

Jäykkien kappaleiden simulointi ja kytkentä virtaussimulaatioihin

TURUN YLIOPISTO
Tietotekniikan laitos
LuK-tutkielma
Tietojenkäsittelytiede
Toukokuu 2024
Artturi Vehviläinen

TURUN YLIOPISTO
Tietotekniikan laitos

ARTTURI VEHVILÄINEN: Jäykkien kappaleiden simulointi ja kytkentä virtaussimulaatioihin

LuK-tutkielma, 22 s.
Tietojenkäsittelytiede
Toukokuu 2024

Jäykät kappaleet ovat simulaatioissa kappaleita, joiden muoto ei muutu. Jäykkien kappaleiden ja virtausten, kuten veden tai savun, vuorovaikutukset ovat luonnossa tavallisia, mutta niiden yhdistäminen on haastavaa simulaatioissa. Tässä tutkielmassa selvitetään, miten jäykkiä kappaleita simuloidaan ja miten ne kytketään virtaussimulaatioihin.

Jäykkien kappaleiden simulaatioissa pyritään simuloimaan fysiikan lakien mukaisesti liikkuvia kappaleita, joiden muodot eivät muutu. Tätä varten täytyy ottaa huomioon useita tekijöitä kuten kappaleidenväliset törmäykset ja kitkavoimat. Kappaleiden liikkeitä voidaan myös rajata side-ehdoiksi kutsutuilla yhtälöillä ja epäyhtälöillä. Kappaleiden liikkeen simulointi tapahtuu laskemalla niihin kohdistuvista voimista kappaleille nopeudet ja lopulta uudet sijainnit.

Virtaukset voidaan simuloida mallintaen ne laskentaverkoilla tai hiukkasilla. Verkkomallissa kaikki virtauksen tilaa kuvaava tieto tallennetaan paikallaan pysyviin verkon soluihin. Hiukkasmallissa tieto on liikkuvissa hiukkasissa. Mallit voidaan yhdistää hybridimenetelmäksi.

Jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentä tarkoittaa tapaa, jolla jäykät kappaleet ja virtaukset vuorovaikuttavat keskenään. Kytchentä voi olla yhdistetty tai jaettu. Jaetussa menetelmässä jäykkien kappaleiden ja virtausten yhtälöt ratkaistaan erikseen ja yhdistetyssä menetelmässä niistä muodostetaan yksi yhtälö.

Jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentämenetelmät voidaan jakaa kahteen sen mukaan onko jäykät kappaleet mallinnettu polygonimalleilla vai hiukkasilla. Kytchentämenetelmiä kehitetään jatkuvasti tarkemmiksi ja tehokkaammiksi.

Asiasanat: Jäykkä kappale, simulaatio, virtaussimulaatio, kytkentä

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Jäykkien kappaleiden simulointi	3
2.1	Jäykkä kappale	3
2.2	Side-ehdot	5
2.3	Simulaation vaiheet	6
3	Jäykkien kappaleiden kytkentä virtaussimulaatioihin	9
3.1	Virtaussimulaation menetelmiä	10
3.2	Yhdistetty ja jaettu kytkentä	11
3.3	KytKentä polygonimalleilla	12
3.4	KytKentä hiukkasilla	14
4	Pohdinta	17
5	Yhteenveto	20
	Lähdeluettelo	23

1 Johdanto

Fysiikan lakeihin pohjautuvat simulaatiot ovat laajassa käytössä. Simulaatioita käytetään esimerkiksi tieteellisessä tutkimuksessa, elokuvien erikoistehosteissa, tuotekehityksessä sekä videopeleissä. Käyttötarkoituksesta riippuen simulaatiolla voi olla erilaiset vaatimukset. Tieteellisessä tutkimuksessa tai elokuvien erikoistehosteissa on simulaation tarkkuus tärkeämpää kuin laskentateho ja yhden simulaation laskemiseen voi mennä tunteja. Vastaavasti videopeleissä simulaation on päivityttävä kuusikymmentä kertaa sekunnissa, minkä vuoksi laskentateho on prioriteetti.

Kaikki kappaleet, joiden muodon ei tarvitse muuttua, kuvataan simulaatioissa jäykillä kappaleilla. Esimerkiksi ämpäri simuloitaisiin usein jäykkänä kappaleena, koska moni simulaatio ei vaadi ämpärin muodon muuttumista. Jäykistä kappaleista voidaan muodostaa myös suurempia kokonaisuuksia liittämällä niitä erilaisin nivelin yhteen. Esimerkiksi ämpäriin voidaan kiinnittää kahva nivelillä. Kahvan liikkuessa ämpärin suhteen voisi ajatella kokonaisuuden muuttavan muotoaan. Koska ämpäri ja sen kahva ovat erillisiä kappaleita, jotka eivät muuta muotoaan, voidaan ne simuloida jäykkinä kappaleina. Kuitenkaan ämpärissä mahdollisesti olevaa vettä ei voida simuloida jäykkänä kappaleena, sillä veden halutaan usein muuttavan muotoaan sen lainehtiessa ämpärissä.

Virtausten, kuten veden, ja jäykkien kappaleiden, kuten ämpärin, vuorovaikutukset ovat ihmisille arkipäiväisiä, mutta ne tuottavat tietokonesimulaatioille ongelmia. Kaksi hyvin eri tavalla käyttäytyvää asiaa luonnollisesti simuloidaan eri menetel-

min. Molempia simuloissa täytyy menetelmät yhdistää tai saada toimimaan yhdessä. Tämä tutkielma selvittää, miten jäykkien kappaleiden simulaatiot kytketään virtaussimulaatioihin. Tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa vastataan seuraaviin tutkimuskysymyksiin.

1. Miten jäykkiä kappaleita simuloidaan?
2. Miten jäykät kappaleet kytketään virtausten kanssa?

Jäykkien kappaleiden simuloinnista tiedonhaku tehtiin hakulauseella ("rigid body simulation" OR "rigid body dynamics") AND (gam* OR "physics engin*" OR "game engin*" OR "computer graphics" OR animation). Koska jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkennästä käytetään useita termejä kuten "rigid-fluid coupling" ja "fluid solid interaction" kytkennästä käytettiin hakulauseena rigid AND fluid. Haut tehtiin ACM digital library- ja IEEE Xplore-tietokannoissa sekä kirjastopalvelu Volterissa. Koska tarkoituksena oli tutkia uusia kytkentämenetelmiä, haut rajattiin alkamaan vuodesta 2018. Artikkelit valittiin tiivistelmän ja otsikon perusteella.

Luvussa 2 käydään läpi yleinen menetelmä jäykkien kappaleiden simulointiin. Luvussa selitetään jäykkä kappale käsitteenä ja esitetään simulaation eri vaiheet. Luvun 3 aiheena on jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentä. Ensin esitellään lyhyesti virtaussimuloinnin menetelmiä, minkä jälkeen selitetään yhdistetyn ja jaetun kytkennän ero. Lopuksi tutkitaan erilaisia kytkentämetodeja käymällä läpi aiheesta kertovia artikkeleita. Luvussa 4 pohditaan kytkentämenetelmien eroja ja tulevaisuuden kehityskohteita. Luku 5 on tutkielman yhteenveto.

2 Jäykkien kappaleiden simulointi

Jäykkien kappaleiden simuloinnissa pyritään simuloimaan kappaleiden liikkeitä siten, että ne noudattaisivat fysiikan lakeja. Jäykkiin kappaleisiin kohdistuu voimia kuten painovoima ja kitkavoima, jotka vaikuttavat niiden liikeratoihin. Vuorovaikutus muiden jäykkien kappaleiden kanssa täytyy myös ottaa huomioon. Tämä tarkoittaa sitä, että kappaleet törmäävät keskenään tuottaen toisiinsa voimia. Jos kappaleiden liikettä halutaan rajoittaa, kuten liittämällä niitä yhteen nivelillä, määritetään niille side-ehtoja. Simulaatio koostuu silmukasta, jossa lasketaan kappaleisiin kohdistuvat voimat ja niiden uudet sijainnit.

Jäykkien kappaleiden simulointiin on erilaisia menetelmiä. Yksi yleinen menetelmä esitellään tässä luvussa. Luvussa 2.1 esitetään miten jäykkä kappale mallinnetaan simulaatiossa. Luvussa 2.2 selitetään side-ehtojen toiminta. Simulaation vaiheet selitetään luvussa 2.3.

2.1 Jäykkä kappale

Jäykät kappaleet ovat simulaatioissa kappaleita, joiden kahden pisteen väliset etäisyydet eivät muutu. Jäykän kappaleen muoto pysyy siis aina samana. [1] Jotta jäykän kappaleen liikkeitä voidaan simuloida fysiikan lakien mukaisesti, on kappaleelle määriteltävä joukko arvoja.

Simuloitavan kappaleen sijainti ja asento on tiedettävä, jotta kappaleen liike voidaan simuloida. Jäykän kappaleen sijainti tallennetaan vektoriin $x \in \mathbb{R}^3$, joka osoit-

taa koordinaatiston keskipisteestä kappaleelle määritettyyn keskipisteeseen. Kappaleen asento eli kierto tallennetaan yleisesti joko kiertomatriisiin $R \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$ tai kvaternioon $Q \in \mathbb{H}$. [1] Kvaterniot ovat kompleksilukujen joukon laajennus, missä on neljä komponenttia. Käytettävä kvaternio on tarkemmin yksikkökvaternio, jonka normi eli komponenttien neliöiden summien neliöjuuri on yhtä suuri kuin yksi [1]. [2] Kappaleen yleistetty sijainti viittaa kappaleen sijaintiin ja kiertoon [1].

Massa vaikuttaa kappaleiden liikkeisiin olennaisella tavalla. Dynamiikan peruslain $F = ma$ mukaan voima tuottaa kappaleelle sitä pienemmän kiihtyvyyden, mitä suurempi massa kappaleella on. Myös massan jakautuminen vaikuttaa kappaleen käyttäytymiseen. Esimerkiksi vasara, jonka toinen pää on huomattavasti toista päätä painavampi, käyttäytyy eri tavalla kuin kappale, jonka massa on jakautunut tasanaisesti. Jäykille kappaleille määritetään massa m , jonka jakautumisen määrittää inertiamatriisi $I \in \mathbb{R}^{(3 \times 3)}$ [1].

Kappaleen liikkeen simuloimisen kannalta on oleellista tietää kappaleen etenemisnopeus ja kulmanopeus. Kappaleen etenemisnopeus tallennetaan vektoriin $v \in \mathbb{R}^3$. Vektorin suunta määrittää etenemisen suunnan ja vektorin pituus etenemisen vauhdin. Kulmanopeus eli se, kuinka nopeasti kappale pyörii itsensä ympäri, tallennetaan vektoriin $\omega \in \mathbb{R}^3$. Vektorin suunta määrittää suoran, jonka ympäri kaikki kappaleen pisteet pyörivät. Vektorin pituus määrittää pyörimisvauhdin. Kappaleen yleistetty nopeus viittaa kappaleen etenemis- ja kulmanopeuteen. [1]

Jäykän kappaleen kaikki liikkeet voidaan kuvata sen massakeskipisteen suhteen. Kierto tapahtuu aina massakeskipisteen ympäri ja jokaisella kappaleen pisteellä on sama kulmanopeus. Kappaleen pisteiden etenemisnopeudet voivat olla erisuuret kappaleen kierron vuoksi. Jokaisen pisteen nopeus voidaan kuitenkin laskea yhden pisteen nopeudesta, kun tiedämme kappaleen kiertonopeuden ja pisteidenväliset etäisyydet. Massakeskipiste toimii usein etenemisnopeuden referenssipisteenä. [1] Kap-

paleiden liikkeiden kuvaaminen yhden referenssipisteen kautta tuo kappaleille niiden jäykkyyden, eikä sitä tarvitse niille erikseen määrittää [3].

Jäykällä kappaleella on yhteensä kuusi vapausastetta: kolme etenemisliikkeen ja kolme kiertoliikkeen suhteen [1]. Tämä tulee siitä, että rajoittamaton jäykkä kappale pystyy liikkumaan kunkin kolmiulotteisen avaruuden akselin suuntaisesti ja pyörimään kunkin akselin ympäri. Vapausasteisiin palataan luvussa 2.2.

2.2 Side-ehdot

Side-ehdot ovat yhtälöitä ja epäyhtälöitä, jotka rajoittavat sitä, miten kappaleet voivat liikkua suhteessa toisiinsa. Side-ehdoissa on muuttujina ajan lisäksi kappaleiden yleistettyjä sijaintimuuttujia q ja yleistettyjä nopeusmuuttujia u sekä niiden derivaattoja.

$$C(q_1, q_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$C(q_1, q_2, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, t) \geq 0 \quad (2.2)$$

Yhtälön 2.1 mallisia side-ehtoja kutsutaan molemminpuolisiksi. Vastaavasti epäyhtälön 2.2 mallisia side-ehtoja kutsutaan yksipuolisiksi. Muuttujien alaindeksit viittaavat eri kappaleisiin. [1]

Side-ehdot jaetaan holonomisiin ja ei-holonomisiin. Holonomisia side-ehtoja ovat kaikki molemminpuoliset side-ehdot, joissa muuttujina ovat vain aika ja paikka. Ei-holonomisia side-ehtoja ovat kaikki yksipuoliset side-ehdot sekä molemminpuoliset side-ehdot, joissa on ajasta ja paikasta poikkeavia muuttujia kuten nopeus. Holonomiset side-ehdot poistavat vapausasteita systeemistä. [1]

Havainnollistetaan side-ehtojen toimintaa esimerkillä. Olkoon kaksi jäykkää palloa, joiden säteet ovat r_1 ja r_2 ja joiden keskipisteet sijaitsevat vektorien x_1 ja x_2

osoittamissa pisteissä. Palloihin vaikuttaa seuraava side-ehto.

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| - (r_1 + r_2) \quad (2.3)$$

Jos side-ehto on molemminpuolinen, eli $C = 0$, on pallojen etäisyyden ja säteiden summan erotuksen oltava nolla. Pallot ovat siis aina kosketuksessa niihin kohdistuvista voimista riippumatta. Side-ehto on holonominen, sillä se on molemminpuolinen ja siinä on muuttujana ainoastaan paikka. Koska vapaalla jäykällä kappaleella on kuusi vapausastetta, on kahden jäykän kappaleen systeemissä 12 vapausastetta. Esimerkin tilanteessa, jos toisella pallolla on kaikki kuusi vapausastettaan, on toisella pallolla vain viisi. Pallo voi pyöriä vapaasti toisen pallon pinnalla, mutta se voi liikkua vain toisen pallon pintaa pitkin, joka on kaksiulotteinen taso. Systeemissä on siis yhteensä 11 vapausastetta holonomisen side-ehdon vuoksi. [1]

Jos side-ehto on yksipuolinen, eli $C \geq 0$, voivat pallot liikkua vapaasti toistensa suhteen, mutteivät koskaan leikata toisiaan. Side-ehto on ei-holonominen, koska se on yksipuolinen. Systemi siis säilyttää kaikki 12 vapausastettaan, vaikka niiden määrä voi hetkellisesti laskea pallojen koskettaessa toisiaan. Ei-holonomiset side-ehdot voivat siis poistaa systeemistä vapausasteita paikallisesti riippuen paikasta tai ajasta. Vastaavasti holonomiset side-ehdot poistavat systeemistä vapausasteita pysyvästi. [1]

2.3 Simulaation vaiheet

Jäykkien kappaleiden simulaatiot, muiden tietokoneprosessien tavoin, eivät ole jatkuvia vaan etenevät askeleittain. Simulaattori toistaa simulaatiosilmukkaa, joka vie vaiheittain simulaatiota eteenpäin. Silmukan ensimmäinen vaihe on törmäysten havaitseminen, jossa simulaatio tunnistaa kaikki kappaleparit, jotka koskettavat toisiaan. Vaiheessa myös tunnistetaan, onko kyse törmäyksestä vai lepokontaktista [1].

Seuraavaksi simulaatiossa lasketaan kontaktien ja törmäysten aiheuttamat voimat. Kaikki kappaleisiin vaikuttavat voimat lasketaan yhteen, ja niistä lasketaan kappaleille uudet nopeudet. Nopeuksista lasketaan kappaleiden uudet sijainnit. Simulaation päivitettyä kappaleiden nopeudet ja sijainnit alkaa silmukka alusta. [1]

Jäykkien kappaleiden halutaan usein vuorovaikuttavan toistensa kanssa. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että kappaleet törmäävät keskenään sen sijaan että kulkisivat vapaasti toistensa läpi. Jotta törmäyksiä voitaisiin simuloida, täytyy tietää, koskettavatko kappaleet keskenään. Jäykkien kappaleiden simuloinnissa suurin osa laskentatehosta kuluu kontaktipisteiden laskemiseen [4]. Kontaktipisteet tarkoittavat jäykän kappaleen pisteitä, jotka ovat kontaktissa toisen kappaleen kanssa.

Mitä monimutkaisempi muoto simuloitavalla kappaleella on, sitä laskennallisesti raskaampaa sen kontaktipisteiden laskeminen on [4][5]. Jotta monimutkaisia muotoja tarvitsisi käsitellä mahdollisimman harvoin, on törmäysten havaitseminen jaettu laajaan ja kapeaan vaiheeseen. Laajassa vaiheessa kappaleet mallinnetaan mahdollisimman yksinkertaisella muodolla, esimerkiksi pallolla, jonka sisälle kappaleen oikea muoto mahtuu. Laajan vaiheen tarkoituksena on karsia tarkemmasta tarkastelusta pois kappaleparit, jotka eivät selvästi ole kontaktissa. Jos pallot eivät leikkaa, eivät kappaleetkaan leikkaa eikä niiden kohdalla tarvitse törmäyksiä havaita tarkemmin. [1][5]

Mikäli pallot leikkaavat, siirrytään kapeaan vaiheeseen [1][5]. Kapeassa vaiheessa kappaleet mallinnetaan tarvittavalla tarkkuudella. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että pyritään löytämään mahdollisimman yksinkertainen muoto, jolla saadaan mallinnettua törmäykset halutulla tarkkuudella. Kappaleella saattaa esimerkiksi olla yksinkertainen ulkokuori, mutta hyvin monimutkainen muoto kuoren sisällä. Tällöin kappaleen sisäistä geometriaa ei kannata ottaa huomioon törmäyksiä havaitessa, koska se tekisi prosessista raskaamman parantamatta simulaation tarkkuutta. [4]

Jos kapeassa vaiheessa huomataan kappaleiden leikkaavan, muodostetaan kontaktipisteet. Törmäykset erotetaan lepokontaktista vertailemalla luotuja kontaktipisteitä edellisen törmäysten havaitsemiskerran kontaktipisteisiin. Lepokontaktissa kappaleet tuottavat samat kontaktipisteet joka kerta. Vastaavasti törmäävät kappaleet tuottavat uudet kontaktipisteet. Usein törmäävillä kappaleilla ei ole ennen törmäystä kontaktipisteitä ollenkaan. [1]

Kullakin simulaation hetkellä jäykkään kappaleeseen voi kohdistua voimia. Voimien lähteet vaihtelevat simulaatiotilanteesta toiseen. Yleisiä voimien lähteitä ovat painovoima, kitkavoima sekä side-ehtojen tuottamat voimat. Voima kuvataan vektorina, jolla on vaikutusviiva ja se tuottaa momentin jokaiseen kappaleen pisteeseen, jotka eivät ole vaikutusviivalla. Voimista muodostetaan differentiaaliyhtälöt, jotka ratkaistaan numeerisesti. Voimat tuottavat kappaleelle kiihtyvyyden, joka vaikuttaa kappaleen nopeuteen. Lopulta nopeudesta voidaan laskea kappaleen uusi sijainti. [1]

Kappaleiden törmätessä ne menevät sisäkkäin ja ne on työnnettävä taas erilleen. Yksi tapa on etsiä leikkauksen syvin kohta ja tuottaa voima kohdasta ulospäin [6]. Useimmat jäykkien kappaleiden simulaattorit käyttävät kuitenkin voimaimpulsseja, jotka tuottavat kappaleisiin äärettömän suuren voiman infinitesimaalisen lyhyen ajan. Voimaimpulssit vaikuttavat suoraan kappaleiden nopeuteen, jolloin kiihtyvyyden laskeminen voidaan jättää välistä. [1][7] Myös suoraan kappaleiden sijaintia muokkaava menetelmä on kehitetty [8] ja myöhemmin laajennettu toimimaan jäykkien kappaleiden kanssa [7][9].

3 Jäykkien kappaleiden kytkentä virtaussimulaatioihin

Kaikkia tilanteita ei voida simuloida käyttäen jäykkiä kappaleita. Esimerkiksi nesteillä on hyvin erilaiset ominaisuudet verrattuna jäykkiin kappaleisiin, minkä vuoksi ne simuloidaan käyttäen erilaisia menetelmiä. Jotta jäykät kappaleet ja nesteet vuorovaikuttaisivat keskenään täytyy niiden simulaatiot kytkeä. Simulaatioiden kytkeminen tarkoittaa sitä, että simuloidut nesteet ja jäykät kappaleet tuottavat toisiinsa voimia. Esimerkiksi nesteen virtauksen eteen asetettu jäykkä kappale muuttaa veden virtauksen suuntaa ja veden virtaus työntää jäykkää kappaletta.

Kytkeä voi olla joko yksisuuntaista tai kaksisuuntaista [3]. Yksisuuntaisessa kytkennässä vain neste vaikuttaa jäykkiin kappaleisiin tai toisinpäin. Simulaatio järvestä kelluvasta korkista voi olla yksisuuntaisesti kytketty. Järven vesi kelluttaa korkkia, mutta korkin vaikutus järveen jätetään huomiotta. Vastaavasti simulaatiopadon portista virtaavasta vedestä voi olla toiseen suuntaan yksisuuntaisesti kytketty. Simulaatiossa olennaista on miten pato estää veden virtausta, mutta veden vaikutus patoon voi olla merkityksetöntä. Jos kuitenkin halutaan tutkia veden virtauksen aiheuttamaa painetta patoon, täytyy käyttää kaksisuuntaista kytkentää. Kaksisuuntaisessa kytkennässä jäykkien kappaleiden simulaatio ja nestesimulaatio vaikuttavat molemmat toisiinsa [3].

Tämän luvun aluksi esitellään pohjatiedoksi erilaisia virtaussimuloinnin menetelmiä. Sitten selitetään yhdistetyn ja jaetun kytkennän erot. Lopuksi esitellään erilaisia menetelmiä jäykkien kappaleiden ja virtausten kaksisuuntaiseen kytkemiseen. Menetelmät esitellään erityisesti jäykkien kappaleiden simuloinnin näkökulmasta ja ne on jaettu kahteen ryhmään: menetelmiin joissa jäykät kappaleet simuloidaan polygoneilla ja menetelmiin joissa jäykät kappaleet simuloidaan hiukkasilla.

3.1 Virtaussimulaation menetelmiä

Virtaussimulaatioilla (eng. fluid simulation) simuloidaan epäkiinteiden aineiden kuten savun, tulen ja nesteiden liikettä. Yleisimmät virtaussimulaatiomenetelmät voidaan jakaa kolmeen ryhmään: laskentaverkkoa käyttäviin, hiukkasia käyttäviin ja molempia yhdistäviin hybridimenetelmiin.

Laskentaverkkoihin pohjautuvissa simulaatiomenetelmissä simuloitavalle alueelle määritellään laskentaverkko. Verkon jokaisessa solussa on muuttujina tallennettu simuloitavan virtauksen tila solun kattamalla alueella. Muuttujia ovat esimerkiksi lämpötila, paine, tiheys, massa ja nopeus. Muuttujista kootaan jatkuvat funktiot, jotka kuvaavat muuttujien muutosta koko laskentaverkon yli. Tämän jälkeen lasketaan soluihin uudet muuttujien arvot. Verkon solut eivät liiku simulaation edetessä vaan virtauksen liike mallintuu solujen muuttujien arvojen muutoksena. Esimerkiksi jos solurykelmän solujen massamuuttujan arvo lähtee kasvuun, tarkoittaa se sitä että alueelle virtaa vettä. [10, Luku 2]

Hiukkasiin pohjautuvissa menetelmissä virtaukset mallinnetaan käyttämällä hiukkasia. Hiukkaset ovat pisteitä, joilla on kaikilla oma sijainti ja virtauksen tilaan vaikuttavia muuttujia kuten lämpötila ja nopeus. Virtauksia simuloidaan simuloimalla hiukkasten liikkeitä, joiden kokonaisuus muodostaa simuloitavan virtauksen. Menetelmä muistuttaa läheisesti todellisia virtauksia, jotka muodostuvat atomeista ja molekyyleistä. [10, Luku 7]

Molemmilla menetelmillä on heikkoutensa ja vahvuutensa. Siksi on kehitetty hybridimenetelmiä, jotka pyrkivät yhdistämään molempien menetelmien hyvät puolet. Esimerkiksi "Particle-in-Cell"(PIC) metodissa hiukkasilla kuvataan virtauksen liikettä ja laskentaverkolla lasketaan paine ja varmistetaan, ettei virtaus puristu kaasaan. [10, Luku 7.6]

3.2 Yhdistetty ja jaettu kytkentä

Jäykkien kappaleiden ja virtaussimulaatioiden kytkennän menetelmät voidaan jakaa kahteen ryhmään sen mukaan ovatko ne jaettuja vai yhdistettyjä. Jaetuissa ratkaisuisissa nesteiden ja jäykkien kappaleiden liikkeitä ja vuorovaikutuksia kuvaavat yhtälöt ratkaistaan peräkkäin. Vastaavasti yhdistetyissä ratkaisuisissa eri yhtälöistä muodostetaan yksi yhtälö. [11][12][13][14][15] Jaetut menetelmät ovat laajemmin käytössä kuin yhdistetyt [13].

Yhdistetyn kytkennän vahvuus jaettuun kytkentään verrattuna on simulaation tarkkuus ja vakaus [11][12][13][14][15]. Koska jaetussa kytkennässä nesteiden ja jäykkien kappaleiden vuorovaikutusten yhtälöt lasketaan eri aikaan, eivät ne voi ottaa toisiaan huomioon. Tämä voi johtaa tilanteisiin, joissa simuloitu ympäristö ei toimi aidosti. [11][12] Esimerkiksi vesiaallon työntäessä laatikkoa toista laatikkoa kohti, ei aallon vuorovaikutusta laskettaessa oteta huomioon laatikoidenvälistä vuorovaikutusta. Tämä voi johtaa tilanteeseen, jossa laatikko työntyy toisen sisälle. Virhe voi tapahtua myös toiseen suuntaan tilanteessa, jossa jäykkä kappale työntää toisen kappaleen nesteeseen. Tilanteessa nesteen vuorovaikutuksia ei oteta huomioon, jolloin se ei väisty kappaleen tieltä ja nesteen tilavuus vähenee. [11]

Yhdistetyn kytkennä huono puoli on sen laskennallinen vaativuus [11][12][13]. Jäykkien kappaleiden ja nesteiden simulointiin käytettävät yhtälöt on tehty ratkaisemaan juuri niistä muodostuvia ongelmia. Tästä johtuen on laskennallisesti tehokkaampaa laskea yhtälöt erikseen [11][12][13]. Esimerkiksi nesteiden simuloinnissa on

enemmän vapausasteita kuin jäykillä kappaleilla, joka tuottaa ongelmia jäykkien kappaleiden simuloinnissa käytetyille menetelmille [11]. Erityisen haastavissa kytketyissä simulaatioissa yhdistetyt menetelmät voivat olla kuitenkin laskennallisesti tehokkaampia, koska jaetut menetelmät vaativat useamman iteraation ongelman ratkaisuun [15]. Yhdistetyissä menetelmissä laskentateho voidaan ottaa huomioon sen toteutuksessa. Esimerkiksi Takahashi ja Batty [11] mallintavat jäykkien kappaleiden välisiä törmäyksiä voimina tavallisesti käytettävien impulssien sijasta, koska voiman toteutus on samankaltainen nesteissä käytettävien paineen ja viskositeetin kanssa. He myös ratkaisevat kitkavoimia kuvaavat yhtälöt tehokkaammalla mutta vähemmän joustavalla metodilla.

Koska jaetussa kytkennässä yhdistetään kaksi toisistaan riippumatonta simulaatiomenetelmää, on koodin uudelleenkäyttö helpompaa. Tästä johtuen on helpompaa ja nopeampaa tehdä kytketty simulaatio käyttäen jaettua kytkentää. [15]

Yhdistetty kytkentä ei rajaa käytettävien jäykkien kappaleiden ja nesteiden simuloinnin menetelmiä. Takahashin ja Battyn [11] kehittämä menetelmä mallintaa jäykät kappaleet polygonimalleina ja käyttää laskentaverkkoon ja hiukkasiin perustuvaa hybridimenetelmää virtausten simulointiin. Probst ja Teschner [12] simuloivat nesteen sekä jäykät kappaleet hiukkasina.

3.3 Kytkentä polygonimalleilla

Luonnollinen lähtökohta jäykkien kappaleiden ja virtausten vuorovaikuttamisen simuloinnille on simuloida jäykät kappaleet polygonimalleina kuten luvussa 2 kuvattiin ja kytkeä se virtaussimulaatioon.

Virtausten voimat, jotka vaikuttavat kytkettyihin kappaleisiin tulevat paineesta ja viskositeetista. Viskositeetti kuvaa virran kykyä vastustaa muutosta [10, Luku 1]. Hunajalla on paljon korkeampi viskositeetti kuin vedellä, minkä voi havaita kaatamalla kumpaakin nestettä lasista. Matalan viskositeetin vesi virtaa lasista

nopeasti kun taas korkean viskositeetin hunaja vastustaa muutosta ja valuu lasista hitaammin. Monissa simulaatiotilanteissa simuloidaan vain matalan viskositeetin virtoja kuten vettä, jolloin viskositeetin voi jättää kokonaan pois simulaatiosta [10, Luku 1.6]. Virtaukset ja jäykät kappaleet voidaan myös kytkeä käyttäen pelkkää painetta, kun simuloidaan pelkkiä matalan viskositeetin virtoja [16].

Takahashi ja Lin [16] kehittivät menetelmän, jossa kytkettiin jäykät kappaleet virtauksiin käyttäen sekä painetta että viskositeettia, joka mahdollistaa korkean viskositeetin virtojen kytkemisen jäykkiin kappaleisiin. Menetelmässä paine ja viskositeetti simuloidaan yhdistetysti. Jäykkien kappaleiden kontaktit simuloidaan kuitenkin kytkennästä erillään. Tästä johtuen simulaatiotilanteet, joissa on kytkennän lisäksi paljon jäykkien kappaleiden välisiä törmäyksiä voi johtaa ongelmatilanteisiin kuten nesteen tilavuuden vähenemiseen. [16] Takahashi ja Batty [11] jatkoivat Takahashin ja Linin [16] työtä ja toivat jäykkien kappaleiden kontaktit yhdistettyyn ratkaisuun. Takahashi ja Batty [11] joutuivat kuitenkin ratkaisemaan kitkavoiman porrastetusti, koska kitka ja kontaktien normaalivoima ovat toisistaan riippuvaisia.

Laskentaverkkoon pohjautuvat virtaussimulaatiot jakavat simuloitavan alueen soluihin. Jäykät kappaleet ovat useimmissa simulaatioissa paljon suurempia kuin laskentaverkon yksittäiset solut, mutta jos simulaatioon kytketty jäykkä kappale on pienempi kuin yksittäinen solu, voi se johtaa ongelmatapauksiin [14]. Esimerkiksi solua pienempi kappale, kuten räjähdyksestä muodostuva sirpale, voi aiheuttaa virtaukseen paljon suuremman voiman kuin pitäisi, koska verkko pyrkii tasoittamaan virtauksen ja kappaleen nopeudet, vaikka pienellä kappaleella olisi todellisuudessa hyvin pieni vaikutus virtaukseen. [14]. Hyde ja Fedkiw [14] kehittivät menetelmän, joka mahdollistaa soluja pienempien jäykkien kappaleiden kytkennän laskentaverkkoon. Menetelmässä soluja pienemmät kappaleet lasketaan suorakulmioina, joiden tilavuus on sama kuin laskettavan kappaleen ja poikkipinta-ala sama kuin solun. Lasketuille suorakulmioille lasketaan paineen ja viskositeetin aiheuttamat voimat

ja virtauksen ja kappaleiden nopeudet päivitetään. Suorakulmiomalli mahdollistaa myös virtauksen ja kappaleiden liukumisen toistensa ohi tilanteessa, jossa niillä on päinvastaiset nopeudet. [14]

3.4 KytKentä hiukkasilla

Jäykät kappaleet on mahdollista simuloida käyttäen hiukkasia. Menetelmässä jäykkä kappale koostuu yksittäisistä hiukkasista, joiden kokonaisuus muodostaa jäykän kappaleen. Hiukkasilla simuloidun jäykän kappaleen muotoa täytyy erikseen ylläpitää. Tämä voi helpottaa jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentää jos virtaukset on simuloitu käyttäen hiukkasia, koska yksittäisen hiukkasen vuorovaikutusten kannalta ei ole väliä kuuluuko vuorovaikuttava hiukkanen jäykkään kappaleeseen vai virtaukseen [17][18][12].

Gissler ja muut [17] kehittivät Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)-pohjaisen menetelmän virtausten ja jäykkien kappaleiden simulointiin. SPH on hiukkasiin perustuva simulointitapa. Virtauksia simuloitaessa kukin hiukkanen tarkistaa ympärillään olevien naapurien määrän, josta lasketaan hiukkasten tiheys. Tiheydestä lasketaan paine. Kun kaikille hiukkasille on laskettu paine, muodostetaan painegradientti, josta saadaan uusi nopeus kullekin virtauksen hiukkaselle. [17]

Gisslerin ja muiden [17] kehittämässä metodissa myös jäykät kappaleet simuloidaan hiukkasilla. Jäykän kappaleen hiukkasten naapurien määrä tarkistetaan, josta lasketaan keinotekoinen tiheys. Tiheydestä lasketaan paine, josta muodostetaan painegradientti. Virtausten simuloinnista poiketen painegradientti lasketaan yhteen kaikilta kappaleen hiukkasilta. Tämä johtuu siitä että siinä missä virtaushiukkasen liikkeeseen vaikuttaa vain sen naapurien aiheuttama paine, jäykät kappaleet liikkuvat yhtenä kokonaisuutena, jolloin kunkin hiukkasen liikkeeseen vaikuttaa kaikkien muiden hiukkasten liike. [17] Toisin sanoen jos uima-altaaseen tiputtaa kiven, vaikuttaa se ensin tapahtumapaikan naapureihin ja sitten niiden naapureihin, lopulta

saavuttaen altaan toisen päädyn. Mutta jos jäykkää lautta nostaa toisesta päästä, vaikuttaa se heti myös laudan toiseen päähän.

Virtausten ja jäykkien kappaleiden hiukkaset ottavat toisensa huomioon laskiesaan naapureistaan tiheyttä. Täten virtaukset ja jäykät kappaleet tuottavat toisiinsa voimia. Virtausten ja jäykkien kappaleiden yhtälöt ratkaistaan moneen kertaan ennen sijaintien päivittämistä. Yhtälöt ratkaistaan erikseen, eli kyseessä on jaettu kytkentä, mutta ratkaisujen välillä ne päivittävät toisilleen tietoa. [17] Koska virtaukset ja jäykät kappaleet on simuloitu käyttäen samaa menetelmää, voi virtauksia muuttaa jäykiksi kappaleiksi ja toisin päin [17]. Esimerkiksi virtaava vesi voidaan jäädyttää jäykäksi jääkimpaleeksi, joka voidaan taas sulattaa vedeksi.

Probst ja Teschner [12] argumentoivat, että Gisslerin ja muiden [17] mallin heikkous on miten jäykkien kappaleiden välinen kitka simuloidaan. Gisslerin ja muiden [17] menetelmässä kitka lasketaan erillään jäykkien kappaleiden kontakteista, mikä aiheuttaa ongelmia lepokitkan ja liikemäärän säilymislain toteutumisessa [12]. Probst ja Teschner [12] kehittivät menetelmän, joka simuloi jäykät kappaleet ja virtaukset käyttäen SPH:ta pitkälti samalla tavoin kuin Gissler ja muut [17]. Merkittävimmät erot menetelmien välillä ovat kitkan sisällyttäminen jäykkien kappaleiden kontaktiin ja kytkennän yhdistäminen. Muutoksilla Probst ja Teschner [12] saivat simuloitua jäykkiä kappaleita sisältävät simulaatiot tarkemmin ja tehokkaammin.

Aikaisemissa menetelmissä jäykkien kappaleiden jäykkyys on säilytetty koko simulaation ajan siitä huolimatta, että kappaleet on simuloitu käyttäen hiukkasia. Negishi ja muut [18] kehittivät menetelmän, jossa kytkentä suoritetaan simuloimalla jäykät kappaleet virtauksena. Passively moving solid (PMS) menetelmässä jäykän kappaleen ja virtauksen vuorovaikutus simuloidaan kohtelemalla jäykkää kappaletta kuin virtausta, jonka jälkeen kappaleen muoto palautetaan.

PMS-menetelmän vahvuus on sen yksinkertaisuus, mutta sen heikkoutena on pidetty epätarkkuutta pyörimisliikkeessä. Tämän epätarkkuuden on kuitenkin arvioi-

tu johtuvan käytettävän virtaussimulaatiomenetelmän epätarkkuuksista. Hiukkasiin pohjautuvilla simulaatioilla on ollut haasteita toteuttaa kaikkia fysiikan lakeja kuten termodynamiikan toista lakia ja pyörimisliikemäärän säilymislakia. [18] Tästä johtuen Negishi ja muut [18] käyttivät simulaatiossaan fysiikan lakeja noudattavaa [19][20] moving particle hydrodynamics (MPH) menetelmää. Negishin ja muiden [18] suorittamissa kokeissa heidän kehittämänsä menetelmä noudatti termodynamiikan toista lakia ja liikemäärien säilymislakeja.

4 Pohdinta

Sekä polygonimalleilla, että hiukkasilla pystyy simuloimaan jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkettyä simulaatiota. Menetelmissä on kuitenkin eronsa.

Hiukkasten käyttäminen ei ole yleinen tapa mallintaa 3D-malleja, minkä vuoksi jos simulaatiossa halutaan käyttää olemassa olevia malleja, täytyy ne ensin muuttaa hiukkasiksi. Hiukkasista tehty malli on simulaation resoluutiosta riippuvainen, jolloin malli täytyy luoda uudestaan jos simulaation resoluutiota haluaa muuttaa. [21] Toisaalta hiukkasmalli mahdollistaa kontaktien mallinnuksen tarkkuuden säätämisen muuttamalla hiukkasten tiheyttä [12].

Hiukkasilla ei pysty mallintamaan täysin tasaista pintaa. Virhe on pieni, mutta se voi vaikuttaa simulaation tarkkuuteen. [21] Hiukkasmallin laskennallinen tehokkuus riippuu pitkälti siinä käytettävien hiukkasten määrästä. Tämä on hiukkasmallin vahvuus ja heikkous. Kahdessa ulottuvuudeltaan samankokoisissa malleissa on suunnilleen yhtä paljon hiukkasia, vaikka toinen olisi toista huomattavasti monimutkaisempi. Mallien kasvattaminen lisää hiukkasten määrää ja siten kasvattaa myös yksinkertaisen mallin vaatavuutta siinä missä suuret yksinkertaiset polygonimallit eivät ole juurikaan raskaampia pienempiin verrattuna. [12]

Jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentämenetelmän valintaan vaikuttaa moni tekijä. Onko tarkkuus vai laskentateho tärkeämpi? Onko simulaatiotilanteissa paljon jäykkien kappaleiden välisiä törmäyksiä vai onko virtaukset tärkeämpi osa simulaatiota? Onko kytkentä niin isossa osassa simulaatiota, että kytkentä kannattaa

olla yhdistetty vai onko jaetun kytkennän helppo toteutus tärkeämpi? Tästä syystä kytkentämenetelmiä on paljon hyvin erilaisia.

Kiinnostava esimerkki on Negishin ja muiden [18] menetelmä, jossa yhdistettiin tarkka virtaussimulaatiomenetelmä helposti toteutettavaan jäykkien kappaleiden menetelmään näin yhdistäen tarkkuuden ja helppouden. Menetelmässä käytetty moving particle hydrodynamics on vuodelta 2021 [19]. Menetelmä on siis paljon uudempi kuin yleisesti käytössä olevat hiukassimuloinnin menetelmät kuten SPH-menetelmä, joka kehitettiin 70-luvulla. Olisi mielenkiintoista tietää, voisiko MPH parantaa muita nykyisin käytössä olevia hiukkasiin pohjautuvia menetelmiä. Toisiko MPH lisää tarkkuutta esimerkiksi Probstin ja Teschnerin [12] yhdistettyyn menetelmään, joka käyttää SPH:ta?

Probstin ja Teschnerin [12] ja Takahashin ja Battyn [11] yhdistetyt menetelmät tuottivat molemmat vaikuttavia tuloksia. Valitettavasti Probst ja Tescher eivät verranneet menetelmäänsä Takahashin ja Battyn menetelmään. Vertaus olisi ollut mielenkiintoinen, koska molemmat olivat saaneet samankaltaisia tuloksia hyvin erilaisilla menetelmillä. Probstin ja Teschnerin [12] menetelmässä sekä jäykät kappaleet että virtaukset simuloidaan käyttäen SPH-menetelmää, jonka luulisi helpottavan yhdistetyn liikeyhtälön muodostamista. Olisikin mielenkiintoista nähdä tutkimus, jossa tutkittaisiin mahdollistaako jäykkien kappaleiden mallintaminen hiukkasilla helpomman yhdistetyn kytkennän kuin polygonimalleilla.

On mielenkiintoista nähdä miten menetelmien ja laskentatehon kehittyminen tulee vaikuttamaan yhdistettyjen ja jaettujen kytkentämenetelmien käyttöön. Tällä hetkellä jaettu kytkentä on yleisempi sen toteuttamisen helppouden ja laskentatehon vuoksi. On mahdollista, että yhdistetyn kytkennä tarjoama vakaus ja tarkkuus tekee siitä yleisemmän menetelmän, jos sen toteuttamiseen kehitetään helpompia menetelmiä.

Vaikka etenkin jaetuissa menetelmissä virtausten ja jäykkien kappaleiden simulointiin käytetyt menetelmät voivat olla mitä tahansa, tuntui niiden välillä olevan yhteys. Kaikki käsitellyt menetelmät, jotka simuloivat jäykät kappaleet polygoneina, käyttivät virtaussimulaatioissa laskentaverkkoja. Hiukkasilla jäykät kappaleet simuloineet menetelmät käyttivät taas puhtaasti hiukkasia käyttäviä virtauksia.

5 Yhteenveto

Tutkielmassa selvitettiin miten jäykkiä kappaleita simuloidaan ja miten ne kytketään virtaussimulaatioihin.

Jäykkä kappale on kappale, jonka muoto ei muutu. Jäykällä kappaleella on sijainti, asento, massa, etenemisnopeus ja kulmanopeus. Jäykän kappaleen liikkeet kuvataan sen massakeskipisteen kautta ja sillä on yhteensä kuusi vapausastetta. Side-ehdot ovat yhtälöitä ja epäyhtälöitä, joilla on muuttujina kappaleiden yleistetty sijainti ja nopeus ja niiden derivaatat. Side-ehdoilla rajoitetaan jäykkien kappaleiden liikkeitä esimerkiksi luomalla nivel kahden jäykän kappaleen välille. Simulaatio etenee vaiheissa. Ensin etsitään kaikki kappaleidenväliset leikkauspisteet, jonka jälkeen muodostetaan kappaleiden liikkeitä kuvaavat yhtälöt. Yhtälöt raktaisemalla saadaan kappaleille uuden sijainnit ja nopeudet.

Virtaussimulaatioiden menetelmät jakautuvat laskentaverkkoa käyttäviin, hiukkasikäyttäviin ja molempia käyttäviin menetelmiin. Laskentaverkkoihin perustuvissa menetelmissä virtauksen tilaa kuvaavat muuttujat on tallennettu paikallaan pysyviin verkon soluihin. Hiukkasmenetelmissä virtaus muodostuu liikkuvissa hiukkasissa, joihin on tallennettu tilan muuttujat. Hybridimenetelmissä osa tiedosta on soluissa ja osa hiukkasissa.

Virtaukset täytyy kytkeä jäykkiin kappaleisiin, jotta ne vuorovaikuttaisivat keskenään. Kytkentä voi olla yhdistetty tai jaettu. Yhdistetyssä kytkennässä jäykkien kappaleiden ja virtausten liikkeiden yhtälöistä muodostetaan yksi yhtälö kun taas

jaetussa kytkennässä yhtälöt ratkaistaan erikseen. Yhdistetty kytkentä tuottaa tarkempia ja vakaampia ratkaisuita, mutta voi olla raskaampi ja on vaikeampi toteuttaa.

Virtaukset voi kytkeä polygonimalleilla simuloituihin jäykkiiin kappaleisiin. Takahashi ja Lin [16] kehittivät menetelmän, jossa korkean virtauksen paine ja viskositeetti ratkaistaan yhdistetysti. Menetelmä mahdollisti jäykkien kappaleiden kytkemisen korkean viskositeetin virtauksiin. Takahashi ja Batty [11] kehittivät menetelmää yhdistämällä jäykkien kappaleiden kytkennän. Hyde ja Fedkiw [14] kehittivät menetelmän, jossa laskentaverkon yksittäisiä soluja pienemmät jäykät kappaleet saatiin kytkettyä virtaussimulaatioon laskemalla niille vaihtoehtoinen esitysmuoto, jonka poikkipinta-ala on sama kuin verkon solulla.

Jäykkien kappaleiden mallintaminen hiukkasilla helpottaa jäykkien kappaleiden kytkemistä hiukkasilla simuloituihin virtauksiin. Gissler ja muut [17] kehittivät smooth particle hydrodynamics menetelmään perustuvan jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkentätavan. Probst ja Teschner [12] kokivat Gisslerin ja muiden [17] menetelmän heikkouden olevan kitkan mallinnuksessa ja kehittivät yhdistetyn kytkentämenetelmän, jossa kitka toteutetaan liikemäärän säilymislain. Negishi ja muut [18] yhdistivät fysiikan lakeja noudattavan moving particle hydrodynamics menetelmän ja helposti toteutettavan ja kevyen passively moving solid menetelmän. Negishi ja muut [18] uskoivat tarkan virtaussimulaatiomenetelmän korjaavan PMS-menetelmässä havaitut heikkoudet.

Eri kytkentämenetelmillä on omat vahvuutensa ja heikkoutensa. Harvinaisempi hiukkasiin perustuva mallinnus voi olla työläämpää toteuttaa, koska valmiista 3D-malleista useimmat on tehty polygonimalleina. Hiukkasten ja polygonimallien laskennallinen vaatavuus kasvaa eri tilanteissa. Kappaleen koon kasvattaminen ei tee polygonimallista paljoakaan raskaampaa, mutta voi lisätä simuloitavien hiukkasten

määrää suuresti. Toisaalta mallin monimutkaisuuden lisääminen ei kasvata tarvittavien hiukkasten määrää, mutta kasvattaa tarvittavien polygonien määrää.

Jäykkien kappaleiden ja virtausten kytkemiseen on kehitetty monia erilaista menetelmää, jotka sopivat erilaisiin tilanteisiin. Uusia menetelmiä kehitetään, joista jotkut mahdollistavat uusien tilanteiden simuloimisen ja toiset mahdollistavat tunnettujen tilanteiden tarkemman ja tehokkaamman simuloinnin. Simuloidessa täytyy aina tehdä valinta laskentatehon ja tarkkuuden välillä, mutta menetelmien kehityessä, saavutettava tarkkuus tulee paranemaan kaikilla laskentatehoilla.

Lähdeluettelo

- [1] J. Bender, K. Erleben ja J. Trinkle, ”Interactive Simulation of Rigid Body Dynamics in Computer Graphics”, Computer Graphics Forum, vol. 33, 2014. DOI: 10.1111/cgf.12272.
- [2] V. Kunttu, ”Kvaterniot ja niiden yhteys avaruuden rotaatioihin”, 2019. url: <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/64650>.
- [3] M. Carlson, P. Mucha ja G. Turk, ”Rigid fluid: animating the interplay between rigid bodies and fluid”, ACM Transactions on Graphics, vol. 23, 2004. DOI: 10.1145/1015706.1015733.
- [4] A. Thakur ja S. K. Gupta, ”Improving performance of rigid body dynamics simulation by removing inaccessible regions from geometric models”, Computer Aided Design, vol. 44, 2012. DOI: 10.1016/j.cad.2012.06.007.
- [5] L. Lazaridis, M. Papatsimouli, K.-F. Kollias, P. Sarigiannidis ja G. F. Fragulis, ”Hitboxes: A Survey About Collision Detection in Video Games”, teoksessa HCI in Games: Experience Design and Game Mechanics, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-77277-2_24.
- [6] E. Drumwright, ”A Fast and Stable Penalty Method for Rigid Body Simulation”, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 14, 2008. DOI: 10.1109/TVCG.2007.70416.

-
- [7] M. Müller, M. Macklin, N. Chentanez, S. Jeschke ja T.-Y. Kim, "Detailed Rigid Body Simulation with Extended Position Based Dynamics", Computer Graphics Forum, vol. 39, 2020. DOI: 10.1111/cgf.14105.
- [8] M. Müller, B. Heidelberger, M. Hennix ja J. Ratcliff, "Position based dynamics", Journal of Visual Communication and Image Representation, vol. 18, 2007. DOI: 10.1016/j.jvcir.2007.01.005.
- [9] C. Deul, P. Charrier ja J. Bender, "Position-based rigid-body dynamics", Computer Animation and Virtual Worlds, vol. 27, 2016. DOI: 10.1002/cav.1614.
- [10] R. Bridson, Fluid Simulation for Computer Graphics, 2. painos. 2015. DOI: 10.1201/9781315266008.
- [11] T. Takahashi ja C. Batty, "Monolith: a monolithic pressure-viscosity-contact solver for strong two-way rigid-rigid rigid-fluid coupling", ACM Transactions on Graphics, vol. 39, 2020. DOI: 10.1145/3414685.3417798.
- [12] T. Probst ja M. Teschner, "Monolithic Friction and Contact Handling for Rigid Bodies and Fluids Using SPH", Computer Graphics Forum, vol. 42, 2023. DOI: 10.1111/cgf.14727.
- [13] Z. Qian, L. Wang, C. Zhang ja Q. Chen, "A highly efficient and accurate Lagrangian–Eulerian stabilized collocation method (LESCM) for the fluid–rigid body interaction problems with free surface flow", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 398, 2022. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115238.
- [14] D. A. Hyde ja R. Fedkiw, "A unified approach to monolithic solid-fluid coupling of sub-grid and more resolved solids", Journal of Computational Physics, vol. 390, 2019. DOI: 10.1016/j.jcp.2019.03.049.

-
- [15] M. Akbay, N. Nobles, V. Zordan ja T. Shinar, "An extended partitioned method for conservative solid-fluid coupling", ACM Transactions on Graphics, vol. 37, 2018. DOI: 10.1145/3197517.3201345.
- [16] T. Takahashi ja M. C. Lin, "A Geometrically Consistent Viscous Fluid Solver with Two-Way Fluid-Solid Coupling", Computer Graphics Forum, vol. 38, 2019. DOI: 10.1111/cgf.13618.
- [17] C. Gissler, A. Peer, S. Band, J. Bender ja M. Teschner, "Interlinked SPH Pressure Solvers for Strong Fluid-Rigid Coupling", ACM Transactions on Graphics, vol. 38, 2019. DOI: 10.1145/3284980.
- [18] H. Negishi, M. Kondo, H. Takahashi, H. Amakawa, S. Obara ja R. Kurose, "Fluid-rigid body coupling simulations with the passively moving solid model based on a physically consistent particle method", Physics of Fluids, vol. 36, 2024. DOI: 10.1063/5.0190167.
- [19] M. Kondo, "A physically consistent particle method for incompressible fluid flow calculation", Computational Particle Mechanics, vol. 8, 2021. DOI: 10.1007/s40571-020-00313-w.
- [20] M. Kondo, T. Fujiwara, I. Masaie ja J. Matsumoto, "A physically consistent particle method for high-viscous free-surface flow calculation", Computational Particle Mechanics, vol. 9, 2022. DOI: 10.1007/s40571-021-00408-y.
- [21] S. Miyamoto ja S. Koshizuka, "Unified wall boundary treatment for fluid-rigid body strong coupling in a particle method", Mechanical Engineering Journal, vol. 10, 2023. DOI: 10.1299/mej.23-00127.