

Differentiaaliyhtälöiden numeeriset menetelmät

Valtteri Alatalo

Toukokuu 2024

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Differentiaaliyhtälön stabiilisuus	1
3	θ -menetelmät	3
3.1	Eksplisiittinen Eulerin menetelmä	3
3.2	Implisiittinen Eulerin menetelmä	4
3.3	Trapetsimenetelmä	5
4	Rungen–Kuttan menetelmät	6
4.1	Toisen asteen Rungen–Kuttan menetelmät	6
4.2	Neljännän asteen Rungen–Kuttan menetelmät	8
5	Numeeristen menetelmien tulokset	11
6	Yhteenveto	14

Tiivistelmä

Differentiaaliyhtälöt ovat laajasti käytössä eri tieteenaloilla, ja niiden ratkaisemiseen tarvitaan usein erilaisia numeerisia menetelmiä. θ -menetelmät ovat suoraviivaisia numeerisia menetelmiä, jotka arvioivat ratkaisuja iteratiivisesti ottamalla askelia derivaatan suuntaan. Näistä tunnetuimpia menetelmiä ovat eksplisiittinen Eulerin menetelmä, implisiittinen Eulerin menetelmä sekä trapetsimenetelmä. θ -menetelmät kärsivät kuitenkin tarkkuusongelmista, varsinkin kun niitä sovelletaan numeerisesti vaikeasti laskettaviin differentiaaliyhtälöihin. Rungen–Kuttan menetelmät taas arvioivat differentiaaliyhtälön ratkaisua monessa pisteessä kullakin askeleella ja tarjoavat siten yleensä tarkempia tuloksia. Yleisimmät Rungen–Kuttan menetelmät ovat toisen asteen Rungen–Kuttan menetelmät ja neljännen asteen Rungen–Kuttan menetelmät.

Asiasanat: differentiaaliyhtälöt, numeeriset menetelmät, Eulerin menetelmät, Rungen–Kuttan menetelmät

1 Johdanto

Differentiaaliyhtälöt ovat tärkeitä työkaluja dynaamisten systeemien mallintamisessa lukuisilla tieteenaloilla. Ne kuvaavat funktioiden ja näiden derivaattojen yhteyttä ja soveltuvat siten suureiden muutosten tutkimiseen tietyllä ajanjaksolla [5]. Vaikka joihinkin differentiaaliyhtälöihin löytyy myös analyyttinen ratkaisu, on olemassa paljon tosielämän ongelmia jotka ovat ratkaistavissa vain numeerisilla menetelmillä [1]. Myös kankeat differentiaaliyhtälöt (eli differentiaaliyhtälöt, joiden numeerisessa ratkaisemisessa on haasteita) ovat yleisiä, jolloin oikean numeerisen menetelmän valitseminen on erityisen tärkeää. Tässä tutkielmassa käsitellään keskeisimpiä numeerisia menetelmiä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, kuten Eulerin menetelmiä ja Rungen–Kuttan menetelmiä, mukaan lukien aiemman implisiittisiä muotoja.

Tutkielman tavoitteena on tutkia näiden menetelmien teoreettista pohjaa sekä esitellä niiden toimintaa käytännössä. Menetelmien tarkkuutta ja laskentatehoa vertaillaan yksinkertaista esimerkkiä käyttämällä. Tutkielmassa sivutaan myös menetelmien käytännön sovelluksia.

2 Differentiaaliyhtälön stabiilisuus

Numeeristen menetelmien tehokkuuden tutkimisen kannalta on tärkeää ymmärtää differentiaaliyhtälöiden stabiilisuuden käsite. Yksinkertaisesti sanottuna alkuarvo tehtävä on *stabiili*, jos sen pitkäaikainen käytös ei riipu merkittävästi sen alkuarvoista [3].

Määritelmä 2.1. Yhtälön

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (1)$$

ratkaisu y kaikilla $t \geq 0$ on stabiili, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jokainen yhtälön ratkaisu \hat{y} , jolle pätee

$$|y(0) - \hat{y}(0)| \leq \delta$$

toteuttaa myös ehdon

$$|y(t) - \hat{y}(t)| \leq \epsilon$$

kaikilla $t \geq 0$. Yhtälön ratkaisu \hat{y} on *asymptoottisesti stabiili*, jos se on stabiili ja

$$|y(t) - \hat{y}(t)| \rightarrow 0,$$

kun $t \rightarrow \infty$. [1]

Asymptoottinen stabiilisuus on siis stabiilisuutta vahvempi termi: Yhtälön ratkaisu ei ole vain rajoitettu, vaan se myös suppenee tiettyä pistettä kohti.

Esimerkki 2.1. Olkoon logistinen differentiaaliyhtälö

$$y'(t) = 2y(t)(1 - y(t)), \quad (2)$$

missä $y(0) = \frac{1}{2}$. Tutkielmassa ratkaistaan tätä alkuarvottehtävää eri numeerisilla menetelmillä.

Yhtälön tarkka arvo saadaan kaavasta $y(t) = \frac{1}{1+e^{-2t}}$, joten tarkaksi arvoksi esim. hetkellä $t = 1$ saadaan $y(1) = \frac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,880797$. Tarkastellaan yhtälön tarkan ratkaisun stabiilisuutta:

$$y(t) = \frac{1}{1+e^{-2t}} \rightarrow 1, \text{ kun } t \rightarrow \infty,$$

joten differentiaaliyhtälön ratkaisu on asymptoottisesti stabiili. Numeerisessa analyysissä tavoitteena on löytää vastaavasti käyttäytyvä numeerinen ratkaisu.

Jos taas tarkastellaan toista alkuarvottehtävää $y' = ty(y - 2)$, $y(0) = 2$, ratkaisu on $y(t) = \frac{2y_0}{y_0 + (2 - y_0)e^{t^2}}$. Kun $y_0 > 2$, $y(t) \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$. Ratkaisu kasvaa rajatta, kun $y_0 > 2$, ja sillä on singulariteetti, kun nimittäjä on 0. Ongelman ratkaisu $y(0) = 2$ on siis epästabiili. [5]

3 θ -menetelmät

θ -menetelmät ovat ryhmä numeerisia menetelmiä tavallisten differentiaaliyhtälöiden sekä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden alkuarvot tehtävien ratkaisemiseen. θ -menetelmät saavat nimensä niissä käytetystä parametrilla θ (theta), joka tyypillisesti saa arvon väliltä $[0, 1]$. [2]

Integroidaan yhtälöä $y' = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$ pisteiden y_n ja y_{n+1} välillä, mistä saadaan

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{y_n}^{y_{n+1}} f(t, y(t)) dt, \quad \text{missä } n = 0, \dots, N - 1. \quad (3)$$

Soveltamalla numeerisen integroinnin sääntöä

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} y(t) dx \approx h[(1 - \theta)y(t_n) + \theta y(t_{n+1})]$$

saadaan θ -menetelmien yleinen muoto

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h[(1 - \theta)f(t_n, y(t_n)) + \theta f(y_{n+1}, y(t_{n+1}))], \quad (4)$$

kun $n = 0, \dots, N - 1$ ja $y(t_0) = y_0$. [2]

3.1 Eksplisiittinen Eulerin menetelmä

Tarkastellaan aluksi yksinkertaisinta θ -menetelmää eli *eksplisiittistä Eulerin menetelmää* (usein vain *Eulerin menetelmä*). Menetelmän ideana on ottaa pieniä askeleita derivaatan suuntaan jokaisessa pisteessä, jonka jälkeen ratkaisua arvioidaan iteratiivisesti eri ajankohdissa. Tämä on tutkielman menetelmistä epätarkin, ja se usein kärsii stabiilisuusongelmista suurilla askelpituuksilla. Eksplisiittinen Eulerin menetelmä toimii kuitenkin pohjana monille tarkemmille numeerisille menetelmille, kuten Rungen–Kuttan-menetelmille, joita käsitellään myöhemmin tässä tutkielmassa. [2]

Eulerin menetelmää käytetään mm. astrofysiikassa taivaankappaleiden käytöksen mallintamisessa sekä yksinkertaisissa mekaanisissa järjestelmissä, kuten partikkelien liikkeen mallintamisessa gravitaation vaikutuksen alaisena [7].

Menetelmän kaava saadaan, kun $\theta = 0$. Soveltamalla numeerisen integroinnin suorakaidekaavaa

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x) dx \approx hg(x_n)$$

kaavaan (3) saadaan eksplisiittinen Eulerin menetelmä:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)), \quad \text{missä } n = 0, \dots, N - 1. \quad [2] \quad (5)$$

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan esimerkin 2.1 mukainen differentiaaliyhtälö $y' = 2y(1-y) = f(t, y)$ eksplisiittisellä Eulerin menetelmällä. Saadaan

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + 2hy_n(1 - y_n).$$

Lasketaan yhtälö käyttämällä askelpituutta $h=1$:

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0,5 + (2 \cdot 0,5(1 - 0,5)) = 1$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + (2 \cdot 1(1 - 1)) = 1$$

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1 + (2 \cdot 1(1 - 1)) = 1.$$

Yhtälön oikeat ratkaisut ovat $y_1 \approx 0,880797$, $y_2 \approx 0,982014$ ja $y_3 \approx 0,997527$. Huomataan, että y :n arvo pysyy samana vaiheittain. Tämä on äärimmäinen esimerkki eksplisiittisen Eulerin menetelmän tarkkuuden rajallisuudesta suurta askelpituutta käytettäessä.

On monia tapoja parantaa Eulerin menetelmän tarkkuutta. Yksinkertaisin tapa on pienemmän askelpituuden käyttö, jonka tuloksia tarkastellaan myöhemmin tässä tutkielmassa. Kehittyneempi tapa välttää epätarkkoja tuloksia Eulerin menetelmällä on adaptiivisen askelpituuden käyttö [5]. Tällöin funktion arvoa verrataan jokaisella askeleella tarkkaan arvoon ja lasketun virheen perusteella askelpituutta säädetään seuraavaa iteraatiota varten. Jos virhe on suuri, askelpituutta lyhennetään. Jos taas virhe on pieni, askelpituutta pidennetään. Tämä on erityisen hyödyllistä tapauksissa, joissa funktion arvojen muutosnopeus vaihtelee radikaalisti.

3.2 Implisiittinen Eulerin menetelmä

Implisiittinen Eulerin menetelmä on eksplisiittistä Eulerin menetelmää monimutkaisempi, mutta soveltuu yleensä paremmin kankeiden differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen [5]. Menetelmässä seuraavan askeleen arvot lasketaan sekä nykyisen että seuraavan askelen arvon perusteella. Tämän takia menetelmää kutsutaan implisiittiseksi; se vaatii implisiittisen ratkaisun termin y_{n+1} määrittämiseen [2].

Menetelmän kaava saadaan, kun $\theta = 1$:

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h[(1 - \theta)f(t_n, y(t_n)) + \theta f(y_{n+1}, y(t_{n+1}))],$$

joten

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (6)$$

Huomataan, että seuraavan askeleen arvo y_{n+1} esiintyy molemmilla puolilla yhtälössä, joten yhtälö täytyy ratkaista implisiittisesti käyttäen nykyisen askeleen arvon y_n ja seuraavan askeleen arvon y_{n+1} suhdetta.

Esimerkki 3.2. Approksimoidaan kaavan (2) mukaista differentiaaliyhtälöä käyttäen implisiittistä Eulerin menetelmää.

Sijoittamalla $2y(1 - y)$ implisiittisen Eulerin menetelmän vektorimuotoon saadaan

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + 2hy_{n+1}(1 - y_{n+1}) \\ \iff y_{n+1} &= y_n + 2hy_{n+1} - 2h(y_{n+1})^2 \\ \iff 2hy_{n+1}^2 - y_{n+1}(2h - 1) - y_n &= 0. \end{aligned}$$

Kyseessä on siis toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla:

$$y_{n+1} = \frac{2h - 1 \pm \sqrt{(2h - 1)^2 + 8hy_n}}{4h}.$$

Lasketaan kolme iteraatiota implisiittistä kaavaa käyttäen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2 - 1 \pm \sqrt{(2 - 1)^2 + 8y_0}}{4} \approx 0,809017 \text{ (tai } y_1 \approx -0,3090) \\ y_2 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 0,80901\dots}}{4} \approx 0,933380 \text{ (tai } y_2 \approx -0,4334) \\ y_3 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 0,93338\dots}}{4} \approx 0,977455 \text{ (tai } y \approx -0,4775). \end{aligned}$$

Muistetaan yhtälön oikeat ratkaisut $y_1 \approx 0,880797$, $y_2 \approx 0,982014$ ja $y_3 \approx 0,997527$. Huomataan, että implisiittinen Eulerin menetelmä antaa huomattavasti tarkempia arvoja kuin eksplisiittinen Eulerin menetelmä samaa askelpituutta käytettäessä.

Tämän esimerkin ratkaiseminen implisiittisellä kaavalla on suhteellisen helppoa johtuen termistä $-2h(y_{n+1})^2$, koska yhtälö voidaan ratkaista toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Kaikissa tapauksissa tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, koska yhtälöstä ei välttämättä tule toisen asteen yhtälöä. Tällöin sen voi ratkaista iteratiivisesti esimerkiksi Newtonin menetelmää käyttämällä [5].

3.3 Trapetsimenetelmä

Kolmantena keskeisenä θ -menetelmänä on *trapetsimenetelmä*, joka saadaan kaavasta (4), kun $\theta = \frac{1}{2}$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (7)$$

Kaavasta havaitaan, että trapetsimenetelmä on myös implisiittinen menetelmä. θ -menetelmä on siis eksplisiittinen, kun $\theta = 0$, ja implisiittinen, kun $0 < \theta \leq 1$ [2]. Vaikka θ saa yleensä arvon $0, \frac{1}{2}$ tai 1 , voi se myös saada muita arvoja väliltä $[0, 1]$. Nämä menetelmät ovat kuitenkin tämän tutkielman aiheajauksen ulkopuolella.

Esimerkki 3.3. Approksimoidaan yhtälöä (2) kolme iteraatiota trapetsimenetelmällä:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}[2y_0(1 - y_0) + 2y_1(1 - y_1)] \\
 \iff y_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + y_1 - y_1^2 \\
 y_1^2 &= \frac{3}{4} \implies y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025. \\
 y_2 &= y_1 + \frac{1}{2}[2y_1(1 - y_1) + 2y_2(1 - y_2)] \\
 y_2 &= y_1 + y_1 - y_1 \cdot y_1 + y_2 - y_2^2 \\
 y_2^2 &= 0,98204\dots \implies y_2 = \sqrt{0,98204\dots} \approx 0,990985 \\
 y_3 &= y_2 + \frac{1}{2}[2y_2(1 - y_2) + 2y_3(1 - y_3)] \\
 y_3 &= y_2 + y_2 - y_2 \cdot y_2 + y_3 - y_3^2 \\
 y_3^2 &= 0,9999\dots \implies y_3 = \sqrt{0,9999\dots} \approx 0,999959.
 \end{aligned}$$

Yhtälön oikeat ratkaisut ovat $y_1 \approx 0,880797$, $y_2 \approx 0,982014$ ja $y_3 \approx 0,997527$. Huomataan, että trapetsimenetelmä on tässä esimerkissä tarkin θ -menetelmistä. On kuitenkin tärkeä painottaa, että kyseessä on vain yksi esimerkki tietynlaista differentiaaliyhtälöä ja suurta askelpituutta käyttämällä. Vastaus tarkimman numeerisen menetelmän kysymykseen riippuu sovellettavasta differentiaaliyhtälöstä ja sen ominaisuuksista.

4 Rungen–Kuttan menetelmät

Eulerin menetelmät ovat tarkkuudeltaan yksiasteisia ja niissä funktiota f arvioidaan vain kerran pisteessä $(t_n, y(t_n))$. *Rungen–Kuttan menetelmillä* pyritään saamaan tarkempia tuloksia arvioimalla funktion f arvoja pisteiden $(t_n, y(t_n))$ ja $(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$ välillä [2]. Tämä tekee siis Rungen–Kuttan menetelmistä monimutkaisemman ja samalla laskennallisesti kalliimman.

Rungen–Kuttan menetelmät soveltuvat erityisesti tekniikan alan ongelmiin ja virtauksien simulointiin esim. aerodynamiikassa ja hydrondynamiikassa. Hyvä esimerkki nestevirtauksen mallintamisesta löytyy lähteestä [6].

4.1 Toisen asteen Rungen–Kuttan menetelmät

Yleisimmät Rungen–Kuttan menetelmien muodot ovat toisen asteen ja neljännen asteen Rungen–Kuttan menetelmäryhmät. Toisen asteen Rungen–Kuttan menetel-

miä on lukuisia, mutta tässä tutkielmassa käsitellään *Heunin menetelmää*. Tarkoituksena on konstruoida toisen asteen menetelmä, joten aloitetaan Taylorin laajennuksella

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t).$$

Sijoitetaan yhtälön (1) oikea puoli ja derivoitu oikea puoli yhtälöön:

$$\begin{aligned} y''(t) &= f_t(t, y) + f_y(t, y)y'(t) \\ &= f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y). \end{aligned}$$

Nyt Taylorin laajennuksesta tulee

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hf(t, y) + \frac{h^2}{2}[f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)] \\ &= y(t) + \frac{h}{2}f(t, y) + \frac{h}{2}[f(t, y) + hf_t(t, y) + hf_y(t, y)f(t, y)]. \end{aligned}$$

Koska

$$f(t+h, y+k) = f(t, y) + hf_t(t, y) + f_y(t, y)k + \dots,$$

voidaan yhtälö (1) esittää muodossa

$$f(t+h, y+hf(t, y)) = f(t, y) + hf_t(t, y) + hf_y(t, y)f(t, y).$$

Siis saadaan

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}f(t, y) + \frac{h}{2}f(t+h, y+hf(t, y)),$$

mikä voidaan esittää numeerisena menetelmänä

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2),$$

missä

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + h, y_n + hK_1). \quad [4] \end{aligned}$$

Esimerkki 4.1. Lasketaan kaavaa (2) kolme iteraatiota tällä kaavalla. Saadaan

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0 + 1 = 1 \\ K_1 &= hf(t_n, y_n) = 2y(0)(1 - y(0)) = 2 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 0,5 \\ K_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y(0) + \frac{K_1}{2}\right) = f\left(0,5; 0,5 + \frac{0,5}{2}\right) = f(0,5; 0,75) \\ &= 2 \cdot 0,75(1 - 0,75) = 0,375 \\ y_1 &= y(0) + K_2 = 0,5 + 0,375 = 0,875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2 &= t_1 + h = 2 \\
K_1 &= h(t_1, y_1) = (2 \cdot y_1 \cdot (1 - y_1)) = 0,21875\dots \\
K_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1}{2}\right) = f\left(1, 5; 0,875 + \frac{0,21875\dots}{2}\right) \\
&= f(1; 5; 0,984375\dots) = 2 \cdot 0,984375\dots \cdot (1 - 0,984375\dots) = 0,03076\dots \\
y_2 &= y_1 + K_2 = 0,875 + 0,03076\dots \approx 0,905762.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 &= t_2 + h = 3 \\
K_1 &= hf(t_2, y_2) = 2y_2(1 - y_2) = 2 \cdot 0,90576\dots \cdot (1 - 0,90576\dots) = 0,170714887\dots \\
K_2 &= hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1}{2}\right) = f\left(2, 5; 0,90576\dots + \frac{0,17071\dots}{2}\right) \\
&= 2 \cdot 0,99111\dots(1 - 0,99111\dots) = 0,01760\dots \\
y_3 &= y_2 + K_2 = 0,90576\dots + 0,01760\dots \approx 0,923366.
\end{aligned}$$

Kun tuloksia verrataan oikeisiin arvoihin $y_1 \approx 0,880797$, $y_2 \approx 0,982014$ ja $y_3 \approx 0,997527$, havaitaan, että Heunin menetelmä ei suurella askelpituudella suoriudu tästä tehtävästä hyvin. Yhtälön (2) kankeasta luonteesta johtuen implisiittiset θ -menetelmät antavat tarkempia tuloksia askelpituudella $h=1$. Tämä saattaa kuitenkin muuttua, kun askelpituutta pienennetään.

4.2 Neljännen asteen Runge–Kuttan menetelmät

Edellisen aliluvun tapaisella konstruoinnilla saadaan myös ryhmä neljännen asteen numeerisia menetelmiä. Tässä tutkielmassa käsitellään erästä hyvin paljon käytettyä neljännen asteen Runge–Kuttan-menetelmää:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6}\right],$$

missä

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, y_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 &= f(t_n + h, y_n + hK_3).
\end{aligned}$$

Termien K_1 ja K_2 lisäksi menetelmä siis tarkentaa arviota askeleiden välillä lisäämällä approksimointiin termit K_3 ja K_4 . Tämä tekee menetelmästä selvästi myös laskennallisesti kalliimman.

Esimerkki 4.2. Havainnollistetaan menetelmän kulkua laskemalla kaavan (2) mukaista differentiaaliyhtälöä kolme iteraatiota.

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_0 + h = 0 + 1 = 1 \\
 K_1 &= 0,5 \\
 K_2 &= 0,375 \\
 K_3 &= hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hK_2}{2}\right) = f\left(0 + \frac{1}{2}; 0,5 + \frac{0,375}{2}\right) = f(0,5; 0,6875) \\
 &= 0,4296875 \\
 K_4 &= hf(t_0 + h, y_0 + K_3) = f(0 + 1; 0,5 + 0,4296875) = f(1; 0,9296875) \\
 &= 0,130737\dots \\
 y_1 &= y_0 + \left(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6}\right) = 0,5 + \left(\frac{0,5}{6} + \frac{0,375}{3} + \frac{0,4296875}{3} + \frac{0,130737\dots}{6}\right) \\
 &\approx 0,873352.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= t_1 + h = 1 + 1 = 2 \\
 K_1 &= h(t_1, y_1) = f(1, 0,87335\dots) = 0,2212164\dots \\
 K_2 &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + K_1\right) = f\left(1 + 0,5, 0,873352\dots + \frac{0,2212164\dots}{2}\right) \\
 &= f(1,5; 0,983960\dots) = 0,031564\dots \\
 K_3 &= hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + K_2\right) = f\left(1 + 0,5, 0,873352\dots + \frac{0,031564\dots}{2}\right) \\
 &= f(1,5; 0,889134\dots) = 0,197148\dots \\
 K_4 &= hf(t_1 + h, y_1 + K_3) = f\left(1 + 1, 0,873352\dots + \frac{0,197148\dots}{2}\right) \\
 &= f(2, 1,070500\dots) = 0,150942\dots \\
 y_2 &= y_1 + \left(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6}\right) = 0,873352\dots + \left(\frac{0,2212164\dots}{6} + \frac{0,031564\dots}{3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{0,197148\dots}{3} + \frac{0,150942\dots}{6}\right) \approx 0,961302.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_3 &= t_2 + h = 2 + 1 = 3 \\
K_1 &= hf(t_2, y_2) = f(2, 0,961302\dots) = 0,074400\dots \\
K_2 &= hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hK_1}{2}\right) = f\left(2 + 0,5; 0,961302\dots + \frac{0,074400\dots}{2}\right) \\
&= f(2,5; 0,998502\dots) = 0,002990\dots \\
K_3 &= hf\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hK_2}{2}\right) = 0,1821\dots = f\left(2 + 0,5; 0,961302\dots + \frac{0,002990\dots}{2}\right) \\
&= f(2,5; 0,962797\dots) = 0,071636\dots \\
K_4 &= hf(t_2 + h, y_2 + hK_3) = f(2 + 1, 0,961302\dots + 0,071636\dots) \\
&= f(3, 1,032939\dots) = 0,068048\dots \\
y_3 &= y_2 + \left(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6}\right) = \left(\frac{0,074400\dots}{6} + \frac{0,002990\dots}{3}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{0,071636\dots}{3} + \frac{0,068048\dots}{6}\right) \approx 0,987237.
\end{aligned}$$

Muistetaan edelleen oikeat arvot $y_1 \approx 0,880797$, $y_2 \approx 0,982014$ ja $y_3 \approx 0,997527$. Neljännen asteen Runge–Kutta menetelmät ovat tämän tutkielman tarkin joukko menetelmiä, ja niitä yleensä pidetään riittävän tarkkoina käytännön laskentaan [1]. Laskemalla esimerkiksi kolme iteraatiota voidaan myös todeta, että menetelmä on laskennallisesti paljon monimutkaisempi verrattuna Eulerin menetelmään, jota tutkittiin ensimmäisenä.

Tämä ei kuitenkaan ole Runge–Kutta menetelmistä tarkin; on olemassa korkeamman asteen menetelmiä ja adaptiivista askelpituutta hyödyntäviä menetelmiä, kuten Dormand–Princen menetelmä. Tämän lisäksi on myös implisiittisiä Runge–Kutta menetelmiä, jotka soveltuvat hyvin kankeisiin tehtäviin. [5]

5 Numeeristen menetelmien tulokset

Tarkastellaan numeeristen menetelmien tuloksia asympotoottisesti stabiilille differentiaaliyhtälölle (2), jossa on alkuehto $y(0) = \frac{1}{2}$. Tutkielmaan on valittu tarkasteltaviksi askelpituuksiksi 1, 0,1 ja 0,01.

t	Tarkka	Eks. Euler	Impl. Euler	Trapetsi	2. asteen RK	4. asteen RK
1	0,880797	1,0	0,809017	0,866025	0,875000	0,873352
2	0,982014	1,0	0,933380	0,990985	0,905762	0,961302
3	0,997527	1,0	0,977455	0,999959	0,923366	0,987237
4	0,999665	1,0	0,992447	1,000000	0,935042	0,995751
5	0,999955	1,0	0,997478	1,000000	0,943446	0,998584
6	0,999994	1,0	0,999159	1,000000	0,949822	0,999528
7	0,999999	1,0	0,999720	1,000000	0,954845	0,999843
8	1,000000	1,0	0,999907	1,000000	0,958915	0,999948
9	1,000000	1,0	0,999969	1,000000	0,962285	0,999983
10	1,000000	1,0	0,999990	1,000000	0,965126	0,999994

Taulukko 1: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle

$$y' = 2y(1 - y) \text{ alkuehdolla } y(0) = \frac{1}{2} \text{ ja askelpituudella } h=1$$

t	Tarkka	Eks. Euler	Impl. Euler	Trapetsi	2. asteen RK	4. asteen RK
0,1	0,549834	0,550000	0,549510	0,549753	0,549875	0,549834
0,2	0,598688	0,559500	0,597604	0,598534	0,598761	0,598688
0,3	0,645656	0,647520	0,643487	0,645448	0,645746	0,645656
0,4	0,689975	0,693168	0,686528	0,689732	0,690059	0,689974
0,5	0,731059	0,735705	0,726287	0,730805	0,731117	0,731058
0,6	0,768525	0,774593	0,762505	0,768281	0,768540	0,768524
0,7	0,802183	0,809513	0,795090	0,801965	0,802143	0,802183
0,8	0,832018	0,840353	0,824084	0,831835	0,831916	0,832018
0,9	0,858149	0,867185	0,849635	0,858007	0,857987	0,858148
1,0	0,880797	0,890220	0,871963	0,880697	0,880582	0,880796

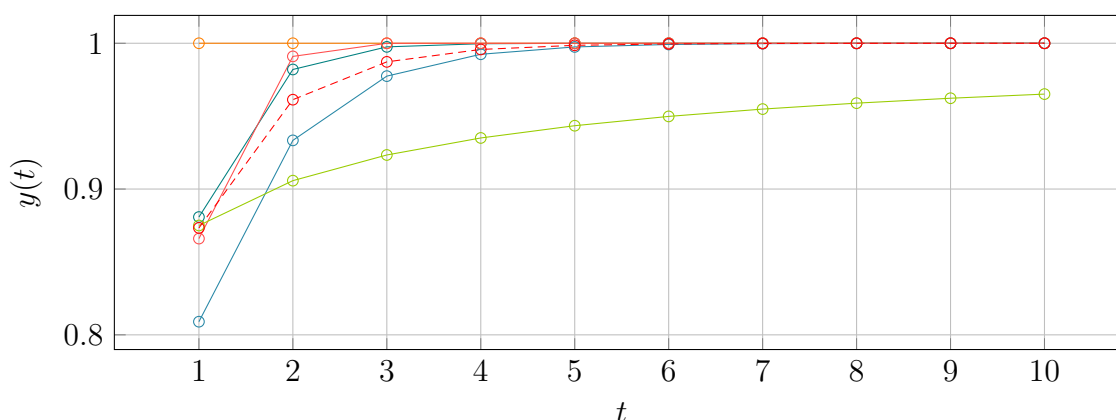
Taulukko 2: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle

$$y' = 2y(1 - y) \text{ alkuehdolla } y(0) = \frac{1}{2} \text{ ja askelpituudella } h=0,1$$

t	Tarkka	Eks. Euler	Impl. Euler	Trapetsi	2. asteen RK	4. asteen RK
0,01	0,504100	0,505000	0,505000	0,504100	0,505000	0,505000
0,02	0,509999	0,510000	0,509998	0,509999	0,509999	0,509999
0,03	0,514996	0,514998	0,514993	0,514995	0,514996	0,514996
0,04	0,519989	0,519993	0,519985	0,519989	0,519989	0,519989
0,05	0,524979	0,524985	0,524973	0,524979	0,524979	0,524979
0,06	0,529964	0,529973	0,529955	0,529964	0,529964	0,529964
0,07	0,534943	0,534955	0,534930	0,534942	0,534943	0,534943
0,08	0,539915	0,539930	0,539898	0,539914	0,539915	0,539915
0,09	0,544879	0,544898	0,544858	0,544878	0,544879	0,544879
0,10	0,549834	0,549858	0,549808	0,549833	0,549834	0,549834

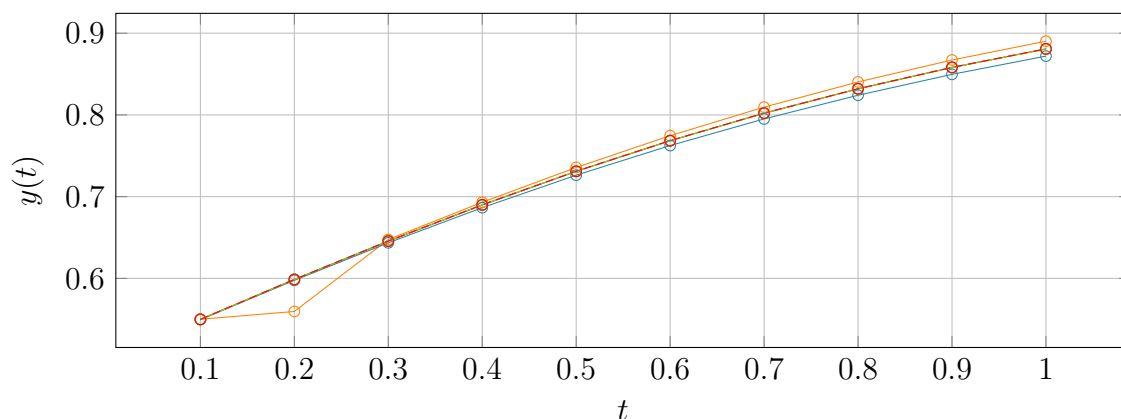
Taulukko 3: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle $y' = 2y(1 - y)$ alkuehdolla $y(0) = \frac{1}{2}$ ja askelpituudella $h=0,01$

—○— Tarkka —○— Eks. Euler —○— Impl. Euler —○— Trapetsi —○— 2. asteen RK —○— 4. asteen RK



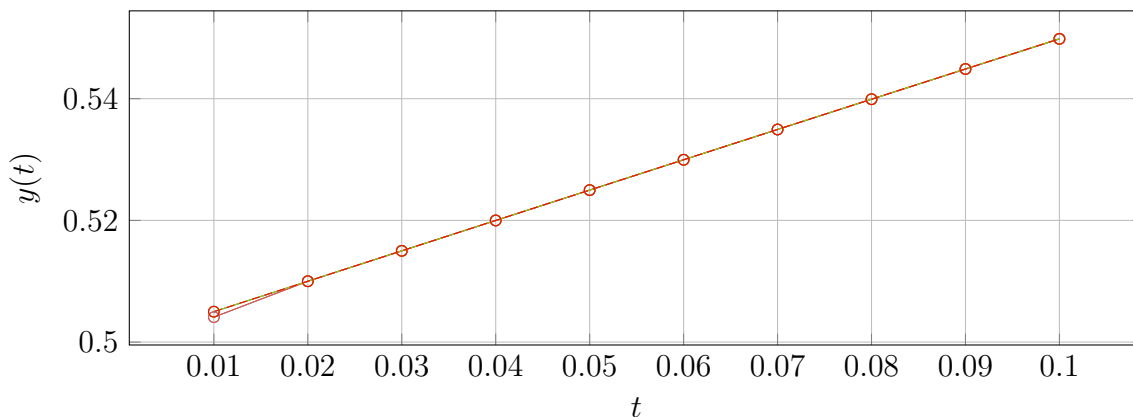
Kuva 1: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle $y' = 2y(1 - y)$ alkuehdolla $y(0) = \frac{1}{2}$ ja askelpituudella $h=1$

Huomataan, että askelpituudella $h=1$ eksplisiittisen Eulerin menetelmän ratkaisu pysyy arvossa 1. Neljännen asteen Runge–Kuttan menetelmä on suurella askelpituudella huomattavasti Eulerin menetelmiä tarkempi tässä esimerkissä. Toisaalta voidaan myös todeta, että toisen asteen Runge–Kuttan menetelmällä on myös vaikeuksia tarkkojen vastausten tuottamisessa käytetyllä askelpituudella.



Kuva 2: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle $y' = 2y(1 - y)$ alkuehdolla $y(0) = \frac{1}{2}$ ja askelpituudella $h=0,1$

Pienemmällä askelpituudella tarkkuuserot menetelmien välillä pienenevät. Voidaan myös huomata, että implisiittiset θ -menetelmät ovat käyttökelpoisia menetelmiä kankeiden differentiaaliyhtälöiden approksimointiin sopivaa askelpitua käyttäessä.



Kuva 3: Numeeristen menetelmien tulokset differentiaaliyhtälölle $y' = 2y(1 - y)$ alkuehdolla $y(0) = \frac{1}{2}$ ja askelpituudella $h=0,01$

Askelpituudella $h=0,01$ menetelmien tulosten erot ovat kuuden desimaalin tarkkuudella lähes huomaamattomia. Tarpeeksi pientä askelpitua käyttäessä myös eksplisiittinen Eulerin menetelmä tarjoaa riittävän tarkkoja ratkaisuja joihinkin käyttötarkoituksiin. Yleisellä tasolla Runge–Kuttan menetelmät ovat kuitenkin tarkimmat menetelmät tämän esimerkin laskemisessa.

6 Yhteenveto

Numeeriset menetelmät ovat välttämättömiä työkaluja differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Kankeat differentiaaliyhtälöt ovat hyvin yleisiä esimerkiksi kemian, elektroniikan ja matemaattisen biologian aloilla, ja tällaisille yhtälöille analyttisten ratkaisujen löytäminen on usein hyvin vaikeaa [5]. Tällöin sopivan numeerisen menetelmän ja askelpituuden valitseminen on erityisen tärkeää.

Rungen–Kuttan menetelmät ovat useimmissa tapauksissa tarkempia kuin muut tässä tutkielmassa esitetyt menetelmät. On kuitenkin tapauksia, joissa muun numeerisen menetelmän valinta on suotuisaa. Implisiittinen Eulerin menetelmä ja trapsimenetelmä soveltuvat hyvin kankeisiin differentiaaliyhtälöihin. Jos taas kyseessä on lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka käyttäytyy odotetulla tavalla, eksplisiittinen Eulerin menetelmä voi tuottaa riittävän tarkan ratkaisun. Myös laskennallisen tehokkuuden kannalta Eulerin menetelmä on useimmiten parempi vaihtoehto. Toisaalta joissain tapauksissa tehtävälle ei vaadita tarkkaa ratkaisua, jolloin kyseisen menetelmän käyttö on myös perusteltua.

Kaikki tässä tutkielmassa esitellyistä menetelmistä ovat numeerisen analyysin alalla olennaisia. Vaikka numeerisilla menetelmillä on aina vahvuuksia ja heikkouksia, kaikilla niillä on käyttötarkoituksensa. Lopulta numeerisen menetelmän valintaan vaikuttavat monet asiat, kuten ratkaisun stabiilisuus, käytettävä askelpituus ja tarkkuusvaatimukset.

Lähteet

- [1] Parvinen, K.: *Numeerinen analyysi*. Turun yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2019.
- [2] Süli E.: *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Mathematical Institute, University of Oxford, 2022.
- [3] *18.03SC Differential Equations.*, MIT OpenCourseWare, 2011. <https://ocw.mit.edu/courses/18-03sc-differential-equations-fall-2011/> (haettu 31.3.2024).
- [4] Fasshauer G., Xiofan L.: *MATH 478 – Numerical Methods for Differential Equations*. University of Illinois, 2006.
- [5] Haataja J., Heikonen J., Leino Y., Rahola J., Ruokolainen J., Savolainen V.: *Numeeriset menetelmät käytännössä*. Tieteen tietotekniikan keskus CSC, Helsinki, 2002.

- [6] Kumar A., Unny T. E.: *Application of Runge-Kutta method for the solution of non-linear partial differential equations*. University of Waterloo, Ontario, 1976.
- [7] Smith. W.: *Euler's Method – Definition, Properties, Applications, and Examples*. <https://www.storyofmathematics.com/eulers-method/> (luettu 31.3.2024).