ponnisteluja. Toisinaan oppilaille riittävät esimerkit arkielämästä. Toisin sanoen opettajan tulee kuvailla oppilaille tilanteita, joissa he voivat tarvita nyt opiskeltavia asioita. Kuvattavien tilanteiden tulisi myös olla sellaisia, että koulussa opittavien matemaattisten laskutapojen hyödyntäminen on niissä mielekäs. Esimerkiksi Lave, Murtaugh ja de la Rocha (1984) toteavat, että jos laskusta tulee arkipäivän käyttöön liian monimutkainen, ihminen luopuu sen käytöstä. Levin (1981) puolestaan toteaa ihmisten käyttävän kynää ja paperia arkipäivän laskuissa erittäin harvoin ja korostaakin aritmeettisten estimointitekniikoiden opettelua osana matematiikan opiskelua. Matematiikan opetuksen kumulatiivisen luonteen vuoksi on kuitenkin myös paljon sellaisia asioita, joita opiskellaan jo yläkoulun aikana, jotka vasta luovat pohjaa myöhemmälle oppimiselle. Tämän vuoksi oppilaille on hyvä painottaa myös yläkoulun jälkeistä aikaa jatko-opinnoissa, sillä matematiikkaa tarvitsevat niin lukiolaiset kuin ammatillisiin oppilaistoksiin hakeutuvat.

Yksi matematiikan opetuksen haasteista arkipäivän matematiikan suhteen on, että konkretian käyttäminen nähdään hyödyllisenä vain alemmilla luokka-asteilla ja pienillä lapsilla. Esimerkiksi Ahtee ja Pehkonen (2000) toteavat, että havainnollistamisvälineiden käyttäminen on sitä tärkeämpää, mitä alemmilla luokka-asteilla opetetaan. Jos arkielämän matematiikan tunnistaminen ja tutkiminen nähtäisiin matematiikan opetusta yleisesti rikastavana opetusmetodinä eikä vain pienten lasten tai heikompien oppilaiden apukeinona, sillä olisi mahdollisuuksia vaikuttaa matematiikan opetukseen laajemminkin. Se voisi lisätä matematiikan oppiaineen kiinnostavuutta ja sitä kautta motivaatiota sen opiskeluun. Lisäksi se tukisi suoraan matemaattisen ajattelun kehittymistä ja lisäisi ymmärrystä matemaattisista ongelmista, joita kohtaamme arjessa jatkuvasti.

Ihmislunnonolle on tyypillistä suhtautua varauksella muutoksiin. Tämä johtaa tietysti siihen, että muutos on usein hidasta. Koulumaailma on jatkuvassa muutoksessa niin opetussisältöjen kuin digitaalisuuden lisääntymisen vuoksi, mutta muutos vain muutoksen vuoksi ei ole opettajien osalta toivottua. Jos arkielämän matematiikka käsitteenä herättää vastustusta, johtaa se väistämättä siihen, että opettajat ovat haluttomia muuttamaan omia opetuskäytäntöjään eikä koulu tue muutosta, jos sen hyötyjä ei nähdä tai niitä ei tunnisteta. Toisaalta on myös paljon opettajia, jotka käyttäisivät työssään mieluusti erilaisia materiaaleja, tehtäviä ja ideoita, mutta jotka eivät koe osaavansa tai ehtivänsä tuottaa sellaisia itsenäisesti. Tällöin opettajille suunnattu yhteinen ideapankki, jossa voitaisiin jakaa hyväksi koettuja tapoja opettaa tai ideoita opetuksen suunnitteluun olisi tarpeen. Tällaisen perustamiseen tai rahoittamiseen voisi hyvin osallistua esimerkiksi opetushallitus.

Opettajat tekevät varsinaisen opetustyönsä ja sen suunnittelun lisäksi nykyisin yhä kasvavissa määrin myös muuta oheistyötä, joka syö heidän aikaansa ja jaksamistaan. Opetuksen päälle kasautuva muu työ ja siitä aiheutuva stressi vievät osansa pois opettajien varsinaisesta opetustyöstä. Tämä näkyy myös PISA-tutkimuksessa, jossa oppilaat kokivat saavansa vähemmän opettajan tukea kuin vuonna 2012 (OKM 2023). Vaihtelevat oppitunnit mahdollistaisivat myös opettajille suuremman vapauden ja luovuuden opetuksensa suunnittelussa ja toisaalta erilaisen läsnäolon oppitunneilla oppilaiden kanssa.

6.2 Ehdotuksia tulevia tutkimuksia varten

Yläkouluikäiset lapset ja nuoret ovat ikään kuin väliinpuotoajia tutkimuskohteina arkipäivän matematiikasta puhuttaessa. Pienten lasten kykyä hahmottaa matematiikkaa arjessaan on tutkittu melko paljonkin, samoin aikuisten käyttämiä prosesseja arkipäivän matematiikkaan liittyen. Yläkouluikäisillä toteutetut tutkimukset, kuten PISA-tutkimus, keskittyvät lähinnä oppimistuloksiin, eivät niinkään opetuksen toteutukseen tai sen keinoihin. Tämän tutkielman lähteiden pohjalta ajateltuna Suomessakin olisi mahdollisuus tutkia enemmän arkielämään ja konkretiaan keskittyvän matematiikan opetuksen vaikutuksia oppimiseen esimerkiksi vertailuluokkien avulla. Vertailuluokkia käytettäessä toisella luokalla opetus painottuisi siis enemmän teoriaan ja toisella ehkä enemmän ongelmanratkaisuun ja käytännön tutkimiseen. Tutkimus voisi selvittää tämänkaltaisen opetuksen vaikutuksia muun muassa arvosanoihin, oppilaiden näkemyksiin matematiikasta, virhekäsitysten esiintyvyyteen ja heikosti pärjäävien oppilaiden osuuksiin.

Opettajien näkemysten tutkiminen ja arkeen liittyvän opetuksen tukeminen olisivat myös tärkeitä tutkimuskohteita. Se, millaista tukea opettajat kaipaavat työhönsä tulisi selvittää ensisijaisesti opettajilta itseltään. Tukea voi antaa toki rahallisesti, mutta yhtä tärkeitä tukimuotoja ovat myös aika ja työkuorman yhteinen jakaminen. Esimerkiksi jo valmiiden materiaalien vertailu, jakaminen ja parantaminen yhteisesti. Omien näkemysten tiedostaminen ja avartaminen on myös yksi osa opettajien näkemysten tutkimuksen tarkoitusta. Voisiko tulevaisuudessa matematiikan opettajien pedagogisiin opintoihin yliopistolla kuulua esimerkiksi erillinen arkielämän sovellutuksia -kurssi? On selvää, että on vaikeaa opettaa sellaisesta asiasta, josta ei itse tiedä tarpeeksi.

Mielenkiintoista olisi myös tutkia miten digitaalisten oppimisympäristöjen ja välineiden hyödyntäminen vaikuttaa oppilaiden motivaatioon ja kiinnostukseen. Tähän vaikuttaa varmasti myös se, kuinka käteväinä tai vaikeana oppilaat pitävät esimerkiksi sähköistä

oppikirjaa tai matematiikan tehtävien tekemistä tietokoneella. Vaikuttaa kuitenkin siltä, että oppilaat viettävät yhä kasvavissa määrin aikaansa koulun ulkopuolella juuri erilaisten digitaalisten välineiden ja sosiaalisen median äärellä. Miksi näitä ei siis hyödynnettäisi myös matematiikan opetuksessa, siinä määrin, kun se on tarkoituksenmukaista.

6.3 Päätelmät

Tämän tutkielman ensimmäisenä tutkimuskysymyksenä esitettiin kysymys arkielämään liittyvien matemaattisten ongelmien hyödyntämisen vaikutuksista opetukseen. Tutkielman pohjalta ei voida aukottomasti todeta, että arkielämän matematiikan hyödyntämisellä yläkouluikäisten matematiikan opetuksessa olisi vain positiivisia vaikutuksia oppimiseen, mutta vaikutukset opetustilanteisiin esiintyvät tämän tutkielman valossa positiivisina. Lisäksi matemaattisen ajattelun tukena ja matematiikan laajuuden ymmärtämisen välineenä arkielämän matematiikka on lähes ehdoton. Erilaisten, enemmän konkreettiseen matematiikan tutkimiseen liittyvien, oppituntien voidaan myös sanoa vaikuttavan oppimisympäristöön sekä opettajan ja opetettavan luokan väliseen suhteeseen positiivisella tavalla. Konkreettisuutta ja monipuolisuutta lisääessä opettaja voi käyttää enemmän luovuutta työssään, ja oppilaat saavat enemmässä määrin onnistumisen ja osallisuuden kokemuksia.

Toisena kysymyksenä pohdittiin, kuinka konkretiaa ja arkielämän matematiikkaa voitaisiin tuoda osaksi yläkouluikäisten matematiikan opetusta. Tähän kysymykseen on pyritty vastaamaan melko kattavasti luvussa 5, jossa on annettu konkreettisia esimerkkejä arkipäivän ongelmista, joita voidaan ratkaista matemaattisin keinoin, kuten pihan kaltevuuskulman selvittäminen tai parhaimman reitin optimointi. Lisäksi luvussa on käyty läpi muun muassa pelien ja projektitöiden hyödyntämistä osana matematiikan opetusta. Myös luvun 6 alussa on pohdittu matematiikan arkeen liittämistä esimerkkien kautta, mutta ilman konkreettisia välineitä, todeten, että toisinaan oppilaille riittää tieto siitä, missä he tulevat tarvitsemaan opetettavaa tietoa tulevaisuudessa tai arjessaan.

Kolmas ja viimeinen tutkimuskysymys pohti minkälaisia haasteita arkielämän matematiikan hyödyntämisessä ja opetukseen liittämässä on. Näitä haasteita opetuksen suunnitteluun tuovat koulujen rajalliset resurssit, opettajien kuormitus ja toisaalta asenne opetuskäytäntöjen muuttamista vastaan. Todennäköistä on, että arkielämän matematiikan hyötyjä ei nähdä tai niitä ei tunnisteta, jolloin halukkuus opetuskäytännön muuttamiseen on marginaalista. Tähän voisi osaltaan tuoda valoa aiheen laajempi tutkiminen ja sitä kautta sen tarpeellisuuden perustelu. Yleisesti tämän tutkielman luotettavuudesta voidaan todeta sen laajuuden olevan

melko pieni, sillä aiheesta tehtyä tutkimusta on melko vähän ja se keskittyy usein lähinnä kasvatuspsykologian puolelle eikä niinkään suoraan matematiikkaan. Matematiikan opetusta on kyllä tutkittu laajasti jo pitkään, eikä sen tutkiminen tulevaisuudessa tule luultavasti ainakaan vähenemään.

Tieteenä matematiikka on hyvin laaja. Niin kutsuttu koulumatematiikka puolestaan näyttäytyy usein hyvinkin kapeana aritmeettisen laskemisen harjoitteluna. Matematiikka ei kuitenkaan ole vain oikeiden ratkaisujen löytämistä vaan sitä, että oppii kysymään oikeita kysymyksiä. Sitä ei tule nähdä vain yhtälöinä, joilla ratkaistaan ainoastaan abstrakteja pulmia, jotka eivät tarkoita tai merkitse mitään. Matematiikka on todellisuudessa erittäin käytännöllistä ja hyödyllistä jokapäiväisessä elämässä. Se on myös mallien, rakenteiden, yhteyksien, säännönmukaisuuksien ja kuvioiden löytämistä arjesta, kykyä hahmottaa näitä ja ilmaista ne matemaattisella kielellä. Australialainen matematiikan opettaja Eddie Woo kertoo TED-puheessaan (2018), kuinka matematiikka on oikeastaan kuin kuudes aistimme. Hän kuvailee, kuinka samaan tapaan kuin harjoitamme muitakin aistejamme, voimme harjoittaa myös ”matematiikka”-aistiamme havainnoimaan ja huomaamaan matematiikkaa ympärillämme oikeanlaisella ohjauksella. Matematiikkaa on siis kaikkialla ympärillämme ja matematiikan opettajan tehtäväksi jää löytää ne erilaiset tavat, joilla voimme ohjata oppilaita huomaamaan sen.

Lähteet

- Ahtee, M. & Pehkonen, E. 2000. Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Helsinki: EDITA
- Atallah, F. 2003. Mathematics Through Their Eyes: Student Conceptions Of Mathematics in Everyday Life. Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
- Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. 1978. Educational Psychology: A cognitive view. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Carraher, D., Schliemann, A. 2002. Chapter 8: Is Everyday Mathematics Truly Relevant to Mathematics Education? – Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 11, Everyday and Academic Mathematics in the Classroom
- Duncan, B. 2011. Numeracy in Household Safety. Australian Mathematics Teacher 67 (4): 27–31.
- Evans, J. 1999. Building Bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. Educational Studies in Mathematics 39, 23–44
- Fenyvesi, K., Koskimaa, R., & Lavicza, Z. 2015. Experiential Education of Mathematics: Art and Games for Digital Native. Kasvatus & Aika, 9(1)
- Chapman, K. 2022. “Wait—it’s a math problem, right?”: negotiating school frames in out-of-school places. Educational Studies in Mathematics 109, 661–676
- Kinnunen, Tuomela ja Mäyrä 2022. Pelaajabarometri 2022: Kohti uutta normaalia. Tampereen yliopisto.
- Lave, J., Murtaugh, M., & de la Rocha, O. 1984. The dialectic of arithmetic in grocery shopping. In B. Rogoff, & J. Lave (Eds.) Everyday cognition: Its development in social context (pp. 67-94). Cambridge, MA: Harvard University Press
- Lehtinen, E., Vauras, M., Lerkkanen, M-K. 2016. Kasvatuspsykologia. 3., uudistettu painos. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Levin, J. A. 1981. Estimation Techniques for Arithmetic: Everyday Math and Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics, 12(4), 421–434.
- Masingila, J.O. 2002. Examining Students' Perceptions of Their Everyday Mathematics Practice. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph. Vol. 11.
- Mathnasium, The Math Learning Center 2022. Five types of math used in computer science <https://www.mathnasium.com/math-centers/bend/news/five-types-of-math-used-in-computer-science>

- Moschkovich, J. 2002. Chapter 1: An Introduction to Examining Everyday and Academic Mathematical Practices. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, Vol. 11.
- Mosvold, R. 2005. *Mathematics in everyday life – A study of beliefs and actions*. Department of Mathematics, University of Bergen.
- Mues, A., Wirth, A., Birtwistle, E., & Niklas, F. (2022). Associations between children's numeracy competencies, mothers' and fathers' mathematical beliefs, and numeracy activities at home. *Frontiers in Psychology*, 13, 835433.
- Munroe, L. 2015. The open-ended approach framework. *European Journal of Educational Research*, 4(3), 97-104.
- Opetushallitus 2014. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus. <https://eperusteet.opintopolku.fi/#/fi/perusopetus/419550/vuosiluokkakokonaisuus/428781/oppiaine/466344> (luettu 4.10.2023)
- Opetus- ja kulttuuriministeriö 2023. Tiedotteet ja uutiset. PISA 2022. <https://okm.fi/-/pisa-2022-osaaminen-heikentynyt-suomessa-ja-lahes-kaikissa-muissa-oecd-maissa> (luettu 3.1.2024)
- Perusopetuslaki 1998. 2 § Opetuksen tavoitteet. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628> (luettu 8.1.2024)
- Rathé, S., Torbeyns, J., De Smedt, B., & Verschaffel, L. 2022. Longitudinal Associations between Spontaneous Number Focusing Tendencies, Numerical Abilities, and Mathematics Achievement in 4- to 7-Year-Olds. *Journal of Educational Psychology*, 114(1), 37–55
- Roiha, A., Polso, J. 2018. *Onnistu eriyttämisessä*. Jyväskylä: PS-kustannus
- Ryan, R.M. & Deci, E.L. 2000. Self-Determination Theory and the Facilitation of Intrinsic Motivation, Social Development, and Well-Being. *American Psychologist*, 55, 68-78
- Terveyden ja hyvinvoinnin laitos 2023. *Koulutuksen sukupuolen mukainen segregatio*. <https://thl.fi/aiheet/sukupuolten-tasa-arvo/tasa-arvon-tila/koulutus-ja-kasvatus/koulutuksen-sukupuolen-mukainen-segregatio> (luettu 4.1.2024)
- Woo, E. 2018. TED-talk: How math is our real sixth sense. https://www.ted.com/talks/eddie_woo_how_math_is_our_real_sixth_sense
- Yle 2016. *Minecraft-peliä jalostetaan opetusmateriaaliksi kouluihin suomalaisidean pohjalta* <https://yle.fi/a/3-8614146>