Gammafunktiota etsimässä

LuK Omar Mayani

LuK-tutkielma
Kesäkuu 2024

Tarkastajat:
Prof. Jyrki Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Omar Mayani: Gammafunktiota etsimässä
LuK-tutkielma, 18 s., 3 liites.
Matematiikka
Kesäkuu 2024

Gammafunktiota sovelletaan useissa matematiikan osa-aloissa. Esimerkiksi Turun yliopistossa funktiota käytetään kursseissa analyyttinen lukuteoria ja todennäköisyyslaskennan jatkokurssi. Tässä tutkielmassa perehdytään funktioon syvällisemmin.

Tutkielman tarkoitus on luoda luontainen polku gammafunktion konstruoinnille ja osoittaa joitain funktion käytetyimpiä ominaisuuksia. Tutkielmassa esiintyvän gammafunktion määritelmän löysi saksalaismatemaatikko Karl Weierstrass. Luvussa kolme esitetään määritelmään läheisesti yhdistetty Weierstrassin tekijähajotelmalause, joka on algebran peruslauseen yleistys ja merkittävä tulos itsessään. Viimeisessä luvussa todistetaan Stirlingin arvio ja tämän avulla näytetään, että Weierstrassin määritelmä gammafunktiolle on yhdenpitävä yleisemmän Leonhard Eulerin kehittämän määritelmän kanssa.

Asiasanat: funktioteoria, gammafunktio, kanoniset tulot, stirlingin arvio

MERKINTÄTAVOISTA

Tässä tutkielmassa käytetään seuraavia merkintöjä:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	luonnollisten lukujen joukko
$n \in \mathbb{N}$	luonnollinen luku
$\mathbb{Z}$	kokonaislukujen joukko
$\mathbb{R}$	reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	kompleksilukujen joukko
$z = x + iy$	kompleksinen muuttuja, missä
$z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$ ja $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$	
$\zeta = \xi + i\eta$	kompleksinen muuttuja, missä
$\zeta \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} \zeta = \xi \in \mathbb{R}$ ja $\operatorname{Im} \zeta = \eta \in \mathbb{R}$	
$\arg z$	kompleksiluvun z argumentti
$\operatorname{Arg} z$	kompleksiluvun z argumentin päähaara
$\log z = \ln \lvert z \rvert + i \arg z$	kompleksinen logaritmi
$\operatorname{Log} z = \ln \lvert z \rvert + i \operatorname{Arg} z$	kompleksisen logaritmin päähaara
$f(z) \ll g(z)$	f on asymptoottisesti pienempi tai yhtäsuuri kuin g

Olkoon $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kompleksinen lukujono siis $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sanotaan, että $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, kun $\lim_{n\to\infty} \lvert a_n \rvert = \infty$.

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielman keskeisin tavoite on luoda luontaiselta tuntuva polku gammafunktion konstruktiolle. Gammafunktio on laajasti tunnettu ja käytetty funktio, jolla on sovelluksia statistiikassa, fysiikassa ja erityisesti analyyttisessa lukuteoriassa. Alkulukujen jakaumaan yhdistetyn Riemannin zeeta-funktion perustavanlaatuinen ominaisuus on sen gammafunktiolla saavutettu analyyttinen laajennus.

Gammafunktion tunnetuin ominaisuus on, että positiivisella kokonaislukusyötteellä funktio tuottaa saman arvon kuin kertomafunktio syötteellä, joka on tarkalleen yhden suurempi. Se voidaan siis nähdä kertomafunktion laajennuksena kompleksiluvuille. Tutkielmassa esitetty gammafunktion konstruointi alkaa yleisillä harkinnoilla funktioista, joiden nollakohdat ovat periodisesti levittäytynyt kompleksitasolle, ja jatkuu tavoitteella löytää funktio, joka jakaa kertomafunktion kanssa saman funktionaaliyhtälön.

Tutkielman ensimmäiset kaksi lukua esittävät tapoja tutkia äärettömiä tuloja ja tavan määritellä funktio äärettömänä tulona. Havaitaan että mielivaltaiselle ääretöntä lähestyvälle kompleksilukujonolle on olemassa tulo, joka saavuttaa arvon nolla tarkalleen näissä lukujonon luvuissa. Luvussa kolme valitaan mukava periodinen lukujono ja tutkitaan tämän tulosta muodostuvaa funktiota. Tavoiteltua funktionaaliyhtälöä jahdatessa päädytään tutkielman nimifunktioon.

Viimeisessä kappaleessa esitetään todistus skotlantilaismatemaatikon James Stirlingin löytämästä arviosta gammafunktiolle. Arvion suhteellinen virhe lähestyy nollaa syötteen kasvaessa suureksi, joka tekee siitä merkittävän tuloksen. Lisäksi Stirlingin arviota soveltamalla osoitetaan, että tutkielmassa esitetty määritelmä gammafunktiolle on yhdenpitävä yleisemmin esiintyvän Eulerin määritelmän kanssa, jossa funktio on kirjoitettu epäolellisena integraalina. Tutkielman pääasiallisena lähteenä on käytetty Lars Ahlforsin kirjaa *Complex Analysis 3rd Edition* [1].

2 Äärettömät tulot

Tässä luvussa tutustutaan määritellään, mitä tarkoitetaan äärellisen tulon suppenemisella ja tämän raja-arvolla. Halutaan pystyä selvittämään, koska ja mihin nämä suppenevat. Kysymykset ovat yllättävän helppoja monelle opiskelijalle, sillä ne saadaan redusoitua vastaaviin tuttuihin sarjaongelmiin.

Ääretön kompleksinen tulo $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ lasketaan ottamalla raja-arvo osatuloista $P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n$ ja tämän sanotaan suppenevan, kun raja-arvo on äärellinen nollasta eroava luku. Nollatulot on ajateltava hajaantuvan, jotta voidaan rakentaa hyvä teoria äärettömille tuloille. Jos nollatulot luettaisiin suppeneviksi, niin suppenevia tuloja koskevien lauseiden pitäisi puhua myös esimerkiksi tulosta $\prod_{n=0}^{\infty} n$. Tämä tulo käyttäytyy kuitenkin niin epämukavasti, että mitään vahvaa lausetta ei voida muodostaa.

Tarkoituksena on kuitenkin pystyä kirjoittamaan nollan saavuttavia funktioita tulomuodossa, joten sanotaan että tulo P suppenee, kun siitä poistamalla äärellisen monta nollatekijää muodostaa tulon P', jonka raja-arvo on äärellinen nollasta eroava luku. Seuraavan lauseen myötä tuloja harvoin evaluoidaan suoraan.

Lause 2.1.

$$\textit{Tulo } \prod_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ suppenee jos ja vain jos sarja } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} a_n \textit{ suppenee}$$

Lisäksi, kun sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} a_n$ *suppenee kohti lukua* S*, niin tulo* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee kohti lukua* e^S*. Samoin kun* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *suppenee kohti lukua* P*, niin* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} a_n$ *suppenee kohti lukua* $\operatorname{Log} P - k2\pi i$*, missä* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Todistus. " $\Longleftarrow$ " Merkitään $S_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} a_n$ ja $P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n$ ja oletetaan, että $S_N \to S$. Nähdään heti

$$e^{S_N} = \prod_{n=1}^{N} a_n = P_N,$$

siis

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty} e^{S_N} = e^S.$$

" $\Longrightarrow$ " Merkitään $P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n$ ja oletetaan, että $P_N \to P$, jolloin $\frac{P_N}{P} \to 1$ ja $\operatorname{Log} \frac{P_N}{P} \to 0$. On oltava hieman varovainen, koska yleensä $\sum \operatorname{Log} a_n \neq \operatorname{Log} \prod a_n$. On kuitenkin olemassa sellainen $k(N) \in \mathbb{N}$, että

$$\operatorname{Log} \frac{P_N}{P} = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} a_n - \operatorname{Log} P + k(N)2\pi i \tag{1}$$

merkitään $S_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} a_n$ ja saadaan

$$\operatorname{Log} \frac{P_{N+1}}{P} - \operatorname{Log} \frac{P_N}{P} = S_{N+1} - S_N + i2\pi[k(N+1) - k(N)]$$

$$\Longrightarrow i2\pi[k(N+1) - k(N)] = \operatorname{Log} \frac{P_{N+1}}{P} - \operatorname{Log} \frac{P_N}{P} - \operatorname{Log} a_{N+1}$$

$$\Longrightarrow |2\pi[k(N+1) - k(N)]| \leq |\operatorname{Log} \frac{P_{N+1}}{P}| + |\operatorname{Log} \frac{P_N}{P}| + |\operatorname{Log} a_{N+1}| \to 0.$$

Siis kun N on tarpeeksi suuri, $k(N) = k$ on vakio, joten (1) voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\operatorname{Log} \frac{P_N}{P} = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} a_n - \operatorname{Log} P + k2\pi i$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} a_n \to \operatorname{Log} P - k2\pi i$$

siis sarja suppenee ja kohti odotettua lukua. □

Yllä oli helpompaa merkitä tuloa $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$, mutta usein ajatellaan tuloa mielummin muodossa $\prod_{m=1}^{\infty} 1 + a_m$, missä $a_m = a_n - 1$. Tulon suppeneminen vaatii, että $a_n \to 1$, jolloin $a_m \to 0$. Seuraavat lauseet motivoivat tämän muutoksen.

Lemma 2.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+a_n) \downarrow \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$$

Todistus. Väite seuraa vertailutestistä ja logaritmin Taylorin kehitelmästä. Olettaen että toinen sarjoista suppenee, niin $a_n \to 0$, joten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

□

Seuraus 2.3. *Tulon itseinen suppeneminen on ekvivalenttia vastaavan sarjan itseisen suppenemisen kanssa, siis*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|) \downarrow \iff \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+|a_n|) \downarrow \iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$$

Todistus. Lause (2.1) ja lemma (2.2) □

Seuraus 2.4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log} a_n| \downarrow \implies \prod_{n=1}^{\infty} |a_n| \downarrow$$

Todistus. Väite seuraa suoraan epäyhtälöstä $\operatorname{Log}|a_n| \leq |\operatorname{Log} a_n|$. □

3 Kanoniset tulot

Lukuteoriassa on usein helpompaa harkita lukua alkulukutekijöidensä tulona ja analogisesti funktioteoriassa on hedelmällistä pohtia funktioita nollakohtiensa tulona. Tunnetusti polynomit voidaan kirjoittaa nollakohtiensa tulona $p(z) = c(z - a_1)(z-a_2)...(z-a_n)$, missä termit $(z-a_m)$ voidaan nähdä toimivan samassa roolissa kuin alkuluvut kokonaisluvun alkulukuhajotelmassa. Tässä luvussa laajennetaan idea kokonaisille funktiolle.

Kun halutaan harkita funktiota, jolla on ääretön määrä nollia, joudutaan huolehtimaan tulon suppenemisesta. Tätä varten tulon termeistä jaetaan tekijät $-a_m$ pois, jolloin termit saavat muodon $(1 - z/a_m)$, ja usein nämä joudutaan vielä kertomaan sopivalla funktiolla suppenemisen saavuttamiseksi. Polynomien tulomuodossa esiintyvä vakio c pitää myös korvata jollakin kokonaisella funktiolla, mutta tämä voidaan rajata olevan aina itseisarvoltaan nollaa aidosti suurempi, joten nollakohdat saadaan kuitenkin eristettyä omaan tuloonsa.

Sanotaan että funktio f on kokonainen, jos se on holomorfinen koko kompleksitasossa. Esimerkkejä kokonaisista funktioista ovat polynomit, e^z, $\sin z$ ja kahden kokonaisen funktion kompositio.

Lause 3.1. *Jos g on kokonainen ja $f(z) = e^{g(z)}$, niin f on kokonainen ja aina nollasta eroava. Vastaavasti jos f on kokonainen ja aina nollasta eroava, niin $f(z) = e^{g(z)}$, missä g on kokonainen*

Todistus. Lauseen ensimmäinen implikaatio seuraa suoraan siitä, että kahden kokonaisen funktion kompositio on kokonainen ja $e^z \neq 0$ kaikille z. Jäljelle jää todistaa, että jos f on kokonainen ja aina nollasta eroava, niin $f(z) = e^{g(z)}$, missä g on kokonainen.

Olkoon f nollasta aina eroava kokonainen funktio. Nyt, $\frac{f'}{f} = \frac{d}{dz} \log f$ on kokonainen. Merkitään tätä nimellä g. Huomataan,

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{-g(z)}\right) = f'(z)e^{-g(z)} - g'(z)e^{-g(z)}f(z) = 0$$

$$\implies f(z) = Ce^{g(z)}$$

siirretään vakio funktion g sisälle, niin saadaan haluttu tulos. □

Voidaan laajentaa ideaa yleisemmälle funktiolle. Olkoon f kokonainen funktio, jolla on äärellinen määrä nollia: m nollaa origossa ja N nollaa origon ulkopuolella $a_1, a_2, ..., a_N$. Yksinkertaisin nämä nollakohdat omaava funktio näyttää seuraavalta

$$z^m \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Kerrotaan tulo aina nollasta eroavalla kokonaisella funktiolla $e^{g(z)}$, niin saadaan kuvailtua yleinen funktio samoilla nollilla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

Kun yritetään yleistää ajatus funktiolle f, jolla on ääretön määrä nollia, joudutaan huolestumaan tulon $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})$ suppenemisesta. Tiedetään seurauksen (2.3) nojalla, että tulo suppenee itseisesti jos ja vain jos summa $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{z}{a_n}|$ suppenee. Kun tämä pätee, suppeneminen on jopa tasaista jokaisessa suljetussa kiekossa $|z| \leq R$. Yleisessä tapauksessa tulo ei kuitenkaan suppene, joten on lisättävä aputekijöitä, jotka saavat suppenemisen tapahtumaan.

Lause 3.2. *Olkoon $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mielivaltainen jono kompleksilukuja, jolle $a_n \neq 0$ $\forall n$ ja $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Tällöin on olemassa sellaiset polynomit $p_n(z)$, että*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{p_n(z)} \tag{2}$$

suppenee itseisesti missä tahansa suljetussa kiekossa $|z| \leq R$.

Todistus. Lauseen (2.1) nojalla tulo (2) suppenee yhdessä sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(z)$ kanssa, missä

$$r_n(z) = \mathrm{Log}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + p_n(z).$$

Kiinnitetään säde R ja huomataan: koska $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, niin $|a_n| \leq R$ vain äärellisen monelle alkiolle a_n. Voidaan siis suppenemista häiritsemättä harkita vain sarjan termejä joilla $|a_n| > R$, jolloin $|\frac{z}{a_n}| < 1$ ja logaritmi voidaan kehittää Taylorin sarjaksi

$$\mathrm{Log}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k.$$

Idea on valita $p_n(z)$ logaritmisarjan osasummaksi, jolloin $r_n(z)$ on suppenevan sarjan loppuosa, ja täten pieni. Valitaan

$$p_n(z) = \sum_{k=1}^{N_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k,$$

ja tutkitaan jäännöstermiä

$$r_n(z) = -\sum_{k=N_n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k.$$

Käyttämällä arviota $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{N_n+1}$ ja geometrisen sarjan summakaavaa $\sum_{n=m}^{\infty} q^n = q^m/(1-q)$ saadaan termeille $r_n(z)$ yläraja

$$\begin{aligned} |r_n(z)| &\leq \frac{1}{N_n+1} \sum_{k=N_n+1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^k \\ &= \frac{1}{N_n+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{N_n+1} \left(1 - \frac{R}{|a_n|}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

valitsemalla $N_n = n$ saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |r_n(z)| \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{n+1} \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_1|}\right)^{n+1}$$

missä $c = \max_n |(1 - R/|a_n|)^{-1}|$ ja oikeanpuoleinen sarja on suppeneva geometrinen sarja. Lemman (2) nojalla tulo suppenee itseisesti. □

Suorana seurauksena saadaan

Lause 3.3 (Weierstrassin tekijähajotelmalause)**.** *Mielivaltaiselle ääretöntä lähestyvälle lukujonolle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on olemassa kokonainen funktio f siten että $f(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Lisäksi jokainen kokonainen funktio, jolla on tarkalleen nämä nollat ja kertalukua m oleva nolla origossa voidaan kirjoittaa muodossa*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{N_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{N_n}}, \tag{4}$$

missä g on kokonainen, $a_n \neq 0$ ja N_n joitain kokonaislukuja.

Seuraus 3.4. *Jos F on meromorfinen koko kompleksitasossa, niin se voidaan kirjoittaa kahden kokonaisen funktion f ja g osamääränä $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$.*

Todistus. Olkoon F meromorfinen. Tällöin on lauseen (3.3) nojalla on olemassa kokonainen funktio f, jonka nollat ovat funktion F navat, jolloin $F(z)f(z) = g(z)$ on kokonainen. Siis $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ on kahden kokonaisen funktion osamäärä. □

Seuraavaksi tarkastellaan mukavaa tapausta, jossa tulo suppenee jo valinnalla $N_n = N$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin tulo voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{N}\left(\frac{z}{a_n}\right)^N}, \tag{5}$$

missä N ei enää riipu indeksistä n. Tapaus vastaa sitä, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N+1} \left(\frac{R}{|a_n|}\right)^{N+1}$$

suppenee. Tai yhtäpitävästi sitä, että $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{N+1}}$ suppenee. Jos N on pienin kokonaisluku jolla tämä toteutuu, sanotaan, että ääretön tulo yhtälössä (5) on lukujonoon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ yhdistetty kanoninen tulo ja N tämän tulon *genus* suomenkielisen termin puuttuessa.

Jos vielä $g(z)$ saadaan redusoitua astelukua q olevaksi polynomiksi, sanotaan funktiolla f olevan äärellinen genus ja tämän arvon olevan $\max\{q, N\}$. Eli funktio, jolla on genus $= 1$ on joko muotoa

$$Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$$

tai

$$Cz^m e^{\alpha z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Esimerkki 3.5. Koetetaan muodostaa funktion $\sin \pi z$ kanoninen tulomuoto. Funktion nollakohtien joukko on kokonaisluvut. Joten funktio tulee näyttämään seuraavalta

$$ze^{g(z)} \prod_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{p(z)}.$$

Tiedetään, että harmoninen sarja $\sum \frac{1}{n}$ hajaantuu, joten $p(z) = 0$ ei käy, mutta yliharmoninen sarja tunnetusti suppenee, joten valitaan $N = 1$ ja tulo saadaan muotoon

$$\sin \pi z = ze^{g(z)} \prod_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}. \tag{6}$$

Jäljelle jää selvittää mysteerifunktio $g(z)$. Otetaan tulon logaritmin derivaatta, niin päästään tarkastelemaan funktiota lähempää

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2} \log \sin \pi z &= \pi \cot \pi z \\ &= \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Käyttämällä kirjassa [1] todistettua cotangentin yhtälöä

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

päätellään, että $g'(z) = 0$, siis g on vakio. Jaetaan yhtälö (6) puolittain muuttujalla z ja annetaan $z \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin \pi z}{z} = \pi = \lim_{z \to 0} e^{g(z)} \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = e^{g(z)}.$$

Siis

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Täten funktiolla $\sin \pi z$ on genus 1. Voidaan vielä uudelleenjärjestää tulo kertomalla $-n$ ja n termit yhdessä, niin saadaan esitys

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \tag{7}$$

4 Gammafunktio

Tarpeellinen teoria on kehitelty, joten voidaan aloittaa gammafunktion konstruointi. Esimerkissä (3.5) löydettiin sinifunktiolle nollakohdistaan koostuva tuloesitys. Käydään nyt prosessi toiseen suuntaan. Valitaan yksinkertainen joukko nollia, muodostetaan niistä tulo ja katsotaan, jos päästäisiin johonkin mukavaan funktioon.

Annetaan funktion nimeksi G. Olkoon G nolla negatiivisissa kokonaisluvuissa. Päätetään että funktion nollaton osa on vakiofunktio 1 ja esimerkin (3.5) tapaisesti lisätään tuloon aputekijät $e^{-z/n}$ suppenemista varten. Päädytään funktioon

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

On selvää, että $G(-z) = 0$, kun z on positiivinen kokonaisluku ja tulo $zG(z)G(-z)$ on nolla kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Kun määritelmät avataan auki, nähdään, että

$$zG(z)G(-z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{8}$$

Origon nolla ilmaistiin kertomalla $G(z)G(-z)$ funktiolla z, mutta tämä ei ole tarpeellista. Koska $\mathbb{Z}_{<0} + 1 = \mathbb{Z}_{\leq 0}$, voidaan siirtää funktion $G(z)$ syötteitä yhdellä ja saavuttaa origon nolla ilman lisätermiä. Siis funktiolla $G(z-1)$ on kaikki samat nollakohdat kuin funktiolla $G(z)$, mutta myös yksi lisää kun $z = 0$, joten lauseen (3.1) nojalla

$$G(z-1) = z e^{\gamma(z)} G(z),$$

missä ehdottavasti nimetty $\gamma(z)$ on kokonainen. Sovelletaan esimerkistä (3.5) tuttua tekniikka ottamalla logaritmiset derivaatat puolittain, jolloin päästään tutkimaan eksponentissa olevaa funktiota paremmin. Saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

Sarjat suppenevat itseisesti, joten voidaan muotoilla vasemmanpuolista sarjaa summaamalla ensimmäinen termi erikseen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n+1}\right). \tag{10}$$

Vaihdetaan yhtälön (9) vasen pouli yhtälön (10) oikean puolen kanssa ja eristetään $\gamma'(z)$ siirtämällä muut termit toiselle puolelle.

$$\begin{aligned}\gamma'(z)&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+z}-\frac{1}{n}\right)\\&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=0,\end{aligned} \tag{11}$$

missä sarjojen itseinen suppeneminen perustelee uudelleenjärjestämisen. Osoitettiin, että $\gamma'(z)=0$ ja täten γ on vakio ja funktiolla G pätee funktionaaliyhtälö $G(z-1)=ze^{\gamma}G(z)$. Hyödynnetään tätä vakion γ arvon selvittämiseen. Määritelmästä nähdään, että $G(0)=1=e^{\gamma}G(1)$, josta saadaan

$$e^{-\gamma}=G(1)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-1/n} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\implies -\gamma&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{Log}(n+1)-\operatorname{Log}n-\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\operatorname{Log}(N+1)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\\\implies \gamma&=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\operatorname{Log}(N+1)\right)\approx 0.57722.\end{aligned}$$

Vakio on tunnettu nimellä Eulerin–Mascheronin vakio ja laskusta nähdään, että tätä on hyvä ajatella määreenä sille, kuinka paljon funktion $1/x$ naiivi yläsumma yliarvioi kuvaajan alla olevaa pinta-alaa välillä $[1,\infty)$.

Jos merkitään $H(z)=e^{\gamma z}G(z)$, niin $zH(z)=H(z-1)$ ja vihdoin määrittelemällä

$$\Gamma(z)=\frac{1}{zH(z)}$$

saadaan erityisen kaunis funktionaaliyhtälö

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1). \tag{13}$$

Avaamalla funktiot H ja G saadaan gammafunktion eksplisiittinen määritelmä.

Määritelmä 4.1 (Gammafunktio).

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} \tag{14}$$

Tapa jolla Γ konstruoitiin, kertoo sen olevan meromorfinen ja sillä olevan navat tarkalleen ei-positiivisissa kokonaisluvuissa. Napojen residyt saadaan funktionaaliyhtälöä soveltamalla

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{-n(1-n)(2-n)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Eulerin peilauslause saadaan hyödyntämällä yhtälöä (8)

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi z}{\pi} &= zG(z)G(-z) = zH(z)H(-z) \\ &= \frac{H(-z)}{\Gamma(z)} = \frac{(1-z)H(1-z)}{\Gamma(z)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}, \end{aligned}$$

josta seuraa

Lemma 4.2 (Eulerin peilauskaava).

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Saavutettujen tulosten avulla voidaan tehdä johtopäätelmiä gammafunktion saamista arvoista joissain pisteissä. Yhtälöstä (12) nähdään, että $\Gamma(1) = 1$. Funktionaaliyhtälöä (13) soveltamalla saadaan yhteys kertomafunktioon eli $\Gamma(n) = (n-1)!$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_+$. Asettamalla $z = 1/2$ yhtälöön (4.2) selvitetään, että $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Huomataan, että funktioilla $\Gamma(2z)$ ja $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$ on samat navat, sillä

$$\{-n/2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(n+1/2) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Siis lauseen (3.3) ja seurauksen (3.4) nojalla $e^{f(z)}\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z+1/2)$, missä $f(z)$ on kokonainen. Yhtälö tunnetaan Legendren duplikaatiokaavana. Osoittautuu, että $e^{f(z)} = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}$, mutta tämän todistamiseen tarvitaan gammafunktion logaritmin toista derivaattaa, jota kutsutaan trigammafunktioksi.

Määritelmästä (4.1) laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) &= \frac{d}{dz} \left(\log \frac{1}{z} - \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \log(1 + \frac{z}{n}) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right) \qquad (15) \\ \implies \frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2}. \end{aligned}$$

Trigammafunktio esitettynä ollaan valmiita osoittamaan

Lause 4.3 (Legendren duplikaatiokaava)**.**

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z). \tag{16}$$

Todistus. Aloitetaan ottamalla logaritmin toinen derivaatta vasemmasta puolesta.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) + \frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z+1/2) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z+1/2)^2} \\ &= 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2z)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2z+1)^2}\right) \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2z)^2} = 2\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(2z).\end{aligned}$$

Integroimalla yhtälö puolittain kahdesti ja soveltamalla sitten puolittain eksponenttifunktiota saadaan

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = e^{az+b}\Gamma(2z). \tag{17}$$

Asettamalla $z = 1/2$ saadaan $\sqrt{\pi} = e^{a/2+b}$ ja asettamalla $z = 1$ saadaan $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = e^{a+b}$. Näistä konstruoidaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\log\pi = a/2+b \\ \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\pi = a+b\end{cases} \implies \begin{cases} a = -2\log 2 \\ b = \frac{1}{2}\log\pi + \log 2\end{cases}. \tag{18}$$

Sijoittamalla luvut a ja b yhtälöön (17) saadaan haluttu tulos. □

5 Stirlingin arvio

Monissa gammafunktion sovelluksissa on tärkeää tietää, miten funktio käyttäytyy suurilla syötteillä. Funktion eksplisiittinen määritelmä voi olla kuitenkin vaikeakäyttöinen tähän tehtävään. Tässä luvussa esitetään skotlantilaismatemaatikon James Stirlingin kehittämä arvio gammafunktiolle, joka mahdollistaa tarkan estimaatin saamisen kun z on suuri.

Lause 5.1 (Stirlingin arvio)**.** *Kun* $\operatorname{Re} z > 0$*, niin*

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Todistus. Todistuksen idea lähtee trigammafunktiosta. Muistetaan funktion sarjaesitys

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

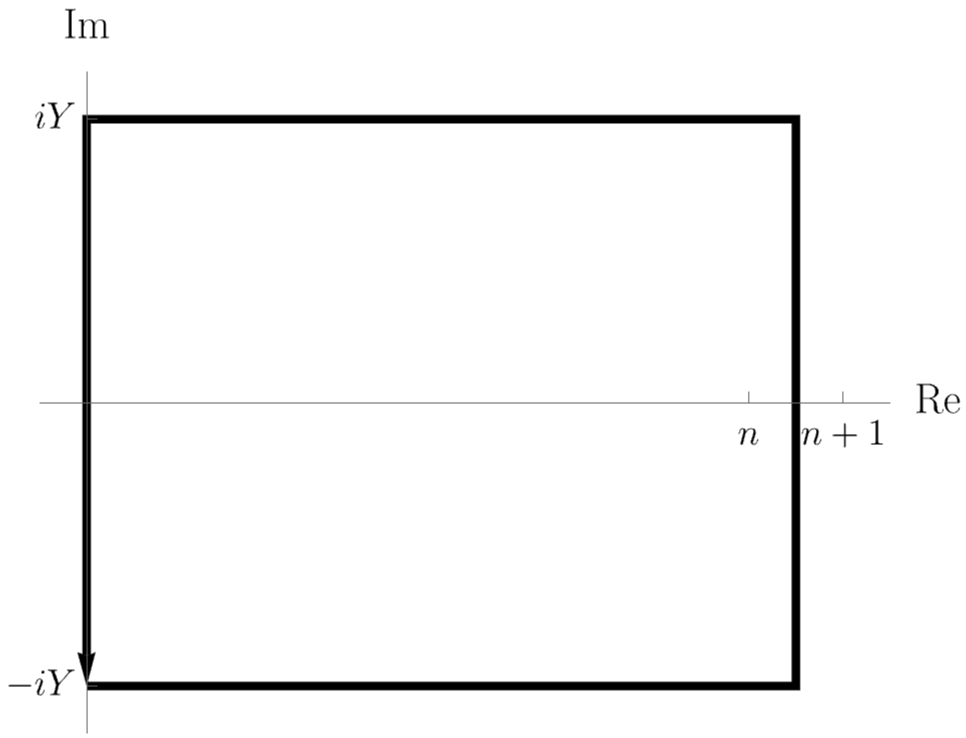
Tavoite on muuttaa diskreetti sarja joksikin jatkuvaksi funktioksi. Tarvitaan siis funktio jolla on residyt $1/(z+v)^2$ pisteissä $v \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ja jokin sopiva integroimispolku. Määritellään

$$\phi(\zeta) = \frac{\pi\cot\pi\zeta}{(z+\zeta)^2} \tag{19}$$

huom. ϕ on muuttujan $\zeta = \xi + i\eta$ funktio, z on tässä vain parametri. Laskemalla nähdään

$$\mathrm{Res}(\pi \cot \pi z, 0) = \lim_{z \to 0} \pi z \cot \pi z = \lim_{z \to 0} \frac{\cos \pi z}{\sin(\pi z)/\pi z} = 1$$

Koska $\cot \pi z$ on jaksollinen ja sisältää yhden navan periodissaan, niin kaikilla navoilla on sama residy. Kunhan napa ei ole päällekkäin funktion $1/(z+\zeta)^2$ navan kanssa $\mathrm{Res}(\phi, v) = 1/(z+v)^2$. Sopivaa integrointipolkua varten piirretään suorakulmio K, jossa vasen reuna kulkee imaginääriakselia pitkin $-iY \to iY$ ja yläreuna kulkee suoraan $iY \to n + 1/2 + iY$.



Kuva 1: Suorakulmio K.

Idea on antaa suorakulmion kasvaa äärettömän kokoiseksi ja todistaa, että asymptoottisesti neljästä integraalipolun suorasta vain imaginääriakselia pitkin kulkeva suora vaikuttaa integraaliin ollenkaan. Tällöin integraali koko polun ympäri (jonka tiedetään jo olevan melkein yhtäsuuri trigamma funktion kanssa) on yhtäsuuri viivaintegraalin kanssa imaginääriakselin yli. Tarkemmin

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{Y\to\infty} \left(\int\limits_{-iY}^{n+1/2-iY} + \int\limits_{n+1/2-iY}^{n+1/2+iY} + \int\limits_{n+1/2+iY}^{iY} \right) \phi(\zeta) = 0 \tag{20}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_K \phi(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \lim_{Y\to\infty} \int_{-iY}^{+iY} \phi(\zeta) \tag{21}$$

Yllä määritelty (19) ϕ funktio omaa navan origossa ja integrointipolku menee suoraan origon läpi. On siis tarkasteltava epäoleellista integraalia, jossa integrointipolku kiertää origon ϵ säteisellä puoliympyrällä. Puoliympyrä voisi kiertää origon vasemmalta tai oikealta. Valitaan se kiertämään oikealta ja nimitetään tämä integraalin pääarvoksi.

Kuva 2: Uusi integrointipolku, jossa origon kiertävän puoliympyrän säde lähestyy nollaa.

Tästä aiheutuu se, että integraaliin lasketaan mukaan puolet origon navan residystä. Siis yhtälön (21) vasen puoli on ennestään tuttu trigammafunktio, miinus yksi lisätermi $\frac{1}{2z^2}$.

Yhtälön oikea puoli on helpommin käsiteltävä objekti, joten yhtäsuuruuden todistaminen (siis yhtälön (20) todistaminen) on ensimmäinen tehtävä Stirlingin arvion todistamiseen.

Lähtökohta on yhtälö

$$\text{pr.v. } \frac{1}{2\pi i} \oint_K \phi(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{v=0}^{n} \frac{1}{(z+v)^2}. \tag{22}$$

Integrointipolun vaakasuorilla janoilla $\cot \pi\zeta$ lähestyy $\pm i$, kun suorakulmio kasvaa. Erityisesti silloin $\phi(\zeta) \to 0$, joten integraali näitä pitkin lähestyy nollaa. Jokaisella mahdollisella oikeanpuoleisella pystysuoralla, missä reaaliosa $\xi = n + 1/2$, funktio $\cot \pi\zeta$ on rajattu. Koska $\cot \pi\zeta$ on jaksollinen, raja on sama kaikilla n. Siis itseisarvo integraalista oikean janan yli on vakiokerrointa vailla

$$\int_{\xi=n+1/2} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2}.$$

Määritellään uusi nelikulmion muotoinen integrointipolku $P(R)$, jonka kulmapisteet ovat $(n+1/2)-iR$, $(n+1/2)+iR$, $-R+iR$ ja $-R-iR$. Kun annetaan $R \to \infty$, niin integraali oikeanpuoleisen janan yli samaistuu integraaliin (23). Tehtävänä on osoittaa, että integraali muita janoja pitkin lähestyy nollaa, jolloin integraali koko polun ympäri on sama integraalin (23) kanssa. Erityisesti tällöin haluttu integraali saadaan ratkaistua residylaskennalla. Lisätty osa saadaan osoitettua nollaksi käyttämällä yläarviota $\left|\int f\right| \leq LM$, missä M on funktion f arvoista supremum ja L on integrointipolun pituus

$$\int\limits_{(n+1/2)+iR}^{-R+iR} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2} \leq \frac{2R}{|R+y|^2} \to 0$$
$$\int\limits_{-R+iR}^{-R-iR} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2} \leq \frac{2R}{|R+x|^2} \to 0$$
$$\int\limits_{-R-iR}^{(n+1/2)-iR} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2} \leq \frac{2R}{|R+y|^2} \to 0,$$

kun $R \to \infty$.

Residylaskennan helpottamiseksi tehdään huomio, että integrointipolulla $\zeta = n+1/2+i\eta$, joten $\bar{\zeta} = 2n+1-\zeta$ ja

$$\int\limits_{\xi=n+1/2} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2} = \int\limits_{\xi=n+1/2} \frac{d\eta}{(\zeta+z)(2n+1-\zeta+\bar{z})}. \tag{23}$$

Integroitavan funktion navat ovat pisteet $\zeta_1 = -z$ ja $\zeta_2 = \bar{z}+2n+1$. Kuitenkin, koska $\operatorname{Re} z > 0$ ja $\operatorname{Re}\zeta < 2n+1$, niin napa ζ_2 ei kuulu integroimistien sisäalueeseen, joten

$$\begin{aligned}\int\limits_{\xi=n+1/2} \frac{d\eta}{(\zeta+z)(2n+1-\zeta+\bar{z})} &= 2\pi i \lim_{\zeta\to -z} (\zeta+z)\frac{1}{(\zeta+z)(2n+1-\zeta+\bar{z})} \\ &= \frac{2\pi i}{2n+1+2x} \to 0, \text{ kun } n \to \infty.\end{aligned} \tag{24}$$

Siis yhtälössä (22) integraalin ja täten halutun summan tarkasteleminen redusoituu imaginääriakselia pitkin kulkevan käyräintegraalin $\int_{\xi=0} \phi(\zeta)d\zeta$ tarkastelemiseen.

Käyttäen identiteettejä $\cot(-z) = -\cot(z)$ ja $\coth(z) = i\cot(iz)$ voidaan kirjoittaa integraali muodossa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \phi(\zeta)d\zeta &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \cot \pi i\eta \left[\frac{1}{(i\eta+z)^2} - \frac{1}{(i\eta-z)^2}\right] d\eta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \cot \pi i\eta \cdot \frac{-4i\eta z}{(\eta^2+z^2)^2} d\eta \\ &= -\int_0^\infty \coth \pi\eta \cdot \frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2} d\eta.\end{aligned} \tag{25}$$

Käännetään merkki, niin integraali on haluttuun kiertosuuntaan. Viimein identiteettiä $\coth z = 1 + 2/(e^{2z} - 1)$ soveltamalla voidaan kirjoittaa trigamma muodossa

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) &= \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\frac{d\eta}{(e^{2\pi\eta}-1)} + \int_0^\infty \frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}d\eta. \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\frac{d\eta}{(e^{2\pi\eta}-1)}d\eta,\end{aligned} \tag{26}$$

missä ensimmäisen rivin oikeanpuolimmaisin integraali evaluoitiin substituutiolla $u = \eta^2 + z^2$. Esityksen ensimmäiset kaksi termiä ovat jopa lukiolaisille tutun näköisiä ja integraalitermi suppenee erittäin nopeasti. Tarkoitus on löytää gammafunktion esitys, joten (26) pitää vielä integroida kahdesti ja syöttää eksponenttifunktioon.

Oletuksella $\operatorname{Re} z > 0$ voidaan integroida yhtälö puolittain muuttujan z suhteen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\log\Gamma(z) &= C + \log z - \frac{1}{2z} + \int\int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2}\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}dz \\ &= C + \log z - \frac{1}{2z} + \int_0^\infty 2\eta \int \frac{2z}{(\eta^2+z^2)^2}dz \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1} \quad (*) \\ &= C + \log z - \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}.\end{aligned} \tag{27}$$

Kohdassa $(*)$ η suhteinen integraali suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa osajoukossa $D \subset \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$, joten z suhteinen integraali voidaan siirtää sen sisälle.

Jos integroidaan heti uudestaan ilman kikkailua, niin termi $1/(\eta^2+z^2)$ integroituu funktioksi $\arctan(z/\eta)$, jonka arvot eivät ole yksikäsitteisiä. Voidaan välttyä tältä osittaisintegroimalla

$$\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2}\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^2-\eta^2}{(\eta^2+z^2)^2}\operatorname{Log}(1-e^{-2\pi\eta})d\eta, \tag{28}$$

missä termi jota derivoitiin oli $2\eta/(\eta^2+z^2)$ ja termi jota integroitiin oli $1/(e^{2\pi\eta}-1)$. Kun (28) integroidaan muuttujan z suhteen saadaan

$$\begin{aligned}\int (28)dz &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(-\int \frac{\eta^2+z^2-2z^2}{(\eta^2+z^2)^2}dz\operatorname{Log}(1-e^{-2\pi\eta})\right)d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\operatorname{Log}(1-e^{-2\pi\eta})d\eta.\end{aligned} \tag{29}$$

Eli log gamma saa muodon

$$\log\Gamma(z) = C_2 + C_1 z + \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\operatorname{Log}\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta, \tag{30}$$

missä C_1 on kohdan (27) $C - 1$. Integrointijärjestyksen muuttaminen on sallittua, koska (28) suppenee tasaisesti. Seuraava tavoite on ratkaista parametrit C_1 ja C_2. Nämä saadaan selvitettyä funktionaaliyhtälöitä soveltamalla, mutta ennen tätä on todistettava, että yhtälön (30) integraali on erittäin merkityksetön. Nimetään integraali

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta. \tag{31}$$

Kun yhtälöä katsoo, on helposti uskottavissa, että $J(z) \to 0$, kun $z \to \infty$ olettaen, että z ei ole imaginääriakselin lähettyvillä. Tehdään väitteestä täsmällinen. Oletetaan, että $\operatorname{Re} z \geq c > 0$. Voidaan jakaa integraali kahteen osaan

$$J(z) = \underbrace{\int_0^{|z|/2}}_{J_1(z)} + \underbrace{\int_{|z|/2}^\infty}_{J_2(z)} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta. \tag{32}$$

Integraalissa J_1 pätee $\eta \leq |z/2|$, joten $|\eta^2+z^2| \geq |z|^2 - |\eta|^2 \geq |z|^2 - |z/2|^2 = \frac{3}{4}|z|^2$. Siis

$$|J_1| \leq \frac{4}{3\pi|z|}\int_0^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}.$$

Integroitava funktio lähestyy eksponentiaalisella nopeudella funktiota $\log 1 = 0$, joten integraali suppenee (tästä tarkempi todistus aputuloksissa). Täten $J_1(z) \to 0$ kun $z \to \infty$.

Integraalissa J_2 pätee $\eta \geq |z/2|$, joten $|\eta^2+z^2| = |z-i\eta|\cdot|z+i\eta| > c|z|$. Siis

$$|J_2| < \frac{1}{\pi c}\int_{|z/2|}^\infty \log\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}.$$

Integraali suppenee, joten $|J_2| \to 0$, kun $z \to \infty$. Vakion C_1 arvo voidaan selvittää funktionaaliyhtälöllä $\log\Gamma(z+1) = \log z + \log\Gamma(z)$. Siis

$$\begin{aligned} C_2 + C_1 z + C_1 + (z+1/2)\log(z+1) + J(z+1)& \\ = C_2 + C_1 z + (z+1/2)\log z + J(z),& \end{aligned} \tag{33}$$

joka sievenee muotoon

$$C_1 = -(z+1/2)\log(1+1/z) + J(z) - J(z+1).$$

Kun päästetään $z \to \infty$, niin nähdään, että $C_1 = -1$. Vakio C_2 saadaan selvitettyä ottamalla logaritmi Eulerin peilauslauseesta $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$. Valitsemalla $z = 1/2 + iy$ saadaan

$$\begin{aligned} 2C_2 - 1 + iy\operatorname{Log}(1/2+iy) - iy\operatorname{Log}(1/2-iy) + J(1/2+iy) + J(1/2-iy)& \\ = \operatorname{Log}\pi - \operatorname{Log}\cosh\pi y + k2\pi i,& \end{aligned} \tag{34}$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Valitsemalla $y = 0$ voidaan soveltaa tietoa $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, niin saadaan

$$\operatorname{Log}\pi = \operatorname{Log}\pi - \operatorname{Log}\cosh 0 + k2\pi i \implies k = 0.$$

Päästetään $y \to \infty$, niin $J(1/2+iy)$ ja $J(1/2-iy) \to 0$. Sievennetään logaritmit yhdeksi termiksi

$$\begin{aligned} iy\left[\operatorname{Log}\frac{1/2+iy}{1/2-iy}\right] &= iy\left[\operatorname{Log}\left(\frac{1-2iy-2}{1-2iy}(-1)\right)\right] \\ &= iy\left[\pi i + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{2}{1-2iy}\right)\right], \end{aligned}$$

jolloin voidaan selvemmin kirjoittaa logaritmi Taylorin kehitelmänä. Summataan ensimmäinen termi erikseen

$$iy\left[\pi i + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{2}{1-2iy}\right)\right] = -\pi y + 1 - \frac{1}{1-2iy} - iy\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n(1-2iy)^2}. \tag{35}$$

Jäljelle jäävälle sarjalle saadaan majorantti

$$\begin{aligned}\left|iy\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{n(1-2iy)^2}\right| &\leq |y|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{2^n|y|^n} = |y|\frac{1/|y|^2}{1-1/|y|}\\ &= \frac{1}{|y|-1} \to 0, \text{kun } y \to \infty.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälön (34) termi saa muodon

$$\operatorname{Log}\cosh \pi y = \operatorname{Log}(e^{\pi y}(1+e^{-2\pi y})) - \operatorname{Log} 2 = \pi y - \operatorname{Log} 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi yn}}{n}(-1)^{n+1}.$$

Oikeanpuoleiselle sarjalle saadaan majorantti

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{-2\pi yn}}{n}(-1)^{n+1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{-2\pi yn}\right| = \frac{e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}} \to 0, \text{ kun } y \to \infty.$$

Eli kun $y \to \infty$, yhtälö (34) saa muodon

$$\begin{aligned}&2C_2 - 1 - \pi y + 1 + \epsilon_1(y) = \operatorname{Log}\pi - \pi y + \operatorname{Log} 2 + \epsilon_2(y)\\ \Longrightarrow\ & C_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi.\end{aligned}$$

Siis yhtälö (30) saa muodon

$$\log\Gamma(z) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi - z + \left(z - \frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} z + J(z). \tag{36}$$

Kun tämä syötetään eksponenttifunktiolle, saadaan

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(\frac{z}{e}\right)^z e^{J(z)}. \tag{37}$$

Tiedetään jo, että $J(z) \to 0$, kun $z \to \infty$, mutta voidaan vielä kysyä kuinka nopeasti tämä tapahtuu. Käyttämällä aiempaa paloittelua nähdään, että

$$|J_1(z)| \leq \frac{4}{3\pi|z|}c \ll \frac{1}{z}.$$

Häntäintegraalin laskeminen on työläämpää

$$|J_2(z)| < \frac{1}{\pi c}\int_{|z/2|}^{\infty}\operatorname{Log}\frac{1}{1-e^{-2\pi\eta}}d\eta.$$

Erotetaan logaritmit toisistaan. Logaritmi 1 on nolla, joten saadaan

$$|J_2(z)| \ll \int_{|z/2|}^{\infty} \mathrm{Log}(1 - e^{-2\pi\eta}) d\eta = \int_{|z/2|}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi\eta n}}{n} d\eta.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla saadaan siirtää integraali sarjan sisälle

$$\Longrightarrow |J_2(z)| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi|z|n}}{2\pi n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi|z|n} \ll \frac{e^{-\pi|z|}}{\pi|z|} \ll \frac{1}{z}.$$

Siis $J(z) = J_1(z) + J_2(z) = O(1/z)$ ja täten Taylorin kehitelmällä nähdään, että $e^{J(z)} = 1 + O(1/z)$, joten (37) saa halutun muodon

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{38}$$

□

Useimmissa Gammafunktion sovelluksissa funktiosta käytetään esitystä

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{39}$$

joka voidaan osoittaa olevan yhdenpitävä tutkielmassa esitetyn määritelmän kanssa. Tämä voidaan saavuttaa Stirlingin arviolla.

Merkitään toistaiseksi $F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. Osittaisintegroimalla nähdään, että

$$F(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = zF(z).$$

Siis F toteuttaa gammafunktion määrittävän funktionaaliyhtälön ja siksi $F(z)/\Gamma(z) = F(z+1)/\Gamma(z+1)$. Eli funktio $F(z)/\Gamma(z)$ on 1-jaksollinen. Kun $x > 0$, molemmat F ja Γ ovat holomorfisia ja nollasta eroavia, siis $F(z)/\Gamma(z) = e^{g(z)}$, missä $g(z)$ on kokonainen. Kertomalla yhtälö puolittain funktiolla $\Gamma(z)$ ja evaluoimalla yhtälö, kun $z = 1$ nähdään, että $e^{g(z)} = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{N}$. Pitää vielä osoittaa, että $F(z)/\Gamma(z)$ on rajoitettu, niin Liouvillen lauseen nojalla funktio on vakiofunktio ja tässä tapauksessa 1.

Tiedetään jo, että funktio on 1-periodinen, joten riittää osoittaa, että funktio on rajoitettu, kun $1 \leq x \leq 2$. Selvästi

$$|F(z)| \leq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = F(x) \neq \infty.$$

Stirlingin arviolla

$$|\Gamma(z)| = \left|\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\right| \left|\left(\frac{z}{e}\right)^z\right| \left|e^{J(z)}\right|$$

$$\geq \frac{\sqrt{2\pi}}{|z|^{1/2}} \frac{|z|^x}{e^x} \geq \sqrt{2\pi}|z|^{1/2} e^{-2} \geq \sqrt{2\pi} e^{-2} > 0.$$

Siis F on rajoitettu, Γ on alhaalta rajoitettu, joten $\frac{F(z)}{\Gamma(z)}$ on rajoitettu ja täten vakiofunktio. Siis $\Gamma(z) = F(z)$ pisteissä, missä molemmat ovat määritelty.

6 Yhteenveto

Löydettiin, että ääretöntä lähestyvällä lukujonolla $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ on perhe kokonaisia funktioita, jotka ovat muotoa

$$z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots \frac{1}{N_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{N_n}}.$$

Nämä saavat kaikki arvokseen nolla, kun z on jokin lukujonon jäsen.

Pohdittiin yksinkertaista tapausta, jossa $a_n = -n$, josta saatiin funktion $G(z)$ määritelmä. Yrittämällä sieventää tämän funktionaaliyhtälöä löydettiin Eulerin–Mascheronin vakio γ ja tutkielman päätavoite gammafunktio Γ, jolle pätee identiteetti $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$.

Lopuksi osoitettiin joitain gammafunktion identiteettejä, sen tunnettuja arvoja ja Stirlingin arvio, joka antaa yksinkertaisen tavan laskea erittäin hyvän estimaatin gammafunktiolle isoilla syötteillä. Stirlingin arviolla saatiin tutkielmassa esitetty gammafunktion määritelmä yhdistettyä määritelmään, joka on kirjallisuudessa yleisempi.

7 Aputuloksia

Lemma 7.1. *Jos f ja g ovat kokonaisia, niin $f \circ g$ on kokonainen.*

Todistus. Merkitään $h = f \circ g$ ja $z = x + iy$. Koska f, g kokonaisia, tiedetään

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$i\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

Laskemalla nähdään

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g} i \frac{\partial g}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial x}$$

□

Lemma 7.2. *Jos g on kokonainen ja aina nollasta eroava, niin $\frac{1}{g}$ on kokonainen.*

Todistus. Valitaan $f = \frac{1}{z}$ ja g kokonainen ja aina nollasta eroava. Nyt $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ on kokonainen, joten $f \circ g$ kokonainen (7.1). □

Lemma 7.3.

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = N + 1$$

Todistus. Merkitään tuloa P_N

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} P_N &= \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = \operatorname{Log}(N+1) \\
\implies P_N &= N + 1
\end{aligned}$$

□

Lemma 7.4. *Integraali*

$$\int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$

suppenee tasaisesti, kun $z \in D$, missä $D \subset \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0\}$ on kompakti.

Todistus. Nimetään lemman integraali f, ja määritellään f_n osaintegraalina

$$f_n(z) = \int_0^n \frac{4\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}.$$

Nyt

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2 + z^2)^2} \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \right| \leq \int_n^\infty \frac{4\eta}{|z|^3} \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}$$
$$\leq \frac{1}{|z|^3} \int_n^\infty \frac{4\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} d\eta. \tag{40}$$

Koska D on kompakti, $1/|z|^3$ saavuttaa maksiminsa ja sitä voidaan ajatella vakiona. Integraali lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$, joten mille tahansa ϵ voidaan valita N, s.e. $\leq \frac{1}{|z|^3} \int_n^\infty \frac{4\eta}{e^{2\pi\eta}-1} d\eta < \epsilon$ kaikille $z \in D$ ja $n > N$. □

Lemma 7.5. *Integraali*

$$\int_0^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} \tag{41}$$

suppenee.

Todistus. Ensin huomataan

$$\int_0^\infty \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta = \int_0^\infty \log 1 - \int_0^\infty \log(1 - e^{-2\pi\eta}) d\eta.$$

Integraali nollasta on tietenkin nolla, niin tarkastellaan vain oikeanpuoleista itnegraalia. Huomataan, että selvästi jonkin äärellisen välin jälkeen voidaan käyttää logaritmin Taylorin kehitelmää.

$$\int_0^\infty \log(1 - e^{-2\pi\eta}) d\eta = C - \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-2\pi\eta n}}{n}. \tag{42}$$

Määritellään f_N integroitavan sarjan osasummaksi. Nämä f_N integroituvia ja $f_{N+1} \geq f_N$ ja tietenkin $f_N \to$ integroitavaa sarjaa, joten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla voidaan vaihtaa integraalin ja summan järjestystä. Jätetään vakio C huomioimatta ja katsotaan vain integraalia

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-2\pi\eta n}}{n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-2\pi\eta n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{-2\pi n}{-2\pi n} e^{-2\pi\eta n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{-2\pi n^2}. \tag{43}$$

Harmoninen sarja tunnetusti suppenee, joten lemma on todistettu. □

Kirjallisuutta

[1] Lars Ahlfors: *Complex Analysis 3rd Edition*, McGraw-Hill Education, 1979