TURUN YLIOPISTO

Eulerin sarjasta ja arkustangentista

Aurora Willman

LuK-tutkielma
Toukokuu 2024

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

AURORA WILLMAN: Eulerin sarjasta ja arkustangentista
LuK-tutkielma, 17 s.
Matematiikka
Toukokuu 2024

Tutkielmassa tarkastellaan kahta tapaa laskea likiarvoja luvulle pii käyttäen arkustangentin sarjakehitelmää ja Eulerin sarjan summaa. Aluksi käsitellään oleellista teoriaa ja sitten tulosten todistukset.

Arkustangentin sarjakehitelmä johdetaan integroimalla sopiva geometrinen sarja ja sen suppenevuus laajennetaan suppenemisvälin päätepisteisiin Abelin lauseen avulla. Tuloksena saadaan hitaasti kohti lukua pii suppeneva sarja.

Riemannin zeeta-funktio laskee yliharmonisten sarjojen summia ja zeeta-funktion arvo pisteessä $s = 2$ on Eulerin sarjan summa. Eulerin sarjan summa lasketaan kahdella eri tavalla käyttämällä kaksinkertaista integraalia. Ensimmäisessä lähestymistavassa saadaan suoraan Eulerin sarjan summa, kun taas toisessa tehdään muuttujanvaihtoja ja sijoituksia integraalissa, jotta voidaan hyödyntää symmetriaa. Näin saadaan kyseisen integraalin tulos lausuttua luvun pii avulla. Lasketaan myös summa muunnelmasarjalle Eulerin sarjan parittomilla indekseillä myös kaksinkertaisen integraalin avulla hyödyntäen muuttujanvaihdoksia. Lopuksi johdetaan koko sarjan summasta sekä parittomien indeksien sarjan summasta summa myös parillisten indeksien sarjalle.

Asiasanat: sarjateoria, sarjakehitelmä, approksimointi, Eulerin sarja, zeeta-funktio, arkustangentti, pii.

Sisällys

1 Johdanto

Tämä tutkielma on kaksiosainen ja sen pääaiheina ovat arkustangentin potenssisarjakehitelmä, sekä Eulerin sarja ja siitä johdettu muunnelma. Molemmat aiheet käsittelevät siis sarjateoriaa.

Sarjateoria on matemaattisen analyysin osa-alue differentiaalilaskennan ohella. Sen tärkeimpiä kysymyksiä ovat sarjan suppeneminen kohti jotain äärellistä lukua tai hajaantuminen kohti äärettömyyttä tai hajaantuminen muuten. Suppenevan sarjan tapauksessa on myös olennaista itse summan määrittäminen. Potenssisarjan kohdalla taas olennaista on sen suppenemisvälin määrittäminen, tällöin sarjan summa riippuu muuttujan arvosta, eikä sitä pystytä aina tarkasti määrittelemään. Koska sarjojen avulla voidaan esimerkiksi approksimoida funktioita, ratkaista differentiaaliyhtälöitä ja laskea vaikeita integraaleja, sarjateorialla on paljon sovelluksia. Näitä ilmenee sekä muilta matematiikan osa-alueilta että muista kvalitatiivisistä tieteistä. Esimerkiksi Fourierin ja Taylorin sarjat ovat tehokkaita funktioiden approksimaatiotyökaluja. Koska sarjateoria on matemaattisen analyysin osa-alue, tuntuukin intuitiiviselta, että siitä saadaan työkaluja funktioiden kuvaajien tulkitsemiseen ja analysointiin.

Eulerin sarjan summan laskeminen on niin sanottu Baselin ongelma, joka on sekä analyysin että lukuteorian aloja koskettava kuuluisa historiallinen ongelma. Vaikka nykyään siihen on olemassa useita eri todistuksia, esitellään tässä työssä niistä vain yksi. Euler yleisti ongelman teoriaa huomattavasti, ja hänen työnsä inspiroi myöhemmin Bernhard Riemannia ja oli merkittävä tekijä Riemannin zeeta-funktion kehittämisessä.

Luvussa 2 tarkastelen arkustangentin sarjakehitelmää ja sen johtamista integroimalla erästä potenssisarjaa. Pohjustan tätä aihetta yleisellä potenssisarjojen teorialla sekä Taylorin sarjan teorialla. Käsittelen myös hieman funktioiden approksimointia sarjakehitelmien avulla, joka onkin yksi tärkeimpiä sarjateorian sovellusalueita.

Luvussa 3 lasken Eulerin sarjan summan. Esittelen myös Eulerin sarjasta muunnelman vain parittomille summausindekseille, ja todistuksen sen summalle. Näistä tuloksista johdan myös summan parillisten indeksien käänteislukujen sarjalle.

Molemmat aiheeni liittyvät lukuun π. Arkustangentin sarjakehitelmän avulla voidaan tehdä approksimaatioita luvulle π ja tämä samainen luku esiintyy myös Eulerin sarjan summassa. Tutkielman päätulosten todistukset ovat lähteestä [7].

2 Sarjoista ja arkustangentista

Tässä luvussa olen käyttänyt lähteitä [4] ja [1].

Määritelmä 2.1. *Geometrinen sarja* on

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

missä a on sarjan ensimmäinen termi ja vakio q on peräkkäisten termien suhde.

Lause 2.2. *Geometrinen sarja suppenee, kun $|q| < 1$, ja sen summa on tällöin*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Lause 2.3. *Geometrinen potenssisarja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

on origokeskeinen ja se suppenee, kun suhdeluku $q = x$ on itseisarvoltaan pienempi kuin 1. Toisin sanoen sen suppenemissäde on 1. *Sen summa on $\frac{1}{1-x}$, kun $x \in (-1, 1)$.*

Esimerkki 2.4. Sijoittamalla geometrisen potenssisarjan lausekkeeseen muuttujan x paikalle $(-x^2)$ saadaan

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Näin saatu vuorotteleva geometrinen potenssisarja, jonka suhdeluku on x^2, suppenee, kun $|x^2| < 1$ eli kun $|x| < 1$.

Esimerkki 2.5. Merkitsemällä summan $\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n$ kaikki termit indeksistä $n+1$ alkaen geometrisen sarjan summana, jonka ensimmäinen termi $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$ ja suhdeluku $q = -t^2$, saamme yhtälön

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Tiedetään, että harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu. Harmoninen sarja on yksi esimerkki niin kutsutusta p-sarjasta, jossa $p = 1$.

Määritelmä 2.6. Olkoon p reaaliluku. Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

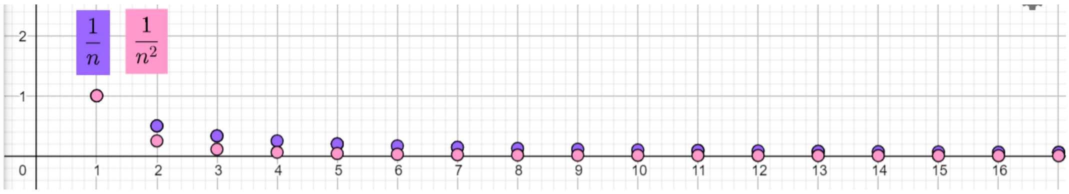
on *p-sarja.*

Lause 2.7. *p-sarja suppenee, kun $p > 1$, ja hajaantuu, kun $p \leq 1$.*

Määritelmä 2.8. *Eulerin sarja* on p-sarjan tapaus, jossa $p = 2$, jossa summataan luonnollisten lukujen käänteislukujen neliöitä:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Georg Friedrich Bernhard Riemann (17.9.1826 – 20.7.1866) oli saksalainen matemaatikko, joka teki merkittävää työtä erityisesti matemaattisen analyysin saralla. Mm. juuri zeeta-funktio kantaa hänen nimeään. Kyseisellä funktiolla on lukuisia sovelluksia esimerkiksi fysiikan, todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen aloilla ja sillä on suuri merkitys merkitys analyyttisessa lukuteoriassa. Riemann pyrki ratkaisemaan ongelman koskien alkulukujen lukumäärää ja jakaantumista reaalilukujen joukkoon. Tämä pyrkimys johti kyseisen funktion kehittämiseen.



Kuva 1: p-sarjojen $p = 1$ ja $p = 2$ alkioita

Määritelmä 2.9. *Riemannin zeeta-funktio* on sellaisen kompleksimuuttujan s, jonka reaaliosa on suurempi kuin yksi, $\Re(s) > 1$, funktio, joka määritellään kaavalla

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sen voi ajatella p-sarjojen yleistyksenä kompleksitasoon. Eulerin sarjan summan voikin ilmaista zeeta-funktion avulla:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Riemannin hypoteesi on konjektuuri, joka koskee zeeta-funktion nollakohtien sijaintia. Se on edelleen tänäkin päivänä yksi kuuluisimpia matematiikan avoimia tutkimusongelmia.

Määritelmä 2.10. *Potenssisarja* on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

oleva sarjakehitelmä, missä luvut a_n ovat vakioita ja x_0 on potenssisarjan *suppenemiskeskus*.

Potenssisarja on siis ikään kuin päättymätön polynomi. Tällaisilla sarjakehitelmillä on useita sovelluksia, kuten niistä on funktioiden approksimointi. Funktioiden approksimoinnin yhteydessä piste x_0 on se piste, missä funktiota approksimoidaan.

Funktion $f(x)$ potenssisarjakehitelmä on sekä integroituva että derivoituva suppenemisalueessaan. Potenssisarjojen derivointi ja integrointi tapahtuu termeittäin kuten äärellisillä polynomeillakin. Integroidulla tai derivoidulla potenssisarjalla on sama suppenemisalue kuin alkuperäisellä sarjalla.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots$$
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - x_0)^{n+1}}{n+1} = a_0(x - x_0) + \frac{a_1(x - x_0)^2}{2} + \dots$$

Esimerkiksi laskimet hyödyntävät sarjakehitelmiä juuri trigonometristen funktioiden arvojen laskemisessa. Sarjakehitelmien avulla saatavat polynomimuotoiset arviot mahdollistavat yksinkertaisempien laskutoimitusten käytön. Joskus funktion kuvaajaa voi olla vaikea laskea. Tällöin voi olla hyödyllistä approksimoida funktiota jollain helpommin käsiteltävällä menetelmällä. Yksi käytetyimmistä sarjakehitelmistä on Taylorin sarja, jonka avulla approksimoidaan funktiota potenssisarjalla. Taylorin sarjakehitelmän etuna on se, että potenssisarjoja on helppo käsitellä ja approksimaation virhe on aina tunnettu. Varjopuoli on se, että tutkittavasta funktiosta täytyy laskea useamman asteen derivaattoja. Taylorin sarjakehitelmän johtaminen suoraan derivoimalla ei siis ole kovin käyttökelpoista sellaisille funktioille, joiden derivointi on haastavaa. Näin käy esimerkiksi juuri arkustangenin tapauksessa.

Potenssisarjan avulla approksimoinnissa ideana on tutkia funktiota jollain välillä tai jossain tietyssä pisteessä. Potenssisarjana Taylorin sarjakehitelmällä on joku tietty suppenemisalue $(x_0 - R, x_0 + R)$, jonka sisällä funktiota voi approksimoida kyseisellä sarjakehitelmällä. Tämän alueen pisteissä $a \in (x_0 - R, x_0 + R)$ arvioitavan funktion arvo $f(a)$ on sama kuin sen Taylorin sarjakehitelmän summa $S(a)$.

Määritelmä 2.11. Avoimella välillä $(x_0 - r, x_0 + r)$ jatkuva ja derivoituva reaaliarvoinen funktio $f(x)$ voidaan kirjoittaa *Taylorin sarjaksi*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Sarjakehitelmät ovat äärettömiä summia. Approksimoitaessa funktiota $f(x)$ Taylorin sarjakehitelmän avulla käytetään äärellistä pätkää koko sarjakehitelmästä eli n-asteista polynomia.

Määritelmä 2.12. Funktion $f(x)$ n-asteinen *Taylorin polynomi* pisteessä x_0 on

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0^2) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Taylorin polynomin antamasta arviosta tulee sitä tarkempi, mitä korkeamman asteen polynomia käyttää. Toisaalta myös pyöristysvirhe kasvaa laskettavien termien määrän kasvaessa. Arkustangentilla on seuraavanlainen Taylorin sarjakehitelmä

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \dots, \text{ kun } |x| \leq 1.$$

Esitän tälle todistuksen kohdassa 2.1.2 Tämän sarjakehitelmän löysivät toisistaan riippumatta matemaatikko ja astronomi James Gregory vuonna 1671 sekä matemaatikko ja yleisnero Gottfried Willhem Leibniz vuonna 1671. [5][6]

Lause 2.13 (Abelin lause)**.** *Potenssisarjan summa on jatkuva funktio jokaisessa sen suppenemisvälin pisteessä. Erityisesti jos* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *suppenee jollain* $R > 0$*, niin*

$$\lim_{x \to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

ja jos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ *suppenee, niin*

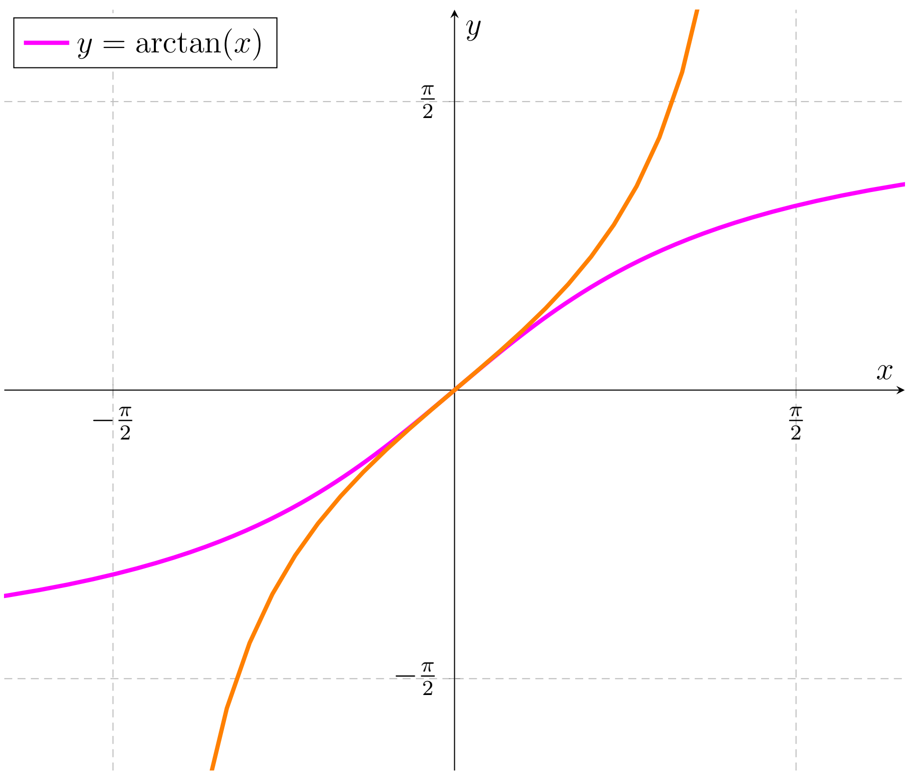
$$\lim_{x \to -R+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

2.1 Arkustangentista

2.1.1 Arkustangentti

Trigonometrinen funktio tangentti on kulman funktio, joka voidaan määritellä esimerkiksi yksikköympyrään piirrettyjen janojen suhteena. Toinen tapa on määritellä tangentti sarjakehitelmän avulla. Arkustangenttifunktio $\arctan x$ on tangenttifunktion käänteisfunktio, jonka antamat arvot ovat kulmia. Se on määritelty koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$, ja se saa arvoja välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Arkustangentin voi määritellä myös tangentin avulla: kun x on välillä $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ja y on reaaliluku, niin

$$y = \tan x \quad \text{jos ja vain jos} \quad x = \arctan y.$$



Kuva 2: Tangentin ja arkustangentin kuvaajat

Lause 2.14. *Arkustangentin derivaatta on*

$$\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}.$$

Seuraus 2.15.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$$

Tulosta on haastava johtaa Taylorin sarjana, koska arkustangentin korkeamman kertaluvun derivaatat ovat vaikeita laskea. Integrandissa oleva lauseke näyttää kovasti geometrisen sarjan summalta.

Lemma 2.16. *Tunnetaan seuraava tulos arkustangentille*

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,dt = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C.$$

Todistus. Sijoituksella $t = au \Leftrightarrow u = \frac{t}{a}$, jolloin $dt = a\,du$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+t^2}\,dt &= \int \frac{adu}{a^2+(au)^2} = \int \frac{adu}{a^2(1+u^2)} \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan(u) + C \\
&= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + C.
\end{aligned}$$

□

Esimerkki 2.17. Pohditaan hieman miten integraali $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ käyttäytyy:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \ldots\,dx \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n\,dx \\
&= \int 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.
\end{aligned}$$

Näyttäisi, että jos tätä sarjaa integroi termeittäin, tulokseksi saadaan vuorotteleva geometrinen sarja

$$C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots,$$

missä C on integroimisvakio.

2.1.2 Arkustangentin sarjakehitelmä

Johdetaan vielä täsmällisesti arkustangentin sarjakehitelmä.

Lause 2.18. *Arkustangentille on olemassa seuraava sarjakehitelmä:*

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \; \textit{kun } |x| \leq 1.$$

Todistus. Seurauksesta 2.15 saadaan

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)}\, dt = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x.$$

Integroimalla tätä molemmilta puolilta esimerkin 2.17 tavoin saadaan

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \, dt.$$

Esimerkin 2.5 tavoin voimme avata integraalin sisällä olevan geometrisen summan seuraavalla tavalla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Merkitään

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Nyt saamme integroimalla

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x).$$

Integrandin nimittäjä, $1 + t^2 \geq 1$, joten

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Koska tutkittava sarja suppenee vain välillä $|x| \leq 1$, riittää integraalin tarkastelu tällä välillä.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = \begin{cases} 0, & \text{jos } |x| \leq 1 \\ \infty, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Siis luvun n kasvaessa suureksi summan viimeinen termi R_n lähestyy nollaa. Koska funktio $\arctan x$ on jatkuva pisteissä $x = -1$ ja $x = 1$, lauseen 2.13 nojalla sarja suppenee myös välin päätepisteissä. Näin ollen arkustangentilla on olemassa sarjakehitelmä

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \; \text{kun } |x| \leq 1.$$

□

2.2 Luvun π approksimointi sarjakehitelmien avulla

Luku π on matemaattinen vakio, jonka voi määritellä esimerkiksi ympyrän kehän ja halkaisijan suhteena. Sen likiarvon laskemiseksi on kehitetty useita eri approksimoinitapoja. Yksi tapa arvioida lukua π ovat sarjakehitelmät. Sijoittamalla arkustangentin sarjakehitelmään $x = 1$ saadaan *Leibnizin kaava:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{\pi}{4} = \arctan 1.$$

Tämä tarkoittaa, että luvulle π on olemassa sarjakehitelmä

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \ldots$$

Tämä sarja suppenee kuitenkin kovin hitaasti, joten se ei ole kovin hyvä työkalu π:n desimaalien arvioimiseen, kun haluamme tarkan arvion. Termejä pitäisi laskea tällöin kovin monta: jo siihen, että saataisiin kahden desimaalin tarkkuinen arvio, $\pi \approx 3,14$, pitäisi laskea summasta 294 termin osasumma.

Esimerkki 2.19. [7] Arkustangentin sarjakehitelmä suppenee nopeiten, kun x on lähellä suppenemiskeskusta, nollaa. Tästä syystä, kun haluaa arvioida lukua π arkustangentin avulla, kannattaa hyödyntää trigonometrisiä kaavoja. Tangentille on voimassa tangentin yhteenlaskukaava:

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

Jos merkitsemme

$$\alpha = \arctan \frac{1}{2}, \; \beta = \arctan \frac{1}{3},$$

niin

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

ja

$$\frac{\pi}{4} = \alpha + \beta = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Nyt voidaan hyödyntää lausetta 2.18 arvioimaan lausekkeita $\arctan \frac{1}{2}$ sijoittamalla siihen $x = \frac{1}{2}$ ja $\arctan \frac{1}{3}$ sijoittamalla $x = \frac{1}{3}$. Kertomalla näiden tulosten summan luvulla 4 saadaan luku π.

3 Eulerin sarja

Kysymys Eulerin sarjan summasta tunnetaan *Baselin ongelmana* ja tähän ensimmäisen ratkaisun esitti vuonna 1734 sveitsiläinen matemaatikko ja fyysikko Leonhard Euler (15.7.1707-18.9.1783). Tämä tulos loi yhteyden luvun π ja alkulukujen välille. Yksi tämän tuloksen merkittävä tulkinta onkin se, että se tuottaa ensimmäisen epätriviaalin arvon Riemannin zeeta-funktiolle, jota esittelin tarkemmin kohdassa 2. Riemannia inspiroi nimenomaan Eulerin vuonna 1743 esittämä todistus, mutta en käsittele sitä tässä tutkielmassa.

Tässä luvussa esittelemäni historia on lähteestä [2].

3.1 Eulerin sarjan summa

Käsittelemäni todistus saadaan eräästä kaksinkertaisesta integraalista suhteellisen yksinkertaista, mutta varsin kekseliästä koordinaattimuunnosta hyödyntäen.

Tässä osiossa hyödynnän lähdettä [3]. Todistuksessa hyödynnetään lausetta 2.2 geometrisen sarjan summalle.

Joskus integroitava lauseke voidaan saada helpommin käsiteltävään muotoon suorittamalla muuttujanvaihdos. Muuttujan vaihdos voidaan tehdä yhden tai useamman muuttujan funktiolle. Ideana on hyödyntää apumuuttujia (kahden muuttujan tapauksessa u ja v) ja ilmaista integrandi näiden avulla.

Lause 3.1. *Kaksinkertaisen integraalin*

$$I = \int_S f(x,y)\, dxdy$$

laskemiseksi voidaan tehdä muuttujanvaihto ilmaisemalla alkuperäiset muuttujat x ja y apumuuttujien u ja v avulla: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, jos apumuuttujien avulla ilmaistun integroimisalueen $(u,v) \in T$ vastaavuus alkuperäiseen integroimisalueeseen $(x,y) \in S$ on jatkuva ja bijektiivinen. Tällöin

$$I = \int_T f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du\, dv,$$

missä $\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|$ on kyseisen muuttujanvaihdon Jacobin determinantti:

$$\left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Lause 3.2. *Eulerin sarjan summa on*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Todistus. Tämä todistus tapahtuu tarkastelemalla kaksinkertaista integraalia, missä integroimisalue on yksikköneliö ja integrandina on funktio $\frac{1}{1-xy}$:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy.$$

Kyseinen integraali on epäoleellinen, sillä kohdassa $x = y = 1$ integrandissa tapahtuu nollalla jakaminen ja sen arvo lähestyy ääretöntä. Laskemme integraalin arvon kahdella tavalla.

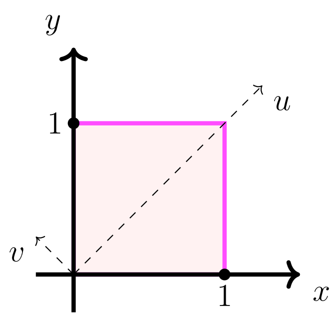
Ensiksi lähdetään liikkeelle kaksoisintegraalista ja johdetaan siitä melko suoraviivaisesti integroimalla $\zeta(2)$. Tässä laajennamme murtolausekkeen $\frac{1}{1-xy}$ geometriseksi sarjaksi lauseen 2.2 yhtälön mukaisesti. Integroimisaluessa integrandia vastaavan geometrisen sarjan suhdeluku $|xy|<1$, joten se suppenee.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\,dx\,dy \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^n\,dx\right)\left(\int_0^1 y^n\,dy\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)^2} = \zeta(2)\end{aligned}$$

Näin saatu äärellinen arvo kaksoisintegraalille I osoittaa, että epäoleellinen integraali suppnenee. Toinen tärkeä seikka on, että lähtökohdasta $\zeta(2)$ pääsee myös kyseiseen kaksoisintegraaliin. Siten tutkittavan sarjan voi ilmaista integraalin I avulla:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Lasketaan seuraavaksi integraalin I arvo toisella tavalla ja tehdään koordinaattimuunnos lauseen 3.1 mukaisesti: $u = \frac{y+x}{2}$, $v = \frac{y-x}{2}$. Nyt integroimisalue on uv-tasossa neliö, jonka sivun pituus on $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (kuva 4).

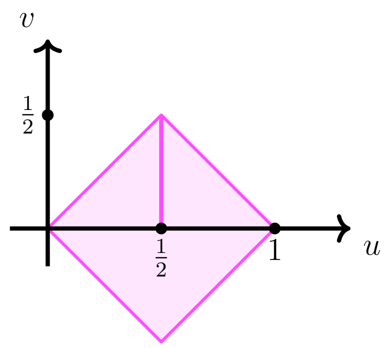


Kuva 3: Integroimisalue ennen koordinaattimuunnosta

Sijoittamalla $x = u - v$, $y = u + v$ integrandiin saadaan

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-(u-v)(u+v)} = \frac{1}{1-u^2+v^2}.$$

Koska integroimisalue on nyt pinta-alaltaan puolet integroimisalueesta ennen koordinaattimuutosta, täytyy integrointimitta kertoa kahdella. Tämä johtuu siitä, että



Kuva 4: Integroimisalue koordinaattimuunnoksen jälkeen

kyseisen muuttujanvaihdoksen Jacobin determinantti on

$$\det(J) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial(u-v)}{\partial u} & \frac{\partial(u-v)}{\partial v} \\ \frac{\partial(u+v)}{\partial u} & \frac{\partial(u+v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Näin saatu uusi integroimisalue ja -funktio ovat molemmat symmetriset u-akselin suhteen. Integroimisalue jaetaan luonnollisesti kahteen osaan. Näin saadaan

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du.$$

Tässä kohtaa voimme hyödyntää lemmaa 2.16 muuttujan v suhteen integroimiseen. Merkitsemällä

$$a = \sqrt{1-u^2} \text{ ja } t = v$$

saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} &= \int_0^u \frac{dt}{a^2+t^2} \\ &= \Big|_0^u \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \end{aligned}$$

ja samalla tavalla

$$\int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right).$$

Näiden avulla integraali saadaan muotoon

$$I = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

Merkitään

$$g(u) = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right),$$

$$\alpha(u) = \arctan u, \qquad \alpha'(u) = \frac{1}{1+u^2},$$

$$\beta(u) = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \beta'(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Soveltamalla ketjusääntöä funktioon $g(u)$ saadaan

$$g'(u) = (\alpha' \circ \beta(u))\beta'(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2}\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Samoin merkitsemällä

$$h(u) = \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right),$$

ja

$$\beta(u) = \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\ ,\ \beta'(u) = \frac{-1}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}$$

ja derivoimalla ketjusäännön avulla saamme

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{1}{\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2+1}\frac{d}{du}\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2+1}\frac{-1}{(u+1)\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Voimme siis soveltaa kaavaa

$$\int_a^b f'(x)f(x)dx = \Big|_a^b \left(\frac{1}{2}f(x)^2\right) = \frac{1}{2}f(b)^2 - \frac{1}{2}f(a)^2.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} g'(u)g(u)\,du + 4\int_{\frac{1}{2}}^1 -2h'(u)h(u)\,du \\ &= 2\Big|_0^{\frac{1}{2}} g(u)^2 - 4\Big|_{\frac{1}{2}}^1 h(u)^2 \\ &= 2g\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2g(0)^2 + 4h\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4h(1)^2 \\ &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 + 4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

3.2 Muunnelma Eulerin sarjasta

Eulerin sarjasta on johdettavissa toinenkin lukuun π liittyvä sarja. Alkuperäisestä sarjasta voidaan valikoida vain parillisten tai parittomien summausindeksien termit. Esitän parittomien summausindeksien muunnelmasarjan summalle samankaltaisen todistuksen kuin edellä. Tässäkin arvioidaan sopivaa integraalia muuttujanvaihdoksen avulla. Todistuksen kehittivät Beukers, Calabi ja Kolk.[7]

Käänteislukujen neliöiden summa saa parillisilla summausindekseillä n muodon

$$\sum_{n=2, n=parillinen}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

ja parittomilla indekseillä muodon

$$\sum_{n=1, n=pariton}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Lause 3.3. *Käänteislukujen neliöiden sarjan summalle parittomilla indekseillä pätee*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Todistus. Kuten lauseen 3.2 todistuksessa, tutkittava summa voidaan ilmaista kaksinkertaisena integraalina

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 y^2} \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^{2n} \, dx \, dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{2n} \right) dx \left(\int_0^1 y^{2n} \right) dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Tämän laskemiseksi kannattaa jälleen tehdä muuttujanvaihdos. Esitellään seuraavat apumuuttujat:

$$u = \arccos \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2 y^2}}, \quad v = \arccos \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2 y^2}}.$$

Voimme jättää integroimisalueen reunat huomiotta ja tarkastella sen sijaan muuttujia x ja y väleillä $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Nyt muuttujien u ja v avulla ilmaistu integroimisalue on kolmio $u, v > 0$ ja $u + v < \frac{\pi}{2}$ (kuva 6). Apumuuttujista voidaan johtaa taas alkuperäiset muuttujat x ja y:

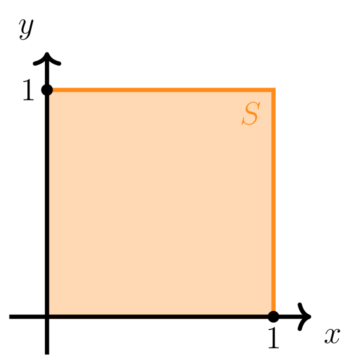
$$
\begin{aligned}
\frac{\sin u}{\cos v} &= \frac{\sin(\arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}})}{\cos\arccos\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-x^2y^2-1+x^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{x^2-x^2y^2}{1-x^2y^2}}{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}} = \sqrt{\frac{x^2-x^2y^2}{1-y^2}} \\
&= \sqrt{x^2} = x
\end{aligned}
$$

ja

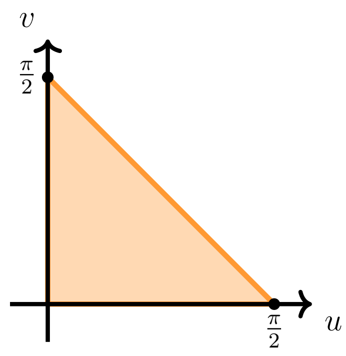
$$
\begin{aligned}
\frac{\sin v}{\cos u} &= \frac{\sin(\arccos\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}})}{\cos\arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1-x^2y^2-1+y^2}{1-x^2y^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{y^2-x^2y^2}{1-x^2y^2}}{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}} = \sqrt{\frac{y^2-x^2y^2}{1-x^2}} = \sqrt{y^2} = y.
\end{aligned}
$$

Kyseinen muuttujanvaihdos voidaan siis suorittaa yksikäsitteisesti käänteisesti, eli muuttujat x, y voidaan ilmaista apumuuttujien avulla:

$$
x = \frac{\sin u}{\cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}.
$$



Kuva 5: Integroimisalue ennen koordinaatistomuunnosta



Kuva 6: Integroimisalue koordinaattimuunnoksen jälkeen

Laskemalla koordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti (lause 3.1) saadaan

$$\begin{aligned}\det(J) &= \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sin u}{\cos v} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sin u}{\cos v}\\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sin v}{\cos u} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sin v}{\cos u}\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}\frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v}\\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{pmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v}\\ &= 1 - \left(\frac{\sin u}{\cos v}\right)^2 \left(\frac{\sin v}{\cos u}\right)^2 = 1 - x^2 y^2.\end{aligned}$$

Tämän avulla tutkittava integraali saadaan muotoon

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}-u} 1 \, dv \, du,$$

mikä on kolmionmuotoisen integrointialueen T pinta-ala $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{8}$. $\square$

3.3 Muunnelma parillisille indeksin arvoille

Todistetaan vastaava tulos muunnelmasta Eulerin sarjalle, parillisilla indeksin n arvoilla.

Lause 3.4. *Parillisten lukujen käänteislukujen sarjan summalle pätee:*

$$\sum_{n=parillinen, n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Todistus. Tuloksen voi johtaa parillisille indekseille n melko yksinkertaisella algebralla, jos tiedetään summa parittomille indekseille:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

$\square$

4 Yhteenveto

Tässä työssä johdettiin arkustangentille esitys Maclaurinin sarjana integroimalla sopivaa potenssisarjaa. Laskin myös Eulerin sarjan, sekä siitä johdetun muunnelman, parittomien indeksien arvoja sisältävän sarjan summat. Molempien sarjojen summien todistusten kulku oli varsin samankaltainen: Lähdettiin liikkeelle kaksinkertaisesta epäoleellisesta integraalista ja osoitettiin, että kyseinen integraali suppenee kohti äärellistä arvoa ja on yhtä suuri Eulerin sarjan kanssa. Sitten laskettiin integraalin tarkka arvo käyttäen apuna muuttujanvaihdosta. Lisäksi näitä tuloksia hyödyntämällä saimme johdettua vastaavan tuloksen parillisten indeksien summalle.

Nämä olivat pääaiheet, mutta esittelin myös muita aiheeseen liittyvinä Taylorin sarjakehitelmän funktioiden arviointiin ja Riemannin zeeta-funktion. Taylorin sarjakehitelmä on tehokas työkalu funktioiden approksimointiin ja siten erittäin käyttökelpoinen sarjateorian sovellus. Riemannin zeeta-funktion nollakohtien sijainti on edelleen avoin tutkimuskysymys.

Lähteet

[1] Robert A. Adams, Christopher Essex: *Calculus*, Pearson, Toronto, 2003.

[2] Raymond Ayoub: Euler and the zeta function, *Amer. Math. Monthly. 81 (10):* 1067–86. doi:10.2307/2319041. JSTOR 2319041, 1974.

[3] Torres Fremlin: *Measure Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[4] Petteri Harjulehto, Riku Klén, Mika Koskenoja: *Analyysiä reaaliluvuilla,* Unigrafia, Helsinki, 2017.

[5] Miklos Hovarth: On the Leibnizian quadrature of the circle, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis (Sectio Computatorica),* 4: 75–83, 1983.

[6] Ranjan Roy: The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, *Mathematics Magazine,* 63 (5): 291–306, 1990.

[7] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel R. Hass, Frank R. Giordano: *Thomas' Calculus*, Addison-Wesley, Boston, 2004.