Lohkomatriisi ja LU-hajotelma

Anni Nuutila

Matematiikan kandi
Turun yliopisto

Huhtikuu 2024

Sisällys

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

1 Johdanto

Matriisi on sarakkeihin ja riveihin jaettu suorakulmainen taulukko. Matriisien pystyrivit ovat sarakkeita ja vaakarivit ovat rivejä. Matriisit voivat olla erikokoisia, koska niiden koko määräytyy sarakkeiden ja rivien lukumäärän perusteella. Matriisi, jossa on m riviä ja n saraketta niin sen koko on $m \times n$. Matriiseilla on paljon erilaisia ominaisuuksia. Niillä pystytään laskemaan perinteisen tapaisia laskuja, kuten yhteen- ja vähennyslaskuja ja kertolaskuja.

Matriisien historia sai alkunsa 1800-luvulla, kun matemaatikot Arthur Cayley ja James Joseph Sylvester alkoivat pohtia niiden teoriaa. LU-hajotelma on johdettu Carl Friedrich Gaussin ja Wilhelm Jordanin kehittelemistä Gaussin eliminaatiomenetelmästä ja Jordanin eliminaatiosta.

Tutkimme tässä työssä matriiseja ja tarkemmin lohkomatriiseja ja niiden LU-hajotelmaa. Lohkomatriisit ja LU-hajotelma ovat keskeisiä käsitteitä lineaarialgebrassa ja numeerisessa analyysissä. Kyseiset menetelmät auttavat ja tekevät matriisilaskennasta yksinkertaisempaa. Lohkomatriisit ovat matriiseja, jotka ovat jaettu pienempiin lohkoihin. Välillä meidän pitää tarkastella matriiseja, jotka ovat todella isoja ja näistä tulisi monimutkaisia laskuja, joten otamme avuksi lohkomatriisin. Pienempiä lohkoja on yksinkertisempi käsitellä ja toisaalta helpompi laskea kuin suuria yksittäisiä matriiseja.

LU-hajotelma on matriisin muokkaamista yksinkertaisempaan muotoon. Voidaan hajottaa matriisi A kahden matriisin L ja U tuloksi. LU- hajotelmassa matriisit ovat kolmiomatriiseja eli neliömatriisin erikoistapauksia. Kolmiomatriisin lävistäjän ala- tai yläpuolella olevat luvut ovat kaikki nollia, riippuen siitä onko kyseessä ylä- vai alakolmiomatriisi. LU-hajotelmaa voidaan hyödyntää monessa laskennallisissa sovelluksissa ja algoritmeissä. Menetelmää voidaan käyttää matriisien ratkaisemiseen lineaaristen yhtälöryhmien tapauksessa ja käänteismatriisin laskeminen nopeutuu, jos saadaan alkuperäinen matriisi LU-hajotelman muotoon.

2 Lohkomatriisit

Lohkomatriisit ovat matriiseja, jotka ovat jaettu pienempiin osioihin. Näin on helpompaa päästä haluttuun lopputulokseen, koska voidaan jakaa alkuperäinen matriisi pienempiin lohkoihin.

Lohkomatriisin 2×3 voi kirjoittaa yleisesti näin:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Esimerkki 2.1. Käydään läpi yksinkertainen esimerkki, jossa matriisi A ilmaistaan lohkomatriisina. Toisin sanoen jaetaan matriisi A pienempiin matriiseihin eli lohkoihin. Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & 3 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Matriisi A lohkomatriisina ilmaistuna. Nyt

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}.$$

Lohkomatriiseille pätee samat laskusäännöt kuin tavallisille matriiseille. Voidaan jakaa matriisi lohkoihin ja laskea tavallisella rivisarakesäännöllä matriisin tulot. Pitää huomioida, että laskut onnistuvat vain jos matriisien A ja B tulo on määritelty eli matriisin A sarakemäärä vastaa matriisin B rivimäärää.

Esimerkki 2.2. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Matriisin A viisi saraketta jaetaan kahteen osaan ensin kolmeen sarakeeseen sitten kahteen sarakkeeseen. Puolestaan matriisin B viisi riviä voidaan jakaa samaantapaan kahteen osaan eli ensin kolmeen sarakkeeseen ja sitten kahteen sarakeeseen. Tämä osoittaa, että osiot A ja B ovat yhteensopivia lohkojen A ja B kanssa. Nyt voidaan kirjoittaa AB allaolevaan muotoon

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 & + & A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 & + & A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan $A_{11}B_1$ ja $A_{12}B_2$ arvot ja lasketaan ne yhteen. Saadaan

$$A_{11}B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

ja

$$A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Näin ollen AB ylin lohko on

$$A_{11}B_1 + A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lohkomatriisien kertolaskujen rivi-sarakesääntö antaa yksinkertaisen tavan tulkita kahden matriisin tuloa, kuten esimerkin 2.2 ratkaisusta huomataan.

3 LU-hajotelma

LU-hajotelmassa voidaan ilmaista jokainen neliömatriisi ylä-ja alakolmiomatriisien tulona eli $A = LU$, jossa L on alakolmiomatriisi ja U on yläkolmiomatriisi. Pitää muistaa, että kaikille matriiseille ei ole LU-hajotelmaa. Puolestaan yhtälö $Ax = b$ voidaan kirjoittaa uudelleen kun $A = LU$. Voidaan kirjoittaa $L * Ux = b$ ja merkitään $y = Ux$. Tästä saadaan yhtälöpari, josta voidaan ratkaista x:

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}.$$

Ensin täytyy ratkaista yhtälöstä $Ly = b$ arvo, jolla y toteuttaa yhtälön ja sen jälkeen ratkaistaan yhtälöstä $Ux = y$ arvo, jolla x toteuttaa yhtälön. Tämä on suhteellisen yksinkertainen ratkaista, koska L ja U ovat kolmiomatriiseja. Kolmiomatriiseissa päälävistäjän ala- tai yläpuolella on pelkästään nollia alkioina.

Mietitään yllä olevaa asiaa esimerkin avulla.

Esimerkki 3.1. On helppo todeta laskimella, että

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU.$$

Käytetään LU-hajotelmaa hyväksi kun ratkaistaan

$$Ax = b,$$

missä

$$b = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu: Yhtälö $Ly = b$ tarvitsee vain kuusi kerto- ja kuusi yhteenlaskua, koska laskutoimitukset tapahtuvat vain sarakkeessa viisi. Siis

$$\begin{bmatrix} Lb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Iy \end{bmatrix}.$$

Kun $Ux = y$ on ratkaistu, tarvittiin neljä jako-, kuusi kerto- ja kuusi yhteenlaskua. Saadaan

$$\begin{bmatrix} Uy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tuntemattoman vektorin x löytäminen vaatii 28 laskutoimitusta, kun ei huomioida L ja U löytämistä.

Tarkastellaan hieman tarkemmin LU-hajotelman algoritmia. Oletetaan, että matriisi A voidaan muokata muotoon U käyttämällä pelkästään rivimuunnoksia, kuten lineaarialgebrassa. Jonkun rivin monikerta lisätään alapuolella olevaan riviin. Tässä on olemassa alkeismatriisit $E_1, ..., E_p$, joten

$$E_p \cdots E_1 A = U.$$

Sitten

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU,$$

missä

$$L = (E_p \cdots E_1)^{-1}.$$

Tiedetään, että alkeismatriisien tulolla ja käänteismatriiseilla kolmiomatriisirakenne ja näin ollen saatu matriisi on kääntyvä. Näin ollen L on kääntyvä kolmiomatriisi. L saadaan muodostettua, kun huomataan, että rivimuunnokset muuttavat A arvot U arvoiksi ja samalla periaatteella L arvot muuttuu I arvoiksi. Siis

$$E_p \cdots E_1 L = (E_p \cdots E_1)(E_p \cdots E_1)^{-1} = I.$$

Esimerkki 3.2. Etsi LU-hajotelma matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Koska matriisissa A on neljä riviä, L täytyy olla muotoa 4×4 eli

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että rivimuutokset, jotka luovat nollia matriisin A ensimmäiseen sarakeeseen, luovat myös nollia matriisin L ensimmäiseen sarakeeseen. Vähennetään matriisin A rivejä niin, että päästään riviekvivalenttiin muotoon U. Nyt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U.$$

Nämä luvut määrittävät rivien vähentämisen matriisista A matriisiksi U. Jokaisessa sarakkeessa jaetaan kyseiset luvut samalla luvulla ja sijoita tulos matriisiin L. Saadaan

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Nyt kannattaa miettiä, millä luvuilla matriisit kannattaa jakaa, jotta ylin nollastapoikkeava alkio olisi ykkönen. Jos jaetaan ensimmäinen matriisi kahdella, toinen matriisi jaetaan kolmella, kolmas matriisi jaetaan kahdella ja viimeinen jaetaan viidellä, saadaan alla olevat matriisit. Kyseistä matriisista saadaan muodostettua matriisi L. Nyt

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 4 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ja } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt todistimme, että L ja U toteuttavat $LU = A$.

4 Tiivistelmä

Lohkomatriisien tarkoitus on jakaa suurempi matriisi pienempiin lohkoihin ja näin saada laskettua laskuja yksinkertaisemmin. LU-hajotelmassa annettu neliömatriisi pyritään esittämään kahden matriisin L ja U tulona. Lohkomatriisit ja LU-hajotelma tarjoavat tehokkaan lähestymistavan monenlaisiin laskennallisiin haasteisiin. Näitä voidaan hyödyntään muun muassa matematiikassa ja fysiikassa, mikä tekee niistä hyödyllisiä työkaluja monilla aloilla. Tästä on hyötyä etenkin sellaisilla aloilla, joissa suurten tietomäärien käsitteleminen mahdollisimman tehokkaasti ja nopeasti on keskeistä.

Lähteet

[1] David C. Lay, Steven R. Lay, Judi J. McDonald: *Linear Algebra and Its Applications*, United Kingdom, 2022.