

# Sähkömagneettisten kenttien eteneminen ja kohdentaminen

LuK-tutkielma  
Turun yliopisto  
Fysiikka  
2023  
Fil. yo. Lauri Kinnunen  
Tarkastaja:  
Dr. Kimmo Luoma

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO

Fysiikan laitos

**Kinnunen, Lauri** Sähkömagneettisten kenttien eteneminen ja kohdentaminen

LuK-tutkielma, 18 s., 1 liites.

Fysiikka

Maaliskuu 2024

---

Tutkielmassa johdamme sähkömagneettisten kenttien etenemistä kuvaavan esityksen lähtien liikkeelle Maxwell yhtälöistä ja pohjustamalla tarvittavan teorian kulmaspektriesitykselle. Muodostamme tarvittavat yhtälöt kentille kaukana nollatasosta sekä kohdennetuille kentille. Esittelemme Gaussisen ja paraksiaalisen approksimaation sekä geometrisen optiikan, joita käytämme tutkielmassa yhtälöiden muodostamisessa sekä linssien matemaattisessa kuvauksessa. Esittelemme optiset pinsetit ilmiönä ja johdamme niihin liittyvän teorian käytettyjen approksimaatioiden rajoissa.

Asiasanat: Optiikka, kvanttioptiikka, sähkömagneettinen säteily, kulmaspektriesitys, Maxwell yhtälöt

# Sisällys

<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>1 Teoria</b>	<b>1</b>
1.1 Notaatiot ja menetelmät . . . . .	1
1.2 Maxwell yhtälöt . . . . .	2
1.3 Kulmaspektriesitys . . . . .	4
<b>2 Kenttäesitys ja eteneminen</b>	<b>6</b>
2.1 Kentän eteneminen . . . . .	6
2.2 Geometrinen optiikka . . . . .	7
<b>3 Kentän keskittäminen</b>	<b>8</b>
3.1 Linssit ja niiden matemaattinen kuvaaminen . . . . .	10
3.2 Paraksiaalinen approksimaatio . . . . .	10
3.3 Gaussinen approksimaatio . . . . .	11
<b>4 Sovellus: Optiset pinsetit</b>	<b>13</b>
4.1 Käyttötarkoitus . . . . .	13
4.2 Toimintaperiaate käytetyillä approksimaatioilla . . . . .	15
<b>5 Yhteenveto</b>	<b>17</b>

# Johdanto

Optiikan tutkimusala otti ison askeleen eteenpäin viime vuosituhanella Max Planckin esiteltyä hypoteesi valon diskreetistä energiajakaumasta mustan kappaleen radiatiospektrin [1] myötä, jota Einstein vahvisti esittelemällä valosähköisen ilmiön[2]. Tämän oletuksen pohjalta sähkömagneettisia kenttiä alettiin tutkimaan kvanttimekaniikan ilmiöin fotonien käsitteen yleistymisen myötä. Perustavan laatuinen tarkastelu kvantti- ja nano-optiikassa perustuu kuitenkin yhä käsitykseen etenevistä kentistä ja näiden ominaisuuksista.

Pyrimme tässä tarkastelussa esittämään mallin sähkömagneettisten kenttien etenemisestä ja niiden kohdentamisesta linssien avulla. Käytämme tarkastelussa tarkastelua helpottavia approksimaatioita geometrisen optiikan piirissä, jotta saamme muodostettua helposti ymmärrettävän pohjan optiikan peruskäsitteille. Esittelemme kentän etenemistä kuvaavan kulmaspektriesityksen, jota käytämme kohdennettujen kenttien muodostamiseksi.

Tarkoituksenamme on siis esittävää tarvittava teoreettinen pohja, jotta voimme aloittaa optisten pinsettien tarkastelun käytetyillä approksimaatioilla. Tiiviisti kohdennetulla laser valolla voidaan optisten voimien vaikutuksesta vangita ikään kuin pinseteillä partikkeleita potentiaalikuoppaan. Tästä ilmiö onkin saanut nimensä optiset pinsetit. Ilmiö on kerännyt suurta huomiota viime vuosikymmeninä kvanttiopitiikan tutkimuksissa, koska sitä voidaan soveltaa useilla eri tieteen aloilla. Tämän vuoksi ilmiön tarkastelu on tänäkin päivänä oleellista.

## 1 Teoria

### 1.1 Notaatiot ja menetelmät

Tarkastellessamme sähkömagneettisten kenttien ominaisuuksia ja johtaessamme yhtälöt eteneville kentille kytämme hyödyksi pääasiassa Ulrich Hohenesterin Nano

and Quantum Optics [3] sekä Lukas Novotnyn Principles of Nano-optics [4] teoksia. Kaavojen johtamisessa esitämme vain teorian kannalta tärkeimmät välivaiheet koska seuraamme johdoissa hyvin tarkasti lähteitä. Johdettavissa kaavoissa esiintyy useita vektorinotaatioita, joita merkitsemme suureen yläpuolella esiintyvällä nuolella  $\vec{A}$  ja vastaavasti viitatessa yksittäisiin vektorikomponentteihin merkitsemme vastaavan suuntaisilla alaindekseillä  $k_x$ . Yksikkövektoreita merkitsemme hatulla suureen päällä  $\hat{r}$ .

## 1.2 Maxwell yhtälöt

Aloitamme sähkömagneettisten aaltojen etenemisen tarkastelun Maxwellin yhtälöistä, tarkemmin Maxwell-Heaviside yhtälöistä niiden osittaisdifferentiaali muodoissa. Yhtälöt ovat esitettyinä kaavoissa (1)-(4). Maxwell yhtälöt sisältävät kuvaukset sähkömagneettisten kenttien käyttäytymisestä tyhjiössä.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Ensimmäinen yhtälö, Gaussin laki, jossa  $\vec{E}$  on sähkökenttä,  $\rho$  varaustiheys ja  $\varepsilon_0$  sähköinen vakio sanoo, että sähköinen vuo suljetun pinnan läpi riippuu vain pinnan sisältämästä varaustiheydestä. Vastaavasti seuraava yhtälön mukaan magneettinen vuo  $\vec{B}$ , suljetun pinnan läpi on nolla, koska ei ole olemassa magneettisia lähteitä tai magneettisia monopoleja.

Kolmas yhtälö, Faradayn induktiolaki sanoo, että aikariippuvainen magneettinen vuo  $\vec{B}$  synyttää sitä vastaan kohtisuorassa olevan sähkökentän.  $\vec{E}$  Viimeinen yhtälö, Maxwell-Ampèren laki sanoo, että virtatiheyttä  $\vec{J}$  ja ajassa muuttuvaa sähkö-

kenttää vasten on aina olemassa näitä vastaan kohtisuorassa oleva magneettikenttä. Neljännessä kaavassa esiintyvä  $\mu_0$  on magneettinen vakio.

Hyödyntämällä yhtälöitä (1)-(4) voimme lähteä muodostamaan sähkömagneettisen aallon liikeyhtälöä. Nyt, koska tarkastelemme sähkömagneettisen aallon etenemistä, emmekä varauksen aiheuttamaa kenttää, voimme asettaa virrantiheyden  $\vec{J}$  sekä varaustiheyden  $\rho$  nolliksi. Näillä oletuksilla saamme esitettyä Faradayn induktiolain ja Maxwell-Ampèren muodoissa

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

Nyt hyödyntämällä vektorilaskennan kaavoja voimme lähteä johtamaan aallolle liikeyhtälöä

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Voimme soveltaa sähkökentän kahdelle ristitulolle tulosta

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (8)$$

Koska varaustiheys on nolla, voimme soveltaa tähän kaavaa (1), jolloin saamme tuloksen

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\nabla^2 \vec{E} \end{aligned} \quad (9)$$

Tiedämme, että valonnopeudella sekä sähköisellä vakiolla ja magneettisella vakiolla on yhteys

$$c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1 \quad (10)$$

Nyt yhdistämällä tulokset (7), (9) ja (10) saamme sähkömagneettiselle kentälle liikeyhtälön

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (11)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0 \quad (12)$$

Saatu liikeyhtälö on toisen asteen homogeeninen differentiaaliyhtälö. Yksiulotteiselle tasoaalolle on perusratkaisu [5]

$$\vec{E}(z, t) = ae^{i(kz - \omega t)} + be^{-i(kz + \omega t)} \quad (13)$$

Missä kertoimet  $a$  ja  $b$  ovat aallon amplitudi ja eksponentissa  $k$  on aaltoluku,  $\omega$  on kulmanopeus,  $t$  on kuljettu aika ja  $z$  etenemissuunta. Tässä ratkaisussa otetaan huomioon tasoallon eteneminen molemmissa suunnissa. Tässä tarkastelussa tarvitsemme kuitenkin vain aallon positiivisessa suunnassa etenevän osan, jolloin saamme ratkaisun

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (14)$$

Tässä ratkaisussa tarkastelemme etenemistä vain yhdessä suunnassa ja ratkaisu riippuu vain aallon muodosta hetkellä  $t = 0$  ja vaihekertoimesta  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ .

### 1.3 Kulmaspektriesitys

Aloitamme etenemisen tarkastelun tasoaalloista, jotka etenevät suunnassa  $z$ . Aallon lähtöpisteessä, eli  $z = 0$  tasossa aallon sähkökenttä jakauma on muotoa  $\vec{E}_0(x, y)$ . Teemme tarkasteltavalle, mielivaltaiselle kentälle Fourier-muunnoksen. [3]



$$\tilde{E}(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(k_x x + k_y y)} \vec{E}_0(x, y) dx dy \quad (15)$$

Nyt saamme esitettyä kentän sen aaltovektorin komponenttien avulla. Takaisin alkuperäiseen kenttäesitykseen pääsemme vastaavasti käänteisellä Fourier-muunnoksella.

$$\vec{E}_0(x, y) = \int e^{i(k_x x + k_y y)} \tilde{E}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (16)$$

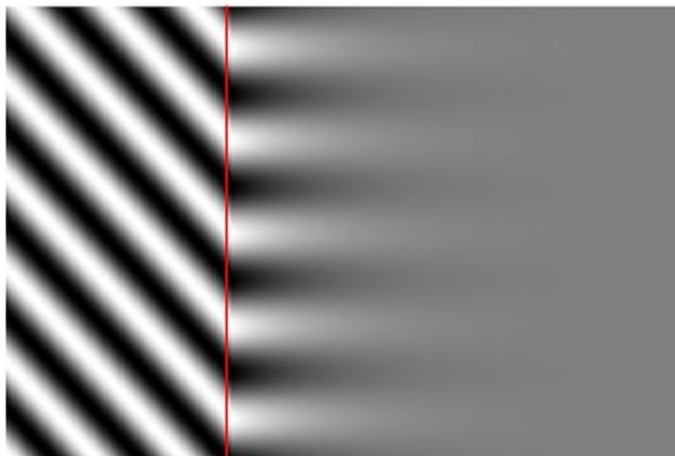
Aallon edetessä tasossa  $z > 0$  aallon aallon Fourier komponentteihin lisätään kaavan (14) mukainen vaihekerroin, josta arvo  $k_z$  voidaan ratkaista aaltoluvusta  $k$ , joka saadaan valon taaajuudesta ja dispersio relaatiosta [3]

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (17)$$

Etumerkki neliöjuuren edessä määrittää kentän etenemissuunnan. Nähdään myös, että jos  $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ , saamme tuloksena kompleksisen aaltoluvun. Kompleksinen aaltoluku vastaa vaimenevia kenttiä, joita käsitellään kappaleessa 2.2. Nyt voimme esitellä taso-aallon kulmaspektriesityksen kaavojen (16) ja (17) nojalla

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) = & \int_{k^2 > k_x^2 + k_y^2} e^{i(k_x x + k_y y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z)} \tilde{E}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \\ & + \int_{k^2 < k_x^2 + k_y^2} e^{i(k_x x + k_y y) + \sqrt{k^2 + k_x^2 - k_y^2} z} \tilde{E}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \end{aligned} \quad (18)$$

Esitys kuvaa kentän etenemistä homogeenisessä väliaineessa, kun  $z > 0$ . Esityksen (18) ensimmäinen ja toinen termi kuvaavat eteneviä sekä vaimenevia kenttiä vastaavasti. Esityksestä nähdään, että mitä kauemmas siirrytään tasosta  $z = 0$  sitä enemmän vaimenevat kentät katoavat ja vain etenevät jäävät jäljelle.



Kuva 1. Vaimenevat kentät kokonaisheijastumisessa [6]

## 2 Kenttäesitys ja eteneminen

### 2.1 Kentän eteneminen

Pysymme aluksi tarkastelussamme pienissä etäisyyksissä tasosta  $z = 0$ , jolloin vaimenevat kentät ovat vielä tarkastelun kannalta merkityksellisiä. Etenevien aaltojen tapauksessa kuitenkin vaimenevilla kentillä ei ole suurta merkitystä koska nämä häviävät siirryttäessä kauemmas tasosta  $z = 0$ , joten tarkastelemme niitä vain lyhyesti.

Vaimeneville kentille on luonteenomaista, että ainakin yksi etenemistä kuvaavan aaltovektorin  $\vec{k}$  komponenteista on imaginaarinen. [4] Kenttä ei kuitenkaan etene vektorin imaginaarisessa suunnassa vaan vaimenevat eksponentiaalisesti. Vaimenevia kenttiä voidaan havainnollistaa kokonaisheijastumisen kohdalla, jossa valo saapuu väliaineeseen kokonaisheijastumiskulmassa. Tällöin intuitiivisesti olisi havaittavissa vain tuleva säde sekä heijastunut säde eikä läpipäässyttä sädettä, kuitenkin voidaan todeta, että tämä ei päde Maxwell-yhtälöiden nojalla ja voidaan havaita eksponentiaalisesti vaimeneva läpäisevä kenttä. [6] Tätä on havainnollistettu kuvassa 1

Siirryttäessä kauemmas tasosta  $z = 0$  vaimenevat kentät katoavat eksponentiaalisesti eli kun  $r \rightarrow \infty$  jäljellä on enää vain aallon etenevä osa. Kutsumme jatkossa

tasoa  $z > 0$  kaukokentäksi ja suoritamme tarkastelun kenttien etenemisestä tässä alueessa.

Nyt suurilla etäisyyksillä liikkuville kentille [3] esitämme muodon

$$\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r} \vec{F}(\hat{r}) \quad (19)$$

Missä funktio  $\vec{F}(\hat{r})$  on kaukokenttäamplitudi

$$\vec{F}(\hat{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} \int_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{E}_0(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (20)$$

Kaavan (20) integraalia voimme approksimoida käyttämällä stationaarisen vaiheena approksimaatiota [3] (engl. stationary phase approximation), jolloin saamme kaukokenttäesityksen

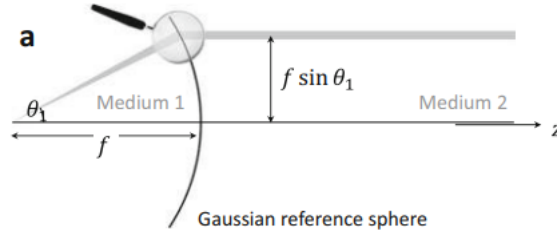
$$\vec{F}(\hat{r}) = -2\pi i k r_z \tilde{E}_0(k \hat{r}_x, k \hat{r}_y) \quad (21)$$

Saatu lauseke esittää nyt, että tarkasteltavan kentän eteneminen määräytyy vain yhden Fourier komponentin avulla. Kaikissa muissa suunnissa tapahtuu tuhoava interferenssi kaukokentässä.

Nyt olemme saaneet muodostettua funktiot eteneville kentille, joten siirrymme tarkastelemaan itse etenemistä. Esitämme kentät geometrisen optiikan mukaisesti säteinä, käyttäen apuna paraksiaalista sekä Gaussista approksimaatioita, joihin perehdymme tarkemmin kappaleessa 3. Paraksiaalinen approksimaatio tarkoittaa, että etenevien säteiden ja optisen akselin väliset kulmat ovat hyvin pieniä, eli säde ei lähde hajautumaan suuresti optisesta akselistä. Gaussinen approksimaatio puolestaan kuvaa aallon intensiteetti profilia. Tässä approksimaatiossa säteen intensiteettiä etenemissuuntaan kohtisuorissa suunnissa kuvaa gaussinen jakauma.

## 2.2 Geometrinen optiikka

Tarkastelemme siis kenttien etenemistä geometrisesti säteiden avulla, mikä tässä tutkielmassa tarjoaa tarvittavat työkalut asian ymmärtämiseksi. Geometrinen optiikka



Kuva 2. Gaussinen referenssi kehä [3]

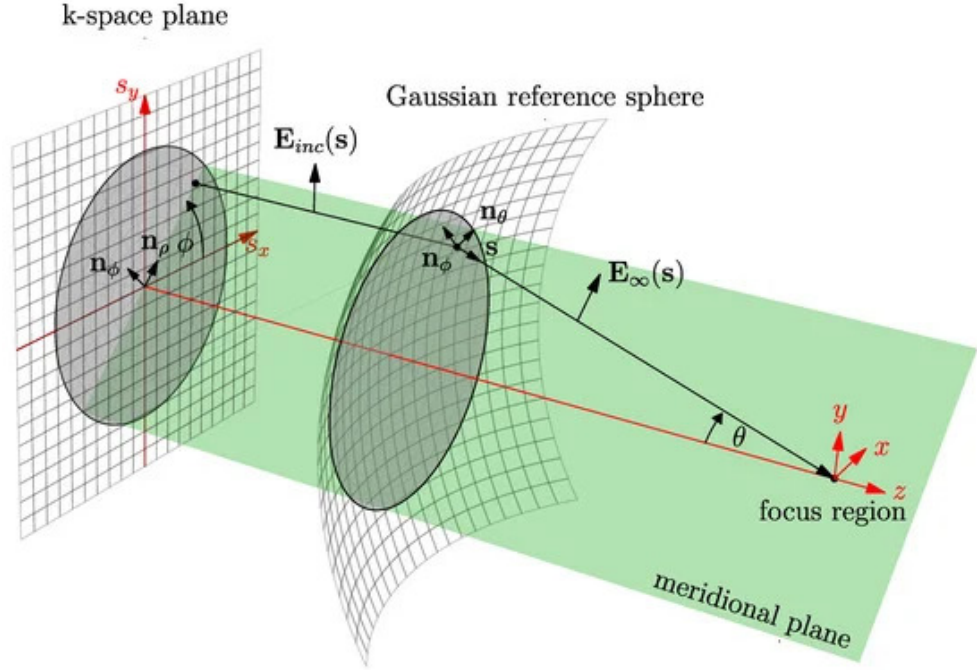
helpottaa tarkastelua huomattavasti, koska voimme turvautua perinteisiin geometrian kaavoihin. Tämä helpottaa erityisesti linssien ja kohdentamisen matemaattista tarkastelua, jossa voimme esittää linssit Gaussisen referenssi kehän avulla. Tästä on havainnollistus kuvassa 2.

Geometrisellä optiikalla on kuitenkin rajoituksensa, jotka voidaan esittää neljänä perus postulaattina [7].

1. Säteiden tulee kulkea homogeenisessä väliaineessa suoraa janaa pitkin.
2. Säteen heijastumiskulman tulee vastata tulokulmaa
3. Säteen taitekulman väliaineden rajapinnalla tulee olla vakio, joka riippuu vain väliaineista
4. Kahden tai useamman riippumattoman säteen kohdatessa, säteiden optiset ominaisuudet eivät saa muuttua.

### 3 Kentän keskittäminen

Kentän keskittämisessä lähdemme tarkastelemaan kenttää, joka kulkee kaavan 21 muodossa yhdensuuntaisesti optisen akselin kanssa läpi linssin, jota havainnollistamme käyttäen gaussista referenssikehää 3. Tarkastelemamme tilanne koostuu siis kahdesta kentästä, saapuvasta kentästä  $\vec{E}_{inc}(r, \phi)$ , sekä sylinterikoordinaateissa esitetystä kohdennetusta kentästä  $\vec{E}(r, \varphi, z)$ . Aivan kuten etenvän aallon tapauksessakin, kohdennetun aallon kenttäesitys riippuu linssiin saapuvasta kentästä. Tämän



Kuva 3. Säteen keskittäminen Gaussisen referenssikehän avulla [8]

lisäksi esitys riippuu kulmasta, jossa säde saapuu linssille, sekä linssin fokuksesta, eli Gaussisen referenssikehän säteestä. [3] Kenttäesitys on muotoa

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{ikfe^{-ikf}}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{inc}}{n}} \int_0^{\theta_{max}} \sqrt{\cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \overline{\overline{\mathcal{R}}}^{foc} \cdot \vec{E}_{inc}(f \sin(\theta), \phi) e^{-ikz \cos(\theta)} e^{ik\rho \sin(\theta) \cos(\phi - \varphi)} \quad (22)$$

Tähän tulokseen päästään yhdistämällä ja muokkaamalla kaavoja (18) ja (21). Yhtälön johtaminen vaatii siirtymistä pallokoordinaatistoon. Emme kuitenkaan johda tätä koska tulos riittää meille tässä tarkastelussa. Kaavassa (22)  $f$  on referenssikehän fokus,  $n_{inc}$  ja  $n$  ovat linssin ja kohdennuspuolen taitekertoimet vastaavasti ja  $\overline{\overline{\mathcal{R}}}^{foc}$  on sähkömagneettisen aallon muunnosmatriiri kohdistavassa linssissä, jolle on annettu muoto

$$\overline{\overline{\mathcal{R}}}^{foc} = \begin{bmatrix} t^\rho \cos^2(\phi) \cos(\theta) + t^\phi \sin^2(\phi) & \frac{1}{2}(t^\rho \cos(\theta) - t^\phi) \sin(2\phi) & 0 \\ \frac{1}{2}(t^\rho \cos(\theta) - t^\phi) \sin(2\phi) & t^\rho \sin^2(\phi) \cos(\theta) + t^\phi \cos^2(\phi) & 0 \\ -t^\rho \cos(\phi) \sin(\theta) & -t^\rho \sin(\phi) \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Matriisissa  $t^p$  ja  $t^\phi$  ovat siirtokertoimia.

### 3.1 Linssit ja niiden matemaattinen kuvaaminen

Käytetyissä approksimaatioissa oletamme, että kenttä saapuu linssille lähes yhden-suuntaisesti optisen akselin kanssa suoraviivaisen säteen muodossa. Kuvaamme siis linssiä edellä mainitun gaussisen referenssikehän avulla, johon osuessa säteen suunta muuttuu.

Voimme kuvata sädettä, jota kohdennamme pitkänä lieriönä, jolla on nollassa poikkeava säde. Tällöin säteen osuessa linssiin säteen reunat taittuvat linssistä hie-man eri kulmissa aiheuttaen säteen tiivistymisen lähestyessä polttopistettä. Tällä-tavoin muodostuvat tiiviisti kohdennetut kentät, jotka saavat intensiteettimaksimin linssin polttopisteessä. Matka, jonka säde kulkee linssistä polttopisteeseen voidaan laskea linssin tangentin ja säteen välisen kulman sekä linssin fokuksen avulla. Fo-kus on tässä yhteydessä gaussisen referenssikehän säde. Tällöin matka on polttopis-teeseen on  $f \cos(\theta)$ , missä kulma  $\theta$  on referenssikehän tangentin ja säteen välinen kulma. Geometrisesti voidaan osoittaa, että tämä on sama kulma kuin fokuksen ja kohdentuvan säteen välinen kulma.

Puhtaan geometrisellä tarkastelulla huomaamme helposti, että päädyimme tilan-teeseen, jossa kohdennetun säteen leveys polttopisteessä olisi nolla. Tämä ei kuiten-kaan fysikaalisesti ole mahdollista, koska tällöin säteen intensiteetti ajautuisi singu-lariteettiin. Tämä on myös helppo todentaa empiirisesti ja nähdä, että valokeilan säde ei kohdennettuna koskaan mene nollassa.

### 3.2 Paraksiaalinen approksimaatio

Kuten aiemmin jo käsitelimme, paraksiaalisessa approksimaatiossa aaltovektorin  $x$ - ja  $y$ -suuntaiset komponentit eivät vaikuta merkittävästi itse aaltovektoriin. Eli säteet eivät leviä optisesta akselistä merkittävästi. Tämä voidaan esittää matemaat-

tisesti

$$k_z = k\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \quad (24)$$

Lausekkeen ensimmäinen yhtäsuuruus saadaan suoraan Pythagoraan lauseesta ja approksimaatio saadaan neliöjuurilausekkeen sarjakehitelmästä, jossa korkeamman asteen termit ovat jätetty pois [4] paraksiaalisen approksimaation tekemän oletuksen nojalla.

### 3.3 Gaussinen approksimaatio

Gaussinen approksimaatio tarjoaa ratkaisun geometrasta optiikkaa käsittelevässä kappaleessa esiin tuomaamme ongelmaan singulariteettisesta intensiteetista. Aloitamme approksimaation esittelemisen tarkastelemalla etenevän aallon amplitudia. Aallon edetessä  $z$  suunnassa aallon amplitudi laskee. Tarkasteltavan aallon kapean luonteen vuoksi amplitudi on myös rajoitettu pieniin  $x$  ja  $y$  arvoihin, jolloin amplitudi pienenee jyrkästi  $x$  ja  $y$  arvojen kasvaessa. Tätä yhteyttä voimme kuvata Gaussisella jakaumalla  $\exp[-(x^2 + y^2)/w^2]$ , missä  $w$  on säteen "vyötärön" leveys.

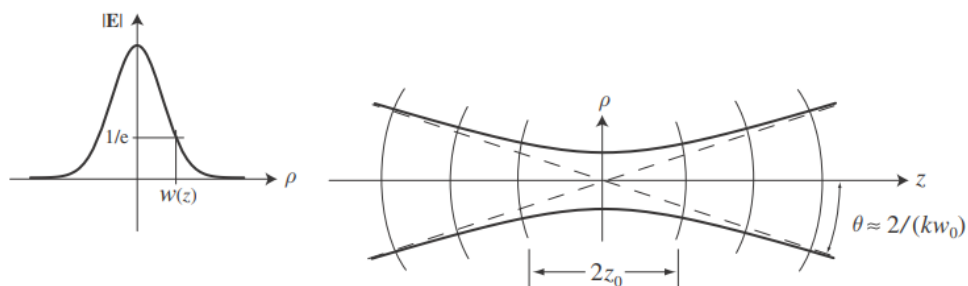
Nyt voimme tarkastella paraksiaalista aaltoyhtälöä, jonka ratkaisut ovat Hermite-Gauss säteiden yhtälöt

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

Tässä tarkastelussa olemme kiinnostuneita aaltoyhtälön ensimmäisen kertaluvun ratkaisusta, jonka saamme yritteellä

$$\mathcal{E}_0(x, y, z) = A e^{ik \frac{(x^2 + y^2)}{2q(z)}} e^{ip(z)} \quad (26)$$

josta nyt riittää vain selvittää funktiot  $q(z)$  ja  $p(z)$ . Yrite korjaa yhtälön  $x$  ja  $y$  riippuvuuden pakottamalla aallon muodon poikittaisesti symmetriseksi. Tästä saamme lopullisen nollannen kertaluvun ratkaisun [9]



Kuva 4. Gaussisen säteen erityispiirteitä ja virittämä alue [4]

$$\mathcal{E}_0(x, y, z) = \frac{A}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}} e^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{i\phi(z)} \quad (27)$$

Missä

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_R}} \quad (28)$$

on aallon vyötärön funktio, jossa  $w_0$  on vyötärön minimiarvo, joka esiintyy kohdenetun säteen polttopisteessä.  $z_R$  kuvaa Rayleigh etäisyyttä, eli etäisyyttä arvosta  $w_0$  arvoon, jossa vyötärön leveys on kasvanut kertoimella  $\sqrt{2}$ . [10]

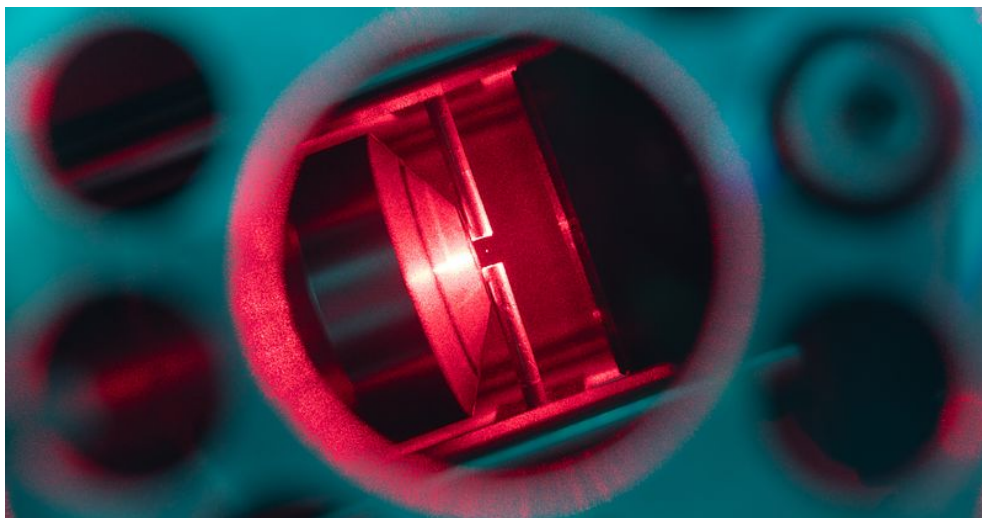
Vastaavaan tulokseen olisimme päässeet myös käyttämällä yksinkertaista muotoa  $\vec{E}(x, y, 0) = \vec{E}_0 \exp[-(x^2 + y^2)/w_0^2]$  Gaussiselle aallolle ja syöttämällä tämän fourier muunnos kulmaspektriesitykseen (18). [4] Saatu yhtälö virittää hyperboloidin alueen, jonka asymptootit ympäröivät kulman

$$\theta = \frac{2}{kw_0} \quad (29)$$

joka on paraksiaalisen approksimaation nojalla rajattu pieniin arvoihin. Toinen paraksiaalisen Gaussin säteen ominaisuus on, että lähellä polttopistettä säde pysyy lähes kollimoituneena yli kaksinkertaisen Rayleighin etäisyyden  $2z_0$ . Näitä ominaisuuksia on havainnollistettu kuvassa 4.

Esitellyissä approksimaatioissa täytyy nyt huomioida, että paraksiaalisen approksimaation ollessa voimassa, kenttä  $\vec{E}$  ei toteuta Maxwell yhtälöitä ja approksi-





Kuva 5. Nanopartikkeli vangittuna optisilla pinseteillä. Halkaisija 103 nm [11]

maation virhe kasvaa, mitä pienemmäksi vyötärön minimi saadaan. Gaussisen approksimaation kohdalla on huomioitava, että Gaussinen fourier spektri, jota käytetään yhtälön muodostamisessa, on ääretön ja sisältää siis vaimenevat imaginaariset komponentit eikä siis ole realistinen. Nämä approksimaatiot kuitenkin ovat tässä, yksinkertaisessa tarkastelussa riittäviä.

## 4 Sovellus: Optiset pinsetit

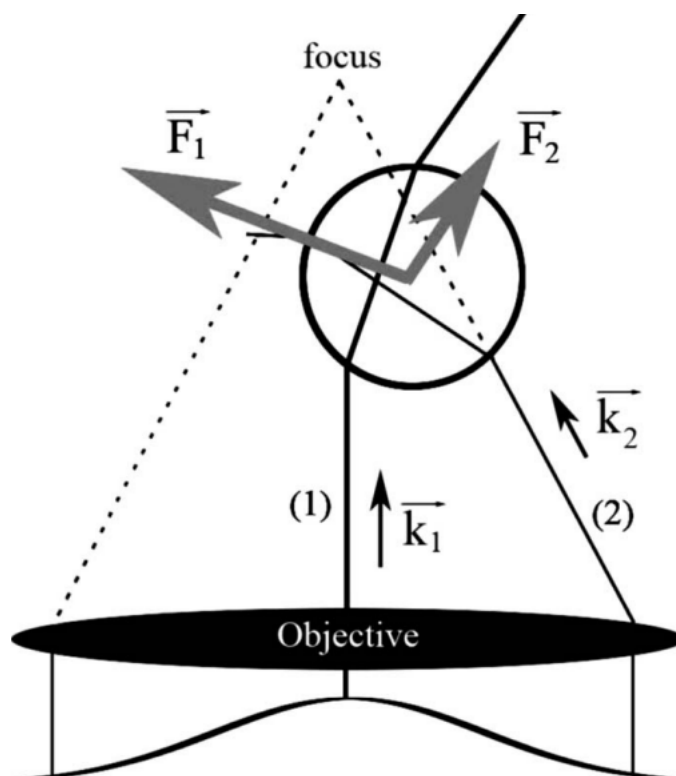
### 4.1 Käyttötarkoitus

Nyt olemme tarkastelleet sähkömagneettisten kenttien etenemiseen ja kohdentamiseen liittyvää teoriaa, josta siirrymme tarkastelemaan missä näitä ominaisuuksia voidaan hyödyntää. Tässä tarkastelemme yhtä näistä sovellutuksista, nimellisesti optisia pinsettejä, jossa tiiviisti kohdennetulla sähkömagneettisella kentällä voidaan vangita ja tutkia mikro- ja nanokokoista materiaa, kuten soluja, bakteereita ja DNA:ta lähellä fokusta. Vastaavalla menetelmällä on myös mahdollista lukita partikkelien vapausasteita mahdollistaen laser jäähdytys ilmiön mutta tähän emme täät työssä perehdy.

Optisen pinsetin teorian ja käytännön toi ensimmäisiä kertoja esille Arthur Ashkin tutkimusryhmänsä kanssa avuonna 1986, kun hän onnistui vangitsemaan elävän bakteerin vahingoittamatta tätä. Myöhemmin 1997 Stephen Chu ansaitsi ilmiöllä fysiikan Nobelin palkinnon. Vuonna 2018 fysiikan Nobel palkinto jaettiin kolmen henkilön kesken, joista Arthur Ashkin sai puolet kunniasta, [12][3][4]

Ashkinin kokeen jälkeen optisille pinseteille on kehitetty paljon kohteita erityisesti lääketieteessä, biologaissa ja fysiikassa, koska yleisesti mikro- ja nanokokoluokissa olevien partikkelien tutkiminen vahingoittamatta kohdetta on hyvin haastavaa. Optisilla pinseteillä tämä kuitenkin onnistuu. Käytännössä sovellusta käytetään tutkittaessa vangitun kappaleen kimmoisuutta, voiman ja kierron ominaisuuksia sekä spatiaalisia ominaisuuksia. Voimat, joita optisilla pinseteillä voidaan mitata ovat suuruusluokkaa  $1 - 10 \cdot 10^{-12} \text{N}$ . [4] nämä voimat aiheutuvat fotonien siirtäessä liikemäärän törmäyksessä materiaan. Yksittäisen fotonin kantama liikemäärä on määriteltä  $\hbar k$ , joka näkyvälle valolle on suuruusluokkaa  $10^{-27} \text{mkg s}^{-1}$ . Voimat ovat siis hyvin pieniä, joten niillä ei ole merkittävää vaikutusta makro kokoiseen materiaan mutta mikro- ja nanokokoluokissa näillä voimilla voidaan vangita partikkeleita.

Optiset voimat voidaan esittää kolmessa viitekehyksessä, [13] dipoliapproksimaatiolla, geometrisellä optiikalla tai aalto-optiikan menetelmillä. Näistä keskitymme pääasiassa geometriseen optiikkaan. Valitusta menetelmästä riippuu, kuinka suuria partikkeleita voidaan vangita. Dipoliapproksimaatio keskittyy partikkeleihin, joiden koko on paljon aallonpituutta pienempi, geometrinen optiikka niihin, joiden koko on aallonpituutta huomattavasti suurempi ja aalto-optiikka keksitty välimaastoon. Pystymme siis valitsemassamme viitekehyksessä tutkimaan partikkeleita, jotka ovat kooltaan paljon aallonpituutta suurempia.



Kuva 6. Säteiden kappaleeseen kohdistamat optiset voimat [4]

## 4.2 Toimintaperiaate käytetyillä approksimaatioilla

Optisilla pinseteillä vangittu partikkeli on lukittu potentiaaliukuoppaan, jossa se käyttäytyy harmonisen värähtelijän tapaan. partikkeli liikkuu potentiaaliukuopassa tasapainioaseman ympärillä Brownisesti, eli kokien satunnaista värähtelyä paikan suhteen. Poistuessaan tasapainosta partikkeliin kohdistuu etäännyvän liikkeen suuruudesta riippuvan palauttavan voiman, joka palauttaa partikkelin lähes tasapainoon. [13] Systeemiä voidaan kutsua myös Browniseksi harmoniseksi värähtelijäksi.

Aloitamme teorian tarkastelun palloaberraatiosta, jossa saapuva säde taittuu linssin reunoilla eri tavalla, kuin keskiosissa, jonka vuoksi fokus ei keskity yhteen tiiviiseen pisteeseen vaan jakautuu kapeaan alueeseen. Tämä ilmiö heikentää fokusta ja säteen vangitsemis ominaisuuksia.

Osuessa kappaleen pintaan, säteen liikemäärän suunta muuttuu refraktion seurauksena, jolloin liikemäärän säilymislain nojalla myös kappaleen liikemäärä muut-

tuu. Tästä seuraa, että kappaleeseen kohdistuu voima, joka muuttaa kappaleen liikemäärää. Tämän voiman suunta kohdistuu kohti fokusta. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 6, jossa on kuvattu kaksi sädettä ja niiden rafraktio. Kuvassa nähdään, että  $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$ , mikä johtuu valon intensiteetin gaussisesta jakaumasta. Tämä yleistettynä kaikille säteille nähdään, että voima osoittaa aina kohti fokusta, joka toimii optisen vangitsemisen perustana. [13]

Nyt geometrisen optiikan menetelmin aloitamme laskemalla yksittäisen säteen kohdistaman voiman kappaleeseen, jonka säteelle pätee  $a \gg \lambda$ . Säde osuu kappaleen pintaan kantaen voimaa  $dP$  ja jakautuu tästä heijastuneeseen ja taittuneeseen osaan. Näin Säde jakautuu kappaleessa muodostaen äärettömän summan, josta voidaan määrittää voiman aiheuttama muutos liikemäärässä. Nyt voima saadaan laskettua Newtonin dynamiikan peruslaista johdettuna

$$d\vec{F} = \frac{n_m}{c} [Re(Q_t)\hat{z}' + Im(Q_t)\hat{y}']dP \quad (30)$$

Missä  $\hat{z}'$  ja  $\hat{y}'$  ovat kaksiulotteisen tason suuntavektorit ja  $Q_t$  määritellään

$$Q_t = 1 + Re^{2i\alpha} - T^2 \frac{e^{2i(\alpha-\beta)}}{1 + Re^{-2i\beta}} \quad (31)$$

Missä  $R$  ja  $T$  ovat heijastuneita ja läpäisseitä osia vastaavat funktiot ja  $\alpha$  ja  $\beta$  näiden ja pinnan normaalin väliset kulmat.  $R$  ja  $T$  voidaan nyt esittää kulmien funktioina

$$R(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2 \quad (32)$$

$$T(\alpha, \beta) = 1 - R(\alpha, \beta) \quad (33)$$

Nyt kokonaisvoima, joka kappaleeseen kohdistuu kaikista säteistä saadaan laskemalla integraali yli kaavan (30). Tämän tarkaksi laskemiseksi, joka vastaisi kokeellisia tuloksia tarvitsee kuitenkin tietää säteen intensiteetti profiili, joka saadaan määrättyä Gaussisen approksimaation määräämän säteen vyötärön leveyden avulla.

Vangittu kappale kokee siis voiman, joka geometrisesti määräytyy edellä mainitulla tavalla ja pysyy tämän vaikutuksesta tasapainoaseman lähialueessa palloaberraation vaikutuksen alaisena.

## 5 Yhteenveto

Tutkielmassa kävimme läpi kvantti- ja nano-optiikan perusteoriaa lähtien liikkeelle Maxwell yhtälöistä ja päättäen kokeellisen sovelluksen, optisten pinsettien, teoreettiseen esittelyyn. Tutkielman päätarkoitus oli esitellä sähkömagneettisten kenttien etenemistä kulmaspektriesityksen avulla. Esitimme siis kentän liikeyhtälön ja esittelimme kulmaspektriesityksen, josta johdimme kuvaavat yhtälöt kentille, kun ne ovat edenneet kauas lähtötasosta ja kohdentamisen jälkeen. Tämän jälkeen saimme luontevasti esitettyä geometrisen optiikan piirin, jonka rajoissa toimimme sekä Gaussisen- ja paraksiaalisen approksimaation.

Tästä jatkoimme tarkastelemaan optisia pinsettejä aloittaen yleisesti sovelluksen historiasta, kehityksestä ja yleisestä toimintaperiaatteesta. Rajoitimme oman tarkastelumme optisista pinseteistä geometriseen optiikkaan ja käytettyihin approksimaatioihin, jolloin saimme muodostettua hyvän teoreettisen kuvauksen ilmiöstä yksinkertaisessa tapauksessa. Optisten pinsettien teorian tarkastelu on kuitenkin hyvin paljon laajempi kokonaisuus, kuin mitä tässä tutkielmassa pystyimme käsittelemään, jonka vuoksi lopullinen esitys jäi jää vajaaksi, mutta luo hyvän teoreettisen pohjan ilmiön syvemmälle tarkastelulle.

Kvantti- ja nano-optiikka ovat tutkimuksen puolesta nuoria optisen fysiikan haaroja ja optisia pinsettejä on ilmiönä tutkittu vain reilu 50 vuotta, joka fysiikan historiassa on hyvin lyhyt aika. Tämän vuoksi tässä tutkielmassa käsittelemämme aiheet tulevat varmasti saamaan huomiota ja kehittymään tulevaisuudessa valtavasti, mikä takia alan ilmiöiden teoreettinen sekä kokeellinen tarkastelu on ajankohtaista.

## Viitteet

- [1] M. Planck, *Annalen Phys.* **4**, 553 (1901).
- [2] J. Gribbin, kirjassa *Annus mirabilis : 1905, Albert Einstein, and the theory of relativity, Biography*, toimittanut M. Gribbin (Chamberlain Bros New York, 2005), "A E's award-winning series, Biography--DVD label.
- [3] U. Hohenester, *Nano and Quantum Optics: An Introduction to Basic Principles and Theory, Graduate Texts in Physics* (Springer International Publishing, 2020).
- [4] L. Novotny ja B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, 2006).
- [5] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2021).
- [6] T. Thio, *American Scientist* **94**, 40 (2006).
- [7] M. Katz, *Introduction to geometrical optics* (World Scientific, 2002), OCLC: ocm52160660.
- [8] F. Ott, N. Fritzsche ja A. Kienle, *Photonics* **10**, (2023).
- [9] E. J. Galvez, *American Journal of Physics* **74**, 355 (2006-04-01).
- [10] A. Siegman, *Lasers, G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series* (University Science Books, 1986), p. 1283.
- [11] Steven Hoekstra - Levitated nanospheres.
- [12] A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156 (1970).
- [13] M. S. Rocha, *American Journal of Physics* **77**, 704 (2009-08-01).