



**TURUN
YLIOPISTO**

NOLLASUMMAPELIT JA LINEAARINEN OPTIMOINTI

Antti Vasankari

LuK.-tutkielma
Maaliskuu 2024

Ohjaaja:
Dos. Yury Nikulin

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ANTTI VASANKARI: Nollasummapelit ja lineaarinen optimointi
LuK.-tutkielma, 16 s.
Matematiikka
Maaliskuu 2024

Tässä tutkielmassa esitellään peliteorian peruskäsitteitä siten, että kahden pelaajan nollasummapelin arvo ja optimaaliset strategiat ovat ymmärrettäviä. Lisäksi määritellään lineaarinen optimointitehtävä, tarkastellaan tehtävän sallitun alueen konvek-sisuutta, osoitetaan, että tehtävän optimi löytyy jostain sallitun alueen ääripisteestä ja esitellään psedokielinen esitys simplex-algoritmista.

Lopussa tarkastellaan kahden pelaajan nollasummapelin optimaalisten strate-gioiden etsimistä lineaarisena optimointitehtävänä ja esitetään yksinkertainen esi-merkki algoritmin käytöstä pelin optimin löytämiseen.

Avainsanat: peliteoria, nollasummapelit, lineaarinen optimointi, simplex-algoritmi

Sisältö

1	Nollasummapelit	2
1.1	Peliteoriaa	2
1.2	Nollasummapelit	4
2	Lineaarinen optimointi	5
2.1	Lineaarinen optimointitehtävä	5
2.2	Simplex-menetelmä	9
2.2.1	Simplex-algoritmi	9
3	Nollasummapelit lineaarisena optimointitehtävänä	13
3.1	Esimerkkipeli	15
4	Päätelmä	17

Johdanto

Peliteoria on matematiikan osa-alue, jossa tutkitaan ja mallinnetaan *agenttien* eli *pelaajien* päätöksentekoa ja vuorovaikutusta. Peliteorian merkittävimpiä teoksia on John von Neumannin ja Oskar Morgensternin vuonna 1944 julkaistu teos *Theory of Games and Economic Behavior*, jossa lähtökohtana on muotoilla taloustieteen ongelmia strategiapeleinä. [1] Taloustieteen lisäksi peliteorialla on lukuisia sovelluksia, kuten koneoppimisen osa-alue vahvistusoppiminen (engl. *reinforcement learning*), jossa agenttien valintoja ohjaavat palkkiofunktiot, mistä esimerkkinä Lauri Vasankarin pro gradu -tutkielma päätöksentekoa tukevasta mallista merisodankäynnin taistelussa, jota mallinnetaan pelinä. [2] Muita sovellusalueita ovat muun muassa evoluutiobiologia ja politiikan tutkimus. [3]

Tässä tutkielmassa pelit on rajattu kilpailullisiin (engl. *non-cooperative*) peleihin, ja vielä tarkemmin *kahden pelaajan nollasummapeleihin*. Edellä mainittujen reaali maailman ilmiöiden abstrahointi vuorovaikuttaviksi agenteiksi johtaa herkästi erittäin monimutkaisiin ja moniulotteisiin rakenteisiin, täten lienee perusteltua aloittaa mahdollisimman yksinkertaisista tilanteista, joissa agenteja on vähän, niiden toiminta on determinististä ja tavoite yksiselitteinen. Esimerkkinä tutkielmassa typistetään kahden kilpailevan yrityksen toimintastrategian valinta muotoon, jossa jokaisella voittoa tuottavalla päätöksellä on tarkalleen samanarvoinen negatiivinen vaikutus kilpailevalle yritykselle, eli tilannetta tarkastellaan nollasummapelinä. Vaikka esimerkki ei vastaa täydellisesti todellisuutta, tarjoaa se peliteorian perusteille käytännön analogiaa.

Luvussa 1 tutustutaan kahden pelaajan nollasummapelien teoriaan, ja luvussa 2 lineaarisen optimoinnin teoriaan. Lopuksi esitetään, miten nollasummapelin voi ratkaista lineaarisen optimoinnin menetelmin luvussa 3.

1 Nollasummapelit

Tässä luvussa määritellään peliteorian peruskäsitteitä, joille esitetään tutkielmassa käytetty matemaattinen notaatio pohjaten Henri Nousiaisen pro gradun "Johdatus peliteoriaan"[4] esitykseen.

1.1 Peliteoriaa

Peli on rakenne, jossa yksi tai useampi pelaaja vaikuttavat valinnoillaan saamaansa *hyötyyn* pyrkien maksimoimaan tätä.

Määritelmä 1. Olkoon O kaikkien pelin tulosten joukko ja $x \in O$ on jokin tulos. Funktiota $u : O \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan *hyötyfunktiksi* (engl. *utility function*).

Hyötyfunktio kuvaa jokaisen tuloksen x reaaliluvuksi, joten eri tulokset ovat vertailtavia siten, että pelaaja tavoittelee mahdollisimman suurta arvoa $u(x)$. Arvo $u_k(x)$ voi olla hyödyn abstraktio, kuten pelissä jaettavat pisteet, tai toisaalta rahapeleissä hyötyfunktion arvo voi edustaa konkreettisesti pelaajan k voittamaa tai häviämää rahasummaa.

Esimerkki 1. Hyötyfunktio $u_k(x)$ määrää jokaiselle pelaajalle k tuloksesta x seuraavan hyödykkeen muutoksen seuraavasti:

$$\begin{cases} u_k(x) < 0, & \text{kun pelaaja } k \text{ häviää} \\ u_k(x) > 0, & \text{kun pelaaja } k \text{ voittaa} \\ u_k(x) = 0, & \text{kun pelaaja } k \text{ ei voita eikä häviä} \end{cases} .$$

Esimerkki 2. Tarkastellaan peliä, jossa pelaaja 1 laittaa yhden kolikon oikeaan (merk. O) tai kaksi vasempaan (merk. V) käteensä, ja muut pelaajat joutuvat arvaamaan, kummassa kädessä kolikkoja on. Päätetään, että oikein arvannut saa pitää kädessä olevat kolikot. Jos oikein arvanneita on useita, jaetaan voitto oikein arvanneiden kesken, ja mikäli kukaan ei arvaa oikein, pelaaja 1 saa pitää kolikot. n -pelaajan pelissä pelaajan $k \neq 1$ hyötyfunktio on

$$\begin{cases} u_k(O) = 1/n_w, & \text{kun pelaaja } k \text{ ja } n_w - 1 \text{ muuta pelaajaa} \\ & \text{arvaavat oikean käden, joka on oikein} \\ u_k(V) = 2/n_w, & \text{kun pelaaja } k \text{ ja } n_w - 1 \text{ muuta pelaajaa} \\ & \text{arvaavat vasemman käden, joka on oikein} \\ u_k(x) = 0, & \text{kun pelaajan } k \text{ arvaus } x \text{ on väärin} \end{cases} , \quad (1)$$

ja pelaajan 1 hyötyfunktio on

$$\begin{cases} u_1(O) = 1, & \text{kun } u_k(x) = 0, \forall k \neq 1 \\ u_1(V) = 2, & \text{kun } u_k(x) = 0, \forall k \neq 1 \\ u_1(x) = 0, & \text{kun } \exists k \neq 1, \text{ jolle } u_k(x) > 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Pelaajan valintojen suunnitelmaa kutsutaan *strategiaksi*. Jokaista mahdollista tulosta ennakoii jokin strategia.

Määritelmä 2. *Puhdas strategia* on strategia, jossa pelaajan jokainen valinta pelin aikana on määrätty. Joukko $S_k = \{s_1, \dots, s_m\}$ on pelaajan k puhtaiden strategioiden joukko. Pelaajan k puhdasta strategiaa s_j voidaan merkitä myös vektorilla $\mathbf{x}_k := \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, jossa

$$\begin{aligned} x_i &= 1, \text{ kun } i = j \text{ ja} \\ x_i &= 0, \text{ kun } i \neq j. \end{aligned}$$

Merkitään n -pelaajan peliä kolmikolla $G = (n, S, U)$, jossa $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ on kokoelma jokaisen pelaajan i puhtaiden strategioiden joukosta S_i , ja $U = (u_1, \dots, u_n)$ on kokoelma pelaajien hyötyfunktioista.

Esimerkki 3. Esimerkin (2) kahden pelaajan versiossa peli on kolmikko

$$G = (2, \{(O, O), (O, V), (V, O), (V, V)\}, (u_1, u_2)),$$

jossa jokaisen puhtaan strategian ensimmäinen alkio edustaa pelaajan 1 valitsemää kättä ja toinen alkio pelaajan 2 arvausta.

Puhtaista strategioista voidaan arvella, että esimerkin (3) pelissä voittoa maksimoidakseen pelaajan 1 kannattaa valita vasen käsi, mutta jos pelaaja 2 osaa ennakoida tämän, valitsee hän puhtaan strategian V , jolloin pelaaja 1 ei voita koskaan. Tällä päättelyllä pelaajan 1 olisi järkevää valita puhdas strategia O , vaikka voitto onkin pienempi, mutta toisaalta tämänkin toinen pelaaja voi ennakoida. Päädytään silmukkaan, jossa pelaajat yrittävät olla aina yhden askeleen toista edellä, eikä tällä tavalla löydetä optimistrategiaa. Puhdasta strategiaa valitessa tulee täten käyttää jotain muuta menetelmää oman voiton maksimoinnin sijaan.

Määritelmä 3. *Sekastrategia* on strategia, jossa pelaaja valitsee puhtaita strategioita joillakin todennäköisyyksillä. *Sekastrategioiden joukko* on joukko

$$\Delta_m = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}, \text{ jossa alkiot } x_i \text{ ovat todennäköisyyksiä, joilla pelaaja valitsee puhtaan strategian } s_i.$$

Sekastrategioiden joukko koostuu siis kaikista todennäköisyysjakaumista puhtaiden strategioiden joukolle.

Esimerkki 4. Strategia $\mathbf{x}_k = (0.2, 0.8)$ on eräs pelin (2) sekastrategia, jossa pelaaja k valitsee oikean käden todennäköisyydellä 0.2 ja vasemman todennäköisyydellä 0.8.

Sekastrategian etu on satunnaisuus, joka vähentää oppimisen merkitystä pelissä.

Määritelmä 4. Olkoon $u : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ pelaajan 1 hyötyfunktio kahden pelaajan pelissä. Matriisi $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n} = [u(i,j)]_{i,j=1}^{m,n}$ on pelin *voittomatriisi*.

Peliä, jonka voittomatriisille on voimassa $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ eli $a_{i,j} = -a_{j,i}, \forall i, j$ kutsutaan *symmetriseksi peliksi*.

1.2 Nollasummapelit

Muutetaan pelin (2) sääntöjä siten, että pelaaja 1 valitsee kolikot käteensä omista kolikoistaan. Näin kolikoita ei tule pelin ulkopuolelta käyttöön, joten voittojen ja tappioiden summa pysyy nollassa. Tällaista peliä kutsutaan *nollasummapeliksi*.

Määritelmä 5. Peli, jossa $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ on *n-pelaajan nollasummapeli*.

Selvästi kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriiseille pätee $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_2$, joten pelaajan 1 voittomatriisia kutsutaan usein *pelin voittomatriisiksi*.

Muutetaan peli (3) nollasummapeliksi, joten sen voittomatriisi on $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Oletetaan, että pelaaja 2 tekee aina optimivalinnan. Maksimoidakseen hyötyään, pelaajan 1 tulee valita sellainen sekastrategia $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$, joka maksimoi minimi-hyötyä. Lähdetään tilanteesta, jossa $x = 0$, toisin sanoen pelaaja 1 valitsee aina oikean käden. Koska pelaajan 2 oletetaan tekevän aina optimivalinta, valitsee hän myös strategian $(0, 1)$, jolloin pelaajan 1 hyödyn odotusarvo on -1 , koska jokaisessa pelissä hän häviää varmasti yhden kolikon. Kun kasvatetaan todennäköisyyttä x , on mahdollista, että pelaaja 1 häviää 2 kolikkoa, mutta samalla todennäköisyys, että pelaaja 2 arvaa väärin, kasvaa. Tässä pelissä pelaaja 2 voittaa aina, kun hän valitsee saman käden kuin pelaaja 1, joten optimaalinen sekastrategia pelaajalle 2 on valita pelaajan 1 sekastrategia. Päädytään tilanteeseen, jossa pelaajan 1 optimistrategia on $\max \min\{-2x, x - 1\} = \frac{1}{3}$, koska $\begin{cases} \min\{-2x, x - 1\} = -\frac{2}{3}, & \text{kun } x = \frac{1}{3} \\ \min\{-2x, x - 1\} < -\frac{2}{3}, & \text{kun } x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$. Optimi löytyy siis suorien $-2x$ ja $x - 1$ leikkauspisteestä.

Määritelmä 6. Olkoon \mathbf{A} kahden pelaajan nollasummapelin voittomatriisi. Sekastrategia $\tilde{\mathbf{x}} \in \Delta_m$ on pelaajan 1 *optimaalinen strategia*, jos

$$\min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Samoin pelaajan 2 sekastrategia $\tilde{\mathbf{y}} \in \Delta_n$ on optimaalinen, kun

$$\max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{y}} = \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Määritelmä 7. Kahden pelaajan nollasummapelin *arvo* (engl. *value*) on

$$v = \max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Von Neumannin minimax-lauseen [5] mukaan jokaisella kahden pelaajan nollasummapelillä, jossa kummallakin pelaajalla on rajallinen määrä puhtaita strategioita, on arvo, ja täten pelaajilla on olemassa optimaaliset strategiat.

Yksi peliteorian tunnetuimpia käsitteitä on Nashin tasapaino, eli strategioiden joukko, jossa yksikään pelaaja ei voi kasvattaa hyötyään muuttamalla strategiaansa. John Nash osoitti vuonna 1951, että tällainen tasapaino löytyy kaikille äärellisille peleille. [6] Kahden pelaajan nollasummapelissä pelin arvon tuottavat optimaaliset strategiat on Nashin tasapaino. [3]

Esimerkki 5. Mallinnetaan kahden yrityksen 1 ja 2 kilpailua yksinkertaisena nollasummapelinä. Pelaajalla 1 on kaksi puhdasta strategiaa x_1 ja x_2 , kun taas pelaajalla 2 on strategiat y_1 , y_2 ja y_3 . Tutkitaan asetelmaa nollasummapelinä kuvan 1 avulla.

Pelin hyötöfunktio on kuvaus $u : \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{kun } x = x_1 \text{ ja } y = y_1 \\ 0, & \text{kun } x = x_1 \text{ ja } y = y_2 \\ -3, & \text{kun } x = x_1 \text{ ja } y = y_3 \\ -4, & \text{kun } x = x_2 \text{ ja } y = y_1 \\ -1, & \text{kun } x = x_2 \text{ ja } y = y_2 \\ 5, & \text{kun } x = x_2 \text{ ja } y = y_3 \end{cases}.$$

Näin yksinkertaisen nollasummapelin optimaalisen strategian voi etsiä, kuten edellä näytetyssä esimerkissä (2), mutta puhtaiden strategioiden määrän kasvaessa optimin löytäminen ei ole ollenkaan yhtä triviaalia. Seuraavassa luvussa 2 käsitellään lineaarista optimointia, jota hyödynnetään esitetyn nollasummapelin optimaalisen strategian etsimiseen luvussa 3.

Peli normaalimuodossa

1 \ 2	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	0	-3
x_2	-4	-1	5

Kuva 1: Esimerkin (5) pelin voittomatriisi.

2 Lineaarinen optimointi

Linearisessa optimoinnissa kohdefunktio ja rajoitteet ovat lineaarisia. Sallittu alue on siis rajattu hypertasoin, mistä seuraa, että sallittu alue on konvekssi joukko. Koska kohdefunktio on lineaarinen, jokaisella sallitun alueen pisteellä on olemassa parantava suunta, tai koko sallittu alue on optimi, joten optimi löydetään jostain sallitun alueen ääripisteestä. Tässä luvussa syvennytään mainittuihin periaatteisiin ja esitetään ratkaisualgoritmi lineaariselle optimointitehtävälle. Luvun sisältö pohjautuu Turun yliopiston professorin, Marko Mäkelän, optimoinnin ja konveksianalyysin luentomonisteisiin [7][8] sekä Bernard Kolmanin ja Robert E. Beckin teokseen "Elementary Linear Programming with Applications"[9].

2.1 Lineaarinen optimointitehtävä

Tarkastellaan optimointitehtävää, jossa *kohdefunktio* on muotoa $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$. Kohdefunktiota maksimoidaan tai minimoidaan, tehtävän tavoitteesta riip-

puen määrämällä optimaaliset arvot kaikille *päätösmuuttujille* x_j . Ollakseen mielekäs optimointitehtävä, on sillä oltava rajoitteita. Olkoon rajoitteet tässä tehtävässä seuraavanlaisia:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &\leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &\geq b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \dots + a_{3,n}x_n &= b_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Määritelmä 8. Tehtävää

$$\max_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

missä tehtävän *sallitu alue* on $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, kutsutaan *lineaariseksi optimointitehtäväksi*.

Yksinkertaisilla muunnoksilla määritelmän 8 lineaarisen optimointitehtävän rajoitteet (3) voidaan aina muuttaa *kanoniseen* muotoon

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4}$$

joka voidaan kirjoittaa matriisimuodossa

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5}$$

Määritelmä 9. Kanonisesta muodosta (4) voidaan epäyhtälöt muuttaa yhtälöiksi lisäämällä *täydennysmuuttuja* (engl. *slack variable*) x_{n+i} , jolloin päästään *standardimuotoon*

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n (a_{i,j} x_j) + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{6}$$

Määritelmä 10. Optimointitehtävän (4) *duaali* on muotoa

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{i,j} y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ & y_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{7}$$

Maksimointitehtävän duaali on täten minimointitehtävä ja päinvastoin. Lisäksi duaalin duaali on alkuperäinen tehtävä. Primääri- ja duaalitehtävän kohdefunktioiden optimiarvojen erotusta kutsutaan *duaalisuusaukoksi* (engl. *duality gap*). [10]

Lause 1 (Vahva duaalisuslause [7]). *Jos lineaarisella optimointitehtävällä on optimiratkaisu, niin sen duaalilla on optimiratkaisu, joiden kohdefunktioiden optimiarvot ovat yhtäsuuret.*

Seuraus 1. *Ratkeavan lineaarisen optimointitehtävän duaalisuusaukko on nolla.*

Määritelmä 11. Joukko S on *konvekssi joukko*, kun

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \lambda \in (0, 1).$$

Lause 2. *Konveksien joukkojen leikkaus on konvekssi.*

Todistus. Olkoon joukot S_1 ja S_2 konvekseja ja $\lambda \in (0, 1)$. Kaikilla pisteillä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1 \cap S_2$ toteutuu

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S_1$$

ja

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S_2.$$

Täten myös

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in S_1 \cap S_2,$$

eli selvästi myös joukko $\bigcap_{i=1}^n S_i$ on konvekssi, kun joukot S_i ovat konvekseja kaikilla indekseillä i . □

Määritelmä 12. Joukkoa

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T \mathbf{x} = \alpha\}$$

kutsutaan *hypertasoksi* ja hypertason rajaamaa joukkoa

$$S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq \alpha\}$$

kutsutaan *puoliavaruudeksi*.

Lause 3. *Puoliavaruus on konvekssi joukko.*

Todistus. Olkoon joukko S määritelmän 12 puoliavaruus ja pisteet \mathbf{x} ja $\mathbf{y} \in S$ sen pisteitä. Piste $(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \in S$, koska

$$\mathbf{p}^T (\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{p}^T \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{p}^T \mathbf{y} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha,$$

joten puoliavaruus S on konvekssi □

Lause 4. *Lineaarisen optimointitehtävän sallittu alue on konvekssi.*

Todistus. Lineaarisen optimointitehtävän rajoitteet ovat hypertasoja ja siten sallittu alue muodostuu puoliavaruuksien leikkauksesta. Lauseiden 3 ja 2 mukaan puoliavaruudet ovat konvekseja, ja täten niiden leikkaus on konvekssi. □

Määritelmä 13. Olkoon joukko S konvekksi. Piste \mathbf{x} on joukon S ääripiste, jos ehdosta

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2, \text{ kun } \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S \text{ ja } \lambda \in (0, 1) \text{ seuraa, että } \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

Selvästi joukon ääripiste on sen reunapiste.

Lause 5. Lineaarisen optimointitehtävän optimiratkaisu löytyy jostain sen ääripisteestä.

Todistus. Olkoon S määritelmän 8 lineaarisen optimointitehtävän sallittu alue. Lauseen 4 mukaan S on konvekssi joukko. Ääripisteen määritelmästä 13 seuraa suoraan, että konveksin joukon S jokainen piste \mathbf{x} voidaan lausua suoraan joukon S ääripisteiden \mathbf{x}_i konveksina kombinaationa

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i, \text{ kun } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ ja } \lambda_i \in [0, 1] \forall i. \quad (8)$$

Olkoon \mathbf{x}^* tehtävän optimiratkaisu, eli $\max_{\mathbf{x}} \{\mathbf{c}^T \mathbf{x}\} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$. Kaavan (8) mukaan

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n,$$

josta valitsemalla jokin indeksi j , jolle $\lambda_j > 0$, voidaan piste \mathbf{x}^* esittää muodossa

$$\mathbf{x}^* = (1 - \lambda_j) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_j} \mathbf{x}_i \right) \quad (9)$$

$$= \lambda_j \mathbf{x}_j + (1 - \lambda_j) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_j} \mathbf{x}_1 + \dots + \frac{\lambda_{j-1}}{1 - \lambda_j} \mathbf{x}_{j-1} + \frac{\lambda_{j+1}}{1 - \lambda_j} \mathbf{x}_{j+1} + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_j} \mathbf{x}_n \right) \quad (10)$$

Luettavuuden parantamiseksi merkitään $j = 1$ ja $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_j} = \sigma_i$, joten

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda_1) (\sigma_2 \mathbf{x}_2 + \sigma_3 \mathbf{x}_3 + \dots + \sigma_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}^* = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda_1) \mathbf{y}_2. \quad (11)$$

Selvästi $\sum_{i=2}^n \sigma_i = 1$, joten piste $\mathbf{y}_2 = \sum_{i=2}^n \sigma_i \mathbf{x}_i$ on joukon S ääripisteiden konvekssi kombinaatio, ja täten $\mathbf{y}_2 \in S$. Triviaalissa tapauksessa $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1$, ja näin ollen optimi löytyy ääripisteestä. Olkoon $\lambda_1 \in (0, 1)$ ja $\mathbf{d} = d(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2)$, kun $d \in (0, \lambda_1]$. Yhtälön (11) perusteella myös $\mathbf{x}^* + \mathbf{d} \in S$, koska

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* + \mathbf{d} &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda_1) \mathbf{y}_2 + d(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2) \\ &= (\lambda_1 - d) \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda_1 + d) \mathbf{y}_2 \in S. \end{aligned}$$

Pisteen \mathbf{x}^* ollessa optimi, epäyhtälö $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T (\mathbf{x}^* + \mathbf{d})$ toteutuu kaikilla d . Epäyhtälön ollessa aito, tehtävän lineaarisuudesta seuraa, että

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* > \mathbf{c}^T (\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T (\mathbf{x}^* - (1 - d) \mathbf{d}). \quad (12)$$

Täten piste \mathbf{x}^* ei ole optimi, mistä seuraa ristiriita. Mikäli yhtäsuuruus toteutuu,

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^T (\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{y}_2), \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

täten myös piste \mathbf{x}_1 on optimaalinen. □

Yhtälössä (12) kerroin $(1 - d)$ varmistaa pysymisen sallitulla alueella pisteiden \mathbf{x}_1 ja \mathbf{y}_2 välisellä janalla. Samasta yhtälöstä voidaan myös nähdä, että mikäli tarkastelemme pistettä \mathbf{x}^* optimointitehtävän lähtöpisteenä, on *parantava suunta* joko kohti ääripistettä \mathbf{x}_1 tai muiden joukon S ääripisteiden konveksia kombinaatiota \mathbf{y}_2 . Kaavaa (9) käyttäen voidaan piste \mathbf{y}_2 esittää muodossa $\mathbf{y}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda_2) \mathbf{y}_3$. Näin jatkamalla löydetään lopulta parantava suunta kohti jotain ääripistettä.

2.2 Simplex-menetelmä

Simplex-menetelmä on George B. Dantzigin vuonna 1947 [11] esittämä tapa etsiä ratkaisua lineaariseen optimointitehtävään siirtymällä sallitun alueen ääripisteestä vierekkäiseen (engl. *adjacent*) ääripisteeseen siten, että tavoitefunktion arvo paranee.

Määritelmä 14. Olkoon piste \mathbf{x}_1 lineaarisen optimointitehtävän sallitun alueen ääripiste. Piste \mathbf{x}_2 on *vierekkäinen* ääripiste, jos pisteet \mathbf{x}_1 ja \mathbf{x}_2 eroavat vain yhden alkion suhteen.

Oletetaan, että \mathbf{A} on $m \times n$ matriisi, jonka vaakarivit ovat lineaarisesti riippumattomia, eli matriisin \mathbf{A} aste $\text{rank} \mathbf{A} = m$. Yksiselitteinen *kantaratkaisu* yhtälöryhmälle $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ löytyy, kun kiinnitetään $n - m$ muuttujaa x_i nolliksi. Kutsutaan näitä muuttujia *ei-kantamuuttujiksi* ja muita, nollasta poikkeavia muuttujia *kantamuuttujiksi*.

Simplex-menetelmässä parantavaa suuntaa $\Delta \mathbf{x}$ etsitään lähtöpisteestä kasvattamalla jotain ei-kantamuuttujaa $x_j = 0$ positiivisella arvolla $x_j = \Delta x_j > 0$, ratkaisemalla suunta yhtälöryhmästä $\mathbf{A}\Delta \mathbf{x} = 0$, ja tarkastamalla suunnan vaikutus tavoitefunktion arvoon. Täten siis siirrytään konveksin monitahokkaan särmiä pitkin ääripisteestä vierekkäiseen, kunnes ei löydetä enää parantavaa suuntaa.

2.2.1 Simplex-algoritmi

Esitetään simplex-algoritmi pseudokielellä Marko Mäkelän luentomonistetta [7] mukailten.

Algoritmi 1 Simplex-algoritmi

Valitse jokin sallittu lähtökanta.

Aseta kierroslaskurin arvo $t \leftarrow 0$.

Aseta parantava suunta $\Delta \mathbf{x}^t \leftarrow \mathbf{0}$.

Aseta redusoitu kustannus $\bar{c} \leftarrow 0$.

while true do

 Muodosta kantaratkaisu \mathbf{x}^t

for jokaiselle ei-kantamuuttujalle x_j **do**

 Konstruoi muuttujaa x_j kasvattamalla saatava simplex-suunta $\Delta \mathbf{x}_j$

 Laske suunnan redusoitu kustannus \bar{c}_j

if $\bar{c}_j > \bar{c}$ **then**

$\bar{c} \leftarrow \bar{c}_j$

$\Delta \mathbf{x}^{t+1} \leftarrow \Delta \mathbf{x}_j$

break

end if

end for

if $\bar{c} \leq 0$ **then**

return \mathbf{x}^t on globaali optimi.

else

if $\nexists \Delta x_j^t < 0$, kun x_j^t on kantamuuttuja **then**

return Tehtävällä ei äärellistä ratkaisua.

end if

 Merkitse muuttujalla x_p kantaan tulevaa muuttujaa.

 Valitse kannasta poistuva muuttuja x_r^t siten, että

$$\frac{x_r^t}{-\Delta x_r^{t+1}} = \min \left\{ \frac{x_j^t}{-\Delta x_j^{t+1}} \mid \Delta x_j^{t+1} < 0, x_j^t \text{ kantamuuttuja} \right\}.$$

 Määritä askelpituus

$$\lambda \leftarrow \frac{x_r^t}{-\Delta x_r^{t+1}}.$$

 Laske uusi kärkipiste $\mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{x}^t + \lambda \Delta \mathbf{x}^{t+1}$.

 Korvaa muuttuja x_r kannassa muuttujalla x_p .

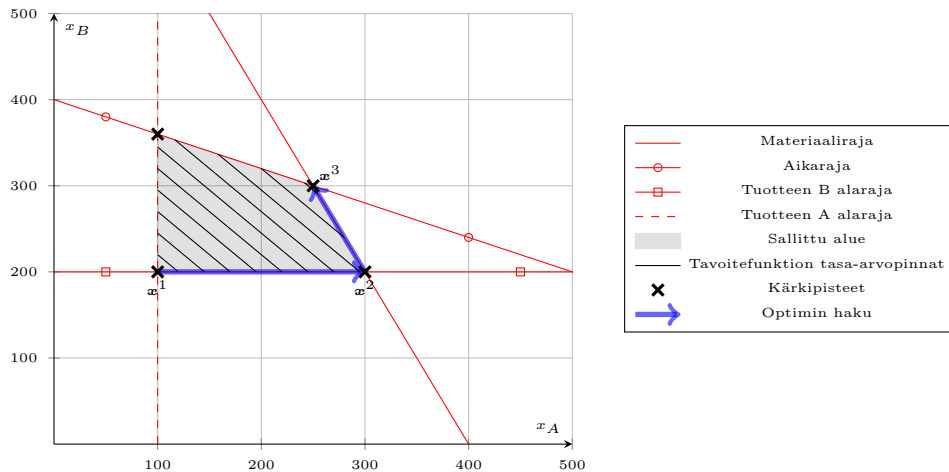
$t \leftarrow t + 1$.

end if

end while

Esitetään seuraavaksi algoritmin käytöstä esimerkki.

Esimerkki 6. Tarkastellaan kuvitteellisen yrityksen kahden tuotteen valmistusmäärien optimointia voiton suhteen. Oletetaan tuotteiden määrä sen verran suureksi, että ongelma voidaan esittää jatkuvana ilman merkittävää virhettä. Tuotteiden valmistukseen yrityksellä on käytössä a yksikköä materiaalia ja b yksikköä työtunteja. Yksi kappale tuotetta A kuluttaa t_A työtunteja ja m_A materiaalia, ja vastaavat arvot tuotteelle B ovat t_B työtunteja ja m_B materiaalia. Molempien tuotteiden voitto



Kuva 2: Esimerkin (6) sallittu alue ja optimin haku.

on yhtäsuuri. Tarkasteltavaan ajanjaksoon liittyy lisäksi minimimäärät tuotteille A ja B . Tehtävän sallittu alue ja sen ratkaiseminen simplex-menetelmällä on esitetty kuvassa 2.

Esitetään tehtävä kanonisessa muodossa:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_A + x_B \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B \leq 800 \\
 & 2x_A + 5x_B \leq 2000 \\
 & x_A \geq 100 \\
 & x_B \geq 200
 \end{aligned}$$

Muutetaan tehtävä standardimuotoon lisäämällä täydennysmuuttujat:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_A + x_B \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_A + x_B + x_1 = 800 \\
 & 2x_A + 5x_B + x_2 = 2000 \\
 & x_A - x_3 = 100 \\
 & x_B - x_4 = 200.
 \end{aligned}$$

Matriisimuodossa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = (800, 2000, 200, 100) \text{ ja}$$

$$\mathbf{c} = (1, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Valitaan lähtökannaksi $x_A = 100$ ja $x_B = 200$, jolloin

$$\begin{aligned}x_3 &= x_4 = 0, \\x_1 &= 800 - 2 \cdot 200 - 100 = 300 \text{ ja} \\x_2 &= 2000 - 2 \cdot 200 - 5 \cdot 100 = 1100.\end{aligned}$$

Täten kantamuuttujat ovat x_A, x_B, x_1 ja x_2 . Merkitään kierroslaskuria, parantavaa suuntaa ja redusoitua kustannusta kuten esitetyssä algoritmossa 1, ja alustetaan kyseisten muuttujien arvot nolliksi. Kantaratkaisu on $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = x_A + x_B = 100 + 200 = 300$.

Valitaan kantaan tulevaksi muuttujaksi x_3 , jolloin $\Delta x_3 = 1$ ja $\Delta x_4 = 0$. Saadaan ratkaistua yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2\Delta x_A + \Delta x_B + \Delta x_1 = 0 \\ 2\Delta x_A + 5\Delta x_B + \Delta x_2 = 0 \\ \Delta x_A - \Delta x_3 = 0 \\ \Delta x_B - \Delta x_4 = 0 \end{cases}, \text{ kun}$$

$$\begin{aligned}\Delta x_A &= \Delta x_3 = 1, \quad \Delta x_B = \Delta x_4 = 0, \\ \Delta x_1 &= -2 \text{ ja } \Delta x_2 = -2.\end{aligned}$$

Lasketaan tavoitefunktion muuton $\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} = 1$, joka on aidosti positiivinen, joten $\Delta \mathbf{x}$ on parantava suunta. Määrätään kannasta poistuva muuttuja x_r^t ja askelpituus

$$\lambda = \min \left\{ \frac{400}{-(\Delta x_1)}, \frac{800}{-(\Delta x_2)} \right\} = 200,$$

ja täten kannasta poistuu muuttuja x_2 . Lasketaan uusi kärkipiste ja sen antama tavoitefunktion arvo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1 &= \mathbf{x}^0 + \lambda \Delta \mathbf{x} = (100, 200, 400, 800, 0, 0) + 200 \cdot (1, 0, -2, -2, 1, 0) \\ &= (300, 200, 0, 400, 200, 0), \text{ ja} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 &= 300 + 200 = 500.\end{aligned}$$

Nyt ei-kantamuuttujat ovat x_1 ja x_4 . Kasvattamalla muuttujaa x_1 valittu suunta vie takaisin pisteeseen \mathbf{x}^0 . Sama havaitaan laskemalla kuten edellä, että suunta ei ole parantava, kun taas kasvattamalla muuttujaa x_4 löydetään parantava suunta. Esitetyn simplex-algoritmin 1 mukaisen maksimin haun laskujen tulokset on esitetty taulukossa 1. Toisen kierroksen jälkeen on löydetty kärkipiste $\mathbf{x} = (250, 300, 0, 400, 200)$, jossa tavoitefunktion arvo on $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = 550$. Kärkipiste on globaali optimi, sillä ei-kantamuuttujia kasvattamalla ei löydetä enää parantavaa suuntaa.

Mikäli ensimmäisellä kierroksella lähtökannassa \mathbf{x}^0 valitaan kantaan tulevaksi muuttujaksi x_4 muuttujan x_3 sijaan, huomataan, että negatiivisen kertoimen $a_{4,6} = -1$ vuoksi muuttujan x_4 kasvattaminen johtaa muuttujan x_B kasvamiseen, mutta muuttujan x_A arvo ei muutu. Näin löydetty parantava suunta johtaa kuvan 2 kärkipisteeseen $(100, 360)$ eli kantaratkaisuun $(100, 360, 240, 0, 0, 160)$. Tästä

jatkamalla parantava suunta löydetään kasvattamalla ei-kantamuuttujaa x_3 , jolloin päädytään globaaliin optimiin. Simplex-menetelmän konvergenssi ei siis riipu parantavan suunnan valinnasta, vaikka näitä olisi useita, sillä kuten lauseen (5) todistuksessa, implikaatioissa 12 epäsuorasti todetaan: parantava suunta löytyy jokaisesta sallitun alueen pisteestä, joka ei ole globaali optimi.

	x_A	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
\mathbf{c}^T	1	1	0	0	0	0	\mathbf{b}
\mathbf{A}	2	1	1	0	0	0	800
	2	5	0	1	0	0	2000
	1	0	0	0	-1	0	100
	0	1	0	0	0	-1	200
	B	B	B	B	N	N	
\mathbf{x}^0	100	200	400	800	0	0	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = 300$
$\Delta \mathbf{x} : x_p \leftarrow x_3$	1	0	-2	-2	1	0	$\bar{c}_3 = 1 > 0$
			$\frac{400}{2}$	$\frac{800}{2}$			$\lambda = 200$
	B	B	N	B	B	N	
\mathbf{x}^1	300	200	0	400	200	0	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 = 500$
$\Delta \mathbf{x} : x_p \leftarrow x_1$	$-\frac{1}{2}$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\bar{c}_1 = -\frac{1}{2} \leq 0$
$\Delta \mathbf{x} : x_p \leftarrow x_4$	$-\frac{1}{2}$	1	0	-4	$-\frac{1}{2}$	1	$\bar{c}_4 = \frac{1}{2} > 0$
	$300/\frac{1}{2}$			$\frac{400}{4}$	$200/\frac{1}{2}$		$\lambda = 100$
	B	B	N	N	B	B	
\mathbf{x}^2	250	300	0	0	150	100	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^2 = 550$
$\Delta \mathbf{x} : x_p \leftarrow x_1$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\bar{c}_1 = -\frac{3}{8} \leq 0$
$\Delta \mathbf{x} : x_p \leftarrow x_2$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\bar{c}_2 = -\frac{1}{8} \leq 0$

Taulukko 1: Esimerkin (6) tehtävän optiminhaun tulokset simplex-algoritmilla 1. Kantamuuttujia on merkitty kirjaimella B ja ei-kantamuuttujia kirjaimella N . Sinisellä fontilla on merkitty parantava suunta ja sitä vastaava kantaan tuleva muuttuja, sekä punaisella fontilla ei-parantava suunta ja sitä vastaava ei-kantamuuttujan valinta.

3 Nollasummapelit lineaarisena optimointitehtävänä

Kahden pelaajan nollasummapelin optimaalisen strategian etsimistä voidaan tarkastella lineaarisena optimointitehtävänä. Von Neumannin minimax-lauseen perusteella pelillä on arvo, ja optimaalinen strategia löytyy etsimällä hyödyn suurin alaraja.

Täten peli voidaan muotoilla lineaarisena optimointitehtävänä seuraavasti:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{A} \geq \mu \mathbf{v}^T \\ & \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)$ on m alkioinen vektori ja μ on pelaajan 1 hyötyfunktion arvon alaraja. Toisin sanoen optimistrategiaa etsitään maksimoimalla pelaajan 1 hyödyn alarajaa, kun käydään läpi kaikki pelaajan 2 puhtaat strategiat. Oletetaan, että $\mu > 0$, mikä seuraa, kun $a_{i,j} > 0$, $\forall i, j$. Nyt rajoitteet voidaan jakaa alarajalla μ . Merkitään $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/\mu$.

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{v} \\ & \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i = 1/\mu \\ & \tilde{x}_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Alarajan μ maksimointi vastaa arvon $\frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i$ minimointia, joten tehtävä saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{v} \\ & \tilde{x}_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned} \tag{13}$$

Vastaavasti optimistrategiaa voidaan etsiä minimoimalla ylärajaa M , kun $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)$ on n alkioinen vektori.

$$\begin{aligned} \min \quad & M \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{y} \leq M\mathbf{v} \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ & y_j \geq 0 \quad \forall j, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{v} \\ & \tilde{y}_j \geq 0 \quad \forall j, \end{aligned}$$

mikä on määritelmän (10) mukaan tehtävän (13) duaali.

3.1 Esimerkkipeli

Palataan esimerkin (5) kahden yrityksen kilpailuun. Pelin voittomatriisi on

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Huomataan, että ehto $a_{i,j} > 0, \forall i, j$ ei toteudu, joten lisätään matriisiin arvo 5, jolloin $A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$. Selvästi tämä ei vaikuta pelin optimaaliseen strategiaan, vaikka pelin arvo muuttuu. Tarkatellaan optimaalisen strategian hakua kuten edellä:

$$\begin{aligned} \min \quad & M \\ \text{s.t.} \quad & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq M \\ & y_1 + 4y_2 + 10y_3 \leq M \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ & y_j \geq 0 \forall j, \end{aligned}$$

jonka saa muutettua lineaariseski optimointitehtäväksi kanoniseen muotoon seuraavasti:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3\tilde{y}_1 + 5\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3 \leq 1 \\ & \tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2 + 10\tilde{y}_3 \leq 1 \\ & \tilde{y}_j \geq 0 \forall j. \end{aligned}$$

Lisätään täydennysmuuttujat \tilde{y}_4 ja \tilde{y}_5 :

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3\tilde{y}_1 + 5\tilde{y}_2 + 2\tilde{y}_3 + \tilde{y}_4 = 1 \\ & \tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2 + 10\tilde{y}_3 + \tilde{y}_5 = 1 \\ & \tilde{y}_j \geq 0 \forall j. \end{aligned}$$

Ratkaistaan optimistrategia simplex-menetelmällä ja muodostetaan taulukko:

	\tilde{y}_1	\tilde{y}_2	\tilde{y}_3	\tilde{y}_4	\tilde{y}_5	
\mathbf{c}^T	1	1	1	0	0	\mathbf{b}
\mathbf{A}	3	5	2	1	0	1
	1	4	10	0	1	1
	N	N	N	B	B	
$\tilde{\mathbf{y}}^0$	0	0	0	1	1	$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = 0$
$\Delta \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{y}_p \leftarrow \tilde{y}_1$	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$\bar{c}_1 = \frac{1}{3} > 0$
				1	3	$\lambda = 1$
	B	N	N	N	B	
$\tilde{\mathbf{y}}^1$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{y}}^1 = \frac{1}{3}$
$\Delta \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{y}_p \leftarrow \tilde{y}_2$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{7}{15}$	$\bar{c}_2 = -\frac{2}{15} \leq 0$
$\Delta \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{y}_p \leftarrow \tilde{y}_3$	$-\frac{2}{30}$	0	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{14}{15}$	$\bar{c}_3 = \frac{1}{30} > 0$
	5				$\frac{5}{7}$	$\lambda = \frac{5}{7}$
	B	N	B	N	N	
$\tilde{\mathbf{y}}^2$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	0	0	$\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{y}}^2 = \frac{5}{14}$
$\Delta \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{y}_p \leftarrow \tilde{y}_2$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	$\bar{c}_2 = -\frac{3}{20} \leq 0$

Taulukko 2: taulukko

Kasvattamalla täydennysmuuttujia \tilde{y}_4 ja \tilde{y}_5 arvo $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ pienenee, joten on löydetty globaali optimi $\tilde{\mathbf{y}}^2 = (\frac{2}{7}, 0, \frac{1}{14}, 0, 0)$. Näin ollen pelaajan 2 optimaalinen strategia on $\mathbf{y} = M \cdot (\frac{2}{7}, 0, \frac{1}{14}) = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$, kun $M = \frac{5}{14}^{-1} = \frac{14}{5}$, ja pelin arvo on $M - 5 = -\frac{11}{5}$. Koska $x_1 + x_2 = 1$ voidaan pelaajan 1 optimaalinen strategia ratkaista käyttämällä pelin arvoa ja pelaajan 2 puhdasta strategiaa y_1 , mistä saadaan

$$\begin{aligned}
-2x_1 - 4(1 - x_1) &= -\frac{11}{5} \\
2x_1 &= -\frac{11}{5} + 4 \\
x_1 &= \frac{9}{10} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että pelaaja 2 ei valitse koskaan strategiaa y_2 . Tämän voi päätellä suoraan pelin voittomatriisista, sillä riippumatta pelaajan 1 valitsemasta strategias- ta, pelaajalla 2 on aina parempi vaihtoehto kuin strategia x_2 . Yleisesti voidaan to- deta, että mikäli $m \times n$ -voittomatriisille pätee $n < m$, pelin optimaalinen strategia löytyy $n \times n$ -neliömatriisista, koska on olemassa $m - n$ puhdasta strategiaa, joiden hyöty on pienempi tai yhtä suuri kuin jonkin toisen strategian. Sama pätee toisin- päin voittomatriisille, jolla $m < n$. Tässä esimerkissä pyrittiin havainnollistamaan Simplex-algoritmin käyttöä kahden pelaajan nollasummapelin optimaalisen strate- gian haussa, mutta laskennan kannalta olisi tehokkaampaa vähentää pelin puhtaita strategioita siten, että voittomatriisi on neliömatriisi.

4 Päätelmä

Kahdenpelaajan nollasummapelit ovat erittäin rajattu osa peliteoriaa, eivätkä ne ole yleispätevä tapa mallintaa suurta osaa reaali maailman ongelmista. Kuitenkin nollasummapelit tarjoaa yksinkertaisen lähtökohdan perehtyä monimutkaisten ja haastavien kilpailutilanteiden päätöksenteon mallintamiselle, sekä optimaalisten strategioiden ja tasapainotilojen tarkastelulle, minkä sovelluksia löytyy lukemattomia useilta eri aloilta.

Tutkielman tavoitteena oli esittää olennainen teoria nollasummapeleistä ja lineaarisesta optimoinnista sekä näiden yhteydestä, tarjota ymmärrettävä pseudokielen runko simplex-algoritmin toteutuksesta, antaa perusteita teorian soveltamiselle ja innostaa kilpailutilanteiden tarkastelua peliteorian näkökulmasta.

Viitteet

- [1] John Von Neumann ja Oskar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior (60th Anniversary Commemorative Edition)*. Princeton University Press, 2007, s. 1–8, 46–48.
- [2] Lauri K Vasankari. “Multi-Agent Reinforcement Learning for Littoral Naval Warfare”. Pro gradu. Aalto-yliopisto, 2023, s. 40–43.
- [3] Shmuel Zamir, Eilon Solan ja Michael Maschler. *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013, s. xxiii–xxiv, 110–117.
- [4] Henri Nousiainen. “Johdatus peliteoriaan”. Pro gradu. Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2013.
- [5] John Von Neumann. “Zur theorie der gesellschaftsspiele”. *Mathematische annalen* 100 (1928). Translation by Mrs. Sonya Bargmann, s. 295–320.
- [6] John Nash. “Non-cooperative games”. *Annals of mathematics* (1951), s. 286–295.
- [7] Marko M Mäkelä. *Matemaattinen optimointi I*. Turun yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste. 2019.
- [8] Marko M Mäkelä. *Konvekssi analyysi ja optimointi*. Turun yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste. 2022.
- [9] Bernard Kolman ja Robert E Beck. *Elementary Linear Programming with Applications*. Elsevier Science Technology Books, 1995, s. 103–118.
- [10] Marko M Mäkelä. *Matemaattinen optimointi II*. Turun yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste. 2019.
- [11] George B Dantzig. “Origins of the simplex method”. Teoksessa: *A history of scientific computing*. 1990, s. 141–151.