Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksen avulla

Alexey Zagorodniy

LuK -tutkielma
Toukokuu 2024

Tarkastajat:
FT Stefan Emet

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

ALEXEY ZAGORODNIY: Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksen avulla
LuK -tutkielma, 18 s.
Matematiikka
Toukokuu 2024

Tässä tutkielmassa käsitellään Laplace-muunnoksen soveltamista tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Laplace-muunnos tarjoaa tehokkaan menetelmän muuntaa differentiaaliyhtälöt algebrallisiksi yhtälöiksi, mikä yksinkertaistaa ratkaisuprosessia.

Tutkielma alkaa esittelemällä Laplace-muunnoksen teoreettiset perusteet, mukaan lukien sen ominaisuudet ja tärkeimmät lauseet. Käsitellään keskeisiä käsitteitä, kuten lineaarisuus, derivaatan Laplace-muunnos ja käänteinen Laplace-muunnos. Teoriapohjan jälkeen keskitytään käytännön sovelluksiin ja esitetään, miten Laplace-muunnosta voidaan soveltaa erityyppisten differentiaaliyhtälöiden, erityisesti alkuarvo-ongelmien, ratkaisemiseen. Esimerkeillä havainnollistetaan Laplace-muunnoksen tehokkuus luonnontieteissä ja tekniikassa yleisesti esiintyvien differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Lukijalta edellytetään analyysin perustietämystä ja -ymmärrystä.

Asiasanat: Laplace-muunnos, tavallinen differentiaaliyhtälö, alkuarvo-ongelma, algebrallinen yhtälö, käänteinen Laplace-muunnos.

Sisällys

1 Johdanto

Differentiaaliyhtälöillä on ratkaiseva merkitys monilla tieteen ja teknologian aloilla. Yhtälöt kuvaavat, miten suureet muuttuvat ajan myötä, ja niillä voidaan mallintaa ilmiöitä, kuten virran kulkua sähköpiirissä, kalvon värähtelyä tai lämmön siirtymistä eristetyn johdon läpi [2]. Usein näihin yhtälöihin sisältyy alkuehtoja, jotka määrittelevät järjestelmän alkutilan (hetkellä $t = 0$).

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen voi kuitenkin olla haastavaa, erityisesti kun on kyse korkeamman kertaluvun yhtälöistä tai yhtälöryhmistä. Tehokas tapa ratkaista tällaisia yhtälöitä on *Laplace-muunnos*. Tämä matemaattinen menetelmä muuttaa differentiaaliyhtälön yksinkertaisemmaksi algebralliseksi yhtälöksi. Käytännössä differentiointiprosessi vastaa funktion Laplace-muunnoksen kertomista uudella parametrilla s. Kun algebrallinen yhtälö on ratkaistu, sovelletaan *käänteistä Laplace-muunnosta* alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisun saamiseksi. Tämä koko menetelmä tunnetaan nimellä *Laplace-muunnos*. [1, 2]

Laplace-muunnoksen esitteli ensimmäisenä ranskalainen matemaatikko Pierre-Simon Laplace (1749—1827). Hän käytti vastaavaa muunnosta todennäköisyyttä käsittelevässä tutkimuksessaan. Myöhemmin brittiläinen matemaatikko Oliver Heaviside (1850—1925) kehitti menetelmää epämääräisesti sähkötekniikan yhteydessä. Nykyaikainen lähestymistapa ja sovellukset differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen syntyivät kuitenkin vasta 1930-luvulla saksalaisen matemaatikon Gustav Doetschin (1892—1977) työn ansiosta. [1, 2]

Nykyään Laplace-muunnos on laajalti käytetty työkalu matematiikassa, sähkötekniikassa, mekaanisissa järjestelmissä, sekoitusongelmissa, signaalinkäsittelyssä ja muilla tekniikan ja fysiikan aloilla. Se soveltuu erityisesti tavallisten lineaaristen differentiaaliyhtälöiden, alkuarvo-ongelmien ja differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseen. Tavallisissa differentiaaliyhtälöissä on yksi riippumaton muuttuja. Tällaisten yhtälöiden ratkaisemiseen on monia menetelmiä, joissa yleensä etsitään ensin yleinen ratkaisu ja sen jälkeen käytetään alkuehtoja tietyn ratkaisun määrittämiseksi. Yksi Laplace-muunnosmenetelmän merkittävistä eduista on se, että se johtaa suoraan alkuarvo-ongelman ratkaisuun ilman, että ensin löydetään yleistä ratkaisua. [1, 4]

Tässä tutkielmassa esitellään Laplace-muunnos ja keskitytään sen soveltamiseen tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Luvussa 2 luodaan perusta määrittelemällä Laplace-muunnos ja käsittelemällä sen keskeisiä ominaisuuksia, kuten *lineaarisuutta*, *derivaatan muunnosta*, *käänteismuunnosta* ja *konvoluutiota*. Luvussa 3 käsitellään, miten erityyppiset tavalliset differentiaaliyhtälöt, kuten alkuarvo-ongelmat ja lineaariset yhtälöryhmät, voidaan ratkaista tämän menetelmän avulla.

2 Laplace-muunnos

Aloitetaan määrittelemällä Laplace-muunnos ja esittelemällä sen tärkeimmät ominaisuudet, jotka ovat ratkaisevan tärkeitä menetelmän tehokkaan soveltamisen kannalta luvussa 3. Tämän luvun määritelmät, lauseet ja todistukset perustuvat pääasiassa lähteisiin [1, 2].

2.1 Alkuperäinen funktio ja sen muunnos

Laplace-muunnos on matemaattinen menetelmä, joka muuntaa reaalimuuttujan t funktion $f(t)$ uudeksi funktioksi $F(s)$, joka riippuu uudesta muuttujasta s. Muunnos toteutetaan käyttämällä epäoleellista integraalia, jossa funktio $f(t)$ kerrotaan eksponentiaalitermillä e^{-st}. [1] Sopivan funktion $f(t)$ tapauksessa muunnos määritellään seuraavasti:

Määritelmä 2.1. Olkoon funktio $f(t)$ määritelty välillä $[0, \infty)$ ja olkoon s mielivaltainen reaalinen tai kompleksinen parametri. Tällöin funktion $f(t)$ *Laplace-muunnos* määritellään integraalin

$$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-st} f(t)\, dt \tag{2}$$

avulla, kaikilla s arvoilla, joilla integraali (1) suppenee.

Integraalin (1) sanotaan olevan *suppeneva*, jos on olemassa raja-arvo (2). Jos raja-arvoa ei ole, integraali *hajaantuu* ja funktiolle $f(t)$ ei ole määritelty Laplace-muunnosta. [2]

Symboli $\mathcal{L}$ merkitsee Laplace-muunnosta, joka kohdistuu funktioon $f(t)$. Funktiota $F(s)$ kutsutaan funktion $f(t)$ Laplace-muunnokseksi. Alkuperäistä funktiota merkitään pienillä kirjaimilla ja sen muunnosta isoilla kirjaimilla, joten $F(s)$ tarkoittaa funktion $f(t)$ muunnosta, $Y(s)$ tarkoittaa funktion $y(t)$ muunnosta jne. [4]

Esimerkki 2.2. [1, s. 360, tehtävä 1] Määritetään funktion $f(t) = t$ Laplace-muunnos. Määritelmän 2.1 ja osittaisintegroinnin avulla saadaan

$$\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot t\, dt \\
&= \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-st} \cdot t\, dt \\
&= \lim_{N \to \infty} \Big/_0^N -\frac{t}{s} e^{-st} - \int_0^N -\frac{1}{s} e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{N \to \infty} \Big/_0^N -\frac{t}{s} e^{-st} - \Big/_0^N \frac{1}{s^2} e^{-st} \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{N}{s} e^{-sN} + \frac{0}{s} e^{-s \cdot 0} - \frac{1}{s^2} e^{-sN} + \frac{1}{s^2} e^{-s \cdot 0} \right) \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{N}{s} e^{-sN} - \frac{1}{s^2} e^{-sN} + \frac{1}{s^2} \right) \\
&= \left(-0 - 0 + \frac{1}{s^2} \right) \\
&= \frac{1}{s^2}, \quad \text{kun } s > 0.
\end{aligned}$$

Jos $s \leq 0$, integraali hajoaa eikä Laplace-muunnoksella ole tulosta.

Alkuperäinen funktio $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big)$	**Laplace-muunnos** $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n, $n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$e^{at}t^n$, $n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$

Taulukko 1: Yleiset Laplace-muunnokset ja käänteismuunnokset.

Taulukossa 1 on lueteltu yleisimmät Laplace-muunnokset. Niihin törmää usein differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tämän taulukon tulokset voidaan johtaa määritelmästä 2.1. [1]

2.2 Laplace-muunnoksen olemassaolo

On olemassa funktioita, joiden kohdalla epäoleellinen integraali (1) ei suppenee millään arvolla s. Tämä koskee esimerkiksi funktiota $f(t) = e^{t^2}$, joka kasvaa liian nopeasti, kun $t \to \infty$. Funktion on täytettävä tietyt ehdot, jotka yhdessä takaavat Laplace-muunnoksen olemassaolon. [1]

Määritelmä 2.3. Funktiolla on *eksponentiaalinen kertaluku* α, jos on olemassa positiiviset vakiot T ja M siten, että

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \text{kaikilla } t \geq T. \tag{3}$$

Toisin sanoen funktio $f(t)$ kasvaa enintään vauhtia $e^{\alpha t}$.

Esimerkki 2.4. Funktiolla $f(t) = e^{t^2}$ ei ole eksponentiaalista kertalukua. Tämä funktio kasvaa nopeammin kuin $e^{\alpha t}$ kaikilla arvoilla α. [1]

Vaikka funktio kasvaa hitaammin kuin eksponentiaalinen termi, sen Laplace-muunnos ei välttämättä ole olemassa, jos funktiossa on epäsäännöllisiä hyppäyksiä tai katkoksia. Jotta tietyn funktion Laplace-muunnos voidaan määrittää, funktion on oltava jatkuva tai ainakin paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$. [1]

Määritelmä 2.5. Funktio on *paloittain jatkuva* äärellisellä välillä $[a, b]$, jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä lukuun ottamatta äärellistä määrää pisteitä, joissa funktiolla on hyppäysepäjatkuvuus. Funktio on *paloittain jatkuva* välillä $[0, \infty)$, jos se on paloittain jatkuva välillä $[0, N]$ kaikilla $N > 0$.

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa tavallisesti esiintyvät funktiot (esim. polynomit, eksponentit, sinit ja kosinit) ovat sekä paloittain jatkuvia että eksponentiaalista kertalukua [1]. Seuraava lause takaa, että tällaisten funktioiden Laplace-muunnokset ovat olemassa riittävän suurilla arvoilla s.

Lause 2.6. *Jos funktio $f(t)$ on paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua α, niin sen Laplace-muunnos $F(s)$ on olemassa ja suppenee itseisesti, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$.*

Todistus. Todistus perustuu kirjassa [2] esitettyyn todistukseen. Osoitetaan, että integraali (1) suppenee itseisesti, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$. Olkoon funktio $f(t)$ paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua α. Määritelmän 2.3 mukaan on olemassa sellaiset vakiot M_1 ja T, että

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \quad \text{kun } t \geq T.$$

Koska $f(t)$ on paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$, se on rajoitettu suljetulla välillä $[0, T]$. Tällöin on olemassa sellainen vakio M_2, että

$$|f(t)| \leq M_2, \quad \text{kun } 0 < t < T.$$

Koska funktiolla $e^{\alpha t}$ on minimiarvo välillä $[0, T]$, voidaan valita riittävän suuri vakio M siten, että

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad \text{kun } t > 0.$$

Näin ollen

$$\int_0^N \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq M \cdot \int_0^N e^{-(x-\alpha)t} \, dt.$$

Ratkaistaan epäyhtälön oikeanpuoleinen integraali, jolloin saadaan

$$M \cdot \int_0^N e^{-(x-\alpha)t} \, dt = M \cdot \Big/_0^N \frac{e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} = \frac{M}{x-\alpha} - \frac{M e^{-(x-\alpha)N}}{x-\alpha}.$$

Kun $N \to \infty$ ja $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$, saadaan

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{M}{x-\alpha} - \frac{M e^{-(x-\alpha)N}}{x-\alpha} \right) = \frac{M}{x-\alpha}.$$

Näin ollen

$$\int_0^\infty \left| e^{-st} f(t) \right| \, dt \leq \frac{M}{x-\alpha}.$$

Koska integraali (1) suppenee itseisesti, voidaan todeta, että Laplace-muunnos $F(s)$ on olemassa, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$. $\square$

Huomautus. $\mathcal{R}e(s)$ tarkoittaa parametrin s reaaliosaa, jos s on kompleksiluku [4].

2.3 Lineaarisuus

Lineaarisuus on Laplace-muunnoksen keskeinen ominaisuus, joka helpottaa huomattavasti monimutkaisten funktioiden käsittelyä. Tämän ominaisuuden avulla on mahdollista selvittää vaikeiden funktioiden muunnokset yhdistämällä yksinkertaisempien funktioiden muunnoksia. [3] Lineaarisuus on erityisen tärkeää, kun muunnosta sovelletaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

Lause 2.7. *Olkoot $f(t)$ ja $g(t)$ funktioita, joiden Laplace-muunnokset ovat olemassa, kun $\mathcal{R}e(s) > \alpha$. Tällöin*

$$\mathcal{L}\big(a \cdot f(t) \,\pm\, b \cdot g(t)\big) = a \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) \,\pm\, b \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big),$$

missä a ja b ovat mielivaltaisia vakioita.

Todistus. Käyttämällä integraalin lineaarisuusominaisuutta saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(a \cdot f(t) \,\pm\, b \cdot g(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st}\big(a \cdot f(t) \,\pm\, b \cdot g(t)\big)\, dt \\
&= \int_0^\infty \big(a \cdot e^{-st} \cdot f(t) \,\pm\, b \cdot e^{-st} \cdot g(t)\big)\, dt \\
&= \int_0^\infty a \cdot e^{-st} \cdot f(t)\, dt \,\pm\, \int_0^\infty b \cdot e^{-st} \cdot g(t)\, dt \\
&= a \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt \,\pm\, b \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t)\, dt \\
&= a \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) \pm b \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big).
\end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 2.8. [1, s. 360, tehtävä 14] Määritetään funktion $f(t) = 5 - e^{2t} + 6t^2$ Laplace-muunnos. Lineaarisuuden ja taulukon 1 perusteella

$$\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) &= \mathcal{L}\big(5 - e^{2t} + 6t^2\big) \\
&= \mathcal{L}\big(5\big) - \mathcal{L}\big(e^{2t}\big) + \mathcal{L}\big(6t^2\big) \\
&= 5 \cdot \mathcal{L}\big(1\big) - \mathcal{L}\big(e^{2t}\big) + 6 \cdot \mathcal{L}\big(t^2\big) \\
&= 5 \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + 6 \cdot \frac{2}{s^3} \\
&= \frac{5}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{12}{s^3}.
\end{aligned}$$

2.4 Derivaatan Laplace-muunnos

Laplace-muunnoksen soveltaminen differentiaaliyhtälöihin edellyttää derivaattafunktion Laplace-muunnoksen löytämistä [2]. Derivaatan $\mathcal{L}\big(f'\big)$ muunnos voidaan ilmaista funktion $\mathcal{L}\big(f\big)$ muunnoksen avulla seuraavasti:

Lause 2.9. *Olkoon funktio f jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja funktio f' paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$. Olkoon molemmat eksponentiaalista kertalukua α. Tällöin derivaatan Laplace-muunnos on*

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = s \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0) \quad \big(\mathcal{R}e(s) > \alpha\big).$$

Todistus. Todistus perustuu kirjassa [1] esitettyyn todistukseen. Lauseen 2.6 perusteella derivaatan $f'(t)$ Laplace-muunnos on olemassa. Määritelmän 2.1 ja osittaisintegroinnin avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(f'(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\Big/_0^N e^{-st} f(t) + s \int_0^N e^{-st} f(t)\,dt \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) - e^{-s\cdot 0} f(0) + s \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)\,dt \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Koska funktio f on eksponentiaalista kertalukua α, määritelmän 2.3 nojalla

$$|f(N)| \leq Me^{\alpha N} \implies \big|e^{-xN} f(N)\big| \leq Me^{-(x-\alpha)N}.$$

Kun $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$, saadaan

$$\lim_{N\to\infty} Me^{-(x-\alpha)N} = 0.$$

Näin ollen

$$\lim_{N\to\infty} e^{-sN} f(N) = 0, \quad \text{kun } \mathcal{R}e(s) > \alpha.$$

Tällöin yhtälöstä (4) saadaan

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = 0 - f(0) + s \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) = s \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0).$$

□

Tämä lause ei rajoitu vain ensimmäisen kertaluvun derivaattoihin. Käyttämällä induktiota lause 2.9 voidaan laajentaa koskemaan korkeamman kertaluvun derivaattoja [1]. Soveltamalla lausetta 2.9 saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(f''(t)\big) &= s \cdot \mathcal{L}\big(f'(t)\big) - f'(0) \\ &= s \cdot \Big[s \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0)\Big] - f'(0) \\ &= s^2 \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - s \cdot f(0) - f'(0)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(f'''(t)\big) &= s \cdot \mathcal{L}\big(f''(t)\big) - f''(0) \\ &= s \cdot \Big[s^2 \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - s \cdot f(0) - f'(0)\Big] - f''(0) \\ &= s^3 \cdot \mathcal{L}\big(f(t)\big) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0).\end{aligned}$$

Yleisessä tapauksessa saadaan seuraava tulos [1]:

Lause 2.10. *Olkoot funktiot $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ jatkuvia välillä $[0,\infty)$ ja funktio $f^{(n)}$ paloittain jatkuva välillä $[0,\infty)$. Olkoot kaikki eksponentiaalista kertalukua α. Tällöin derivaatan Laplace-muunnos on*

$$\mathcal{L}\big(f^{(n)}(t)\big) = s^n \mathcal{L}\big(f(t)\big) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}^+.$$

Tämä laajennus on erityisen hyödyllinen, kun käsitellään korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, sillä sen avulla samaa algebrallista yksinkertaistamisprosessia voidaan soveltaa myös vaikeampiin yhtälöihin.

2.5 Käänteinen Laplace-muunnos

Lähes kaikilla operaatioilla on käänteisoperaatioita. Aivan kuten yhteenlaskulla on vähennyslasku ja kertolaskulla on jako, Laplace-muunnoksella on käänteismuunnos. [3] Kun differentiaaliyhtälö on muunnettu algebralliseksi yhtälöksi, tarvitaan käänteinen Laplace-muunnos, jotta ratkaisu voidaan palauttaa takaisin alkuperäiseen muotoon. Käänteinen Laplace-muunnos ottaa muuttujan s funktion ja muuttaa sen takaisin muuttujan t funktioksi.

Määritelmä 2.11. Olkoon F funktion f Laplace-muunnos $F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)$. Tällöin *käänteinen Laplace-muunnos* on

$$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = f(t), \quad \text{missä } t \geq 0.$$

Käänteismuunnoksen laskemiseen ei ole helppoa muunnoskaavaa, joten käänteismuunnos päätellään yleensä ennalta laskettujen Laplace-muunnosten avulla [5]. Käänteisen Laplace-muunnoksen määrittämiseen on kaksi pääasiallista menetelmää [1, 2]:

1. Muunnostaulukoiden käyttö: Tässä menetelmässä hyödynnetään taulukoita, joissa yhdistetään perusfunktiot ja niiden käänteismuunnokset. Jos funktio löytyy Laplace-muunnostaulukosta, sen käänteismuunnos voidaan määrittää suoraan. Tämä menetelmä on tehokas pienille funktioille. Esimerkkinä tästä on aiemmin mainittu taulukko 1, jossa esitetään yleisimmät Laplace-muunnokset ja käänteismuunnokset.

2. Osamurtokehitelmän käyttö: Tämän menetelmän avulla voidaan käsitellä funktioita, jotka eivät löydy muunnostaulukoista. Menetelmässä funktio hajotetaan yksinkertaisempiin osiin ja näiden osien käänteismuunnokset määritetään taulukoiden avulla.

Esimerkki 2.12. [1, s. 375, tehtävä 22] Määritetään känteinen Laplace-muunnos, kun

$$F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)}.$$

Käyttämällä osamurtokehitelmää yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\frac{s+11}{(s-1)(s+3)} &= \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+3)} \\ &= \frac{(s-1)B + (s+3)A}{(s-1)(s+3)} \\ &= \frac{s(A+B) + 3A - B}{(s-1)(s+3)}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - B = 11 \end{cases}.$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan vakiot $A = 3$ ja $B = -2$. Nyt alkuperäinen yhtälö saadaan muotoon

$$F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)} = \frac{3}{(s-1)} + \frac{-2}{(s+3)}.$$

Taulukon 1 avulla saadaan käänteinen Laplace-muunnos

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-1)} + \frac{-2}{(s+3)}\right) \\ &= 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)}\right) - 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)}\right) \\ &= 3e^{t} - 2e^{-3t}.\end{aligned}$$

Huomautus. Käänteinen Laplace-muunnos on myös lineaarinen eli

$$\mathcal{L}^{-1}\big(a \cdot F(s) \pm b \cdot G(s)\big) = a \cdot \mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) \pm b \cdot \mathcal{L}^{-1}\big(G(s)\big).$$

missä a ja b ovat mielivaltaisia vakioita. Tämä ominaisuus seuraa Laplace-muunnoksen lineaarisuudesta ja pätee, kun funktioiden F ja G määrittelyjoukot ovat samat. [2]

2.6 Konvoluutio

Konvoluutio on kahden funktion f ja g välinen operaatio, joka tuottaa uuden funktion $f*g$ [6]. Konvoluutio on erityisen hyödyllinen kun määritellään kahden funktion tulon käänteinen Laplace-muunnos [3].

Määritelmä 2.13. Olkoot funktiot f ja g paloittain jatkuvia välillä $[0, \infty)$. Tällöin *konvoluutio* $(f * g)$ määritellään integraalina

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(t-v)f(v)\,dv.$$

Konvoluution olennainen ominaisuus Laplace-muunnoksen yhteydessä on se, että konvoluution Laplace-muunnos on kahden yksittäisen funktion Laplace-muunnosten tulo [2]. Tätä periaatetta havainnollistetaan seuraavassa konvoluutiolauseessa.

Lause 2.14. *Olkoot funktiot f ja g paloittain jatkuvia välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua α. Tällöin*

$$\mathcal{L}\big((f * g)(t)\big) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big) \quad \big(\mathcal{R}e(s) > \alpha\big).$$

Todistus. Todistus perustuu kirjassa [2] esitettyyn todistukseen. Aloitetaan yhtälön oikeasta puolesta. Yhdistämällä integraalit saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\big(f(t)\big) \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big) &= \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv \cdot \int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(v+u)} f(v) g(u)\,du \right) dv. \end{aligned} \tag{5}$$

Olkoon $t = v + u$. Tällöin $u = t - v$. Lisäksi määritellään, että $g(t) = 0$, kun $t < 0$. Silloin $g(t - v) = 0$, kun $t < v$. Tällöin integraalista (5) saadaan

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(v) g(t-v)\,dt\,dv.$$

Lauseen 2.6 perusteella molempien funktioiden Laplace-muunnokset suppenevat itseisesti. Näin ollen integraali

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| e^{-st} f(v) g(t-v) \right| dt\,dv$$

suppenee. Nyt voidaan vaihtaa integrointijärjestystä, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\big(f(t)\big) \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(v) g(t-v)\,dt\,dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(v) g(t-v)\,dv \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(v) g(t-v)\,dv \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \big((f * g)(t)\big)\,dt \\ &= \mathcal{L}\big((f * g)(t)\big). \end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 2.15. [1, s. 404, tehtävä 6] Määritetään känteinen Laplace-muunnos, kun

$$F(t) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

konvoluutiota apuna käyttäen. Tämä funktio voidaan esittää muodossa

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s+2)}.$$

Konvoluutiolauseen 2.14 ja taulukon 1 perusteella saadaan

$$\frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{(s+2)} = \mathcal{L}\big(e^{-t}\big) \cdot \mathcal{L}\big(e^{-2t}\big) = \mathcal{L}\big(e^{-t} * e^{-2t}\big).$$

Nyt määritelmän 2.13 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t e^{-(t-v)} \cdot e^{-2v}\, dv \\ &= \int_0^t e^{-t+v-2v}\, dv \\ &= \int_0^t e^{-t-v}\, dv \\ &= \Big/_0^t - e^{-t-v} \\ &= -e^{-t-t} + e^{-t-0} \\ &= -e^{-2t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

3 Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen Laplace-muunnoksella

Luvussa 2 esitellyn teoreettisen taustan jälkeen siirrytään käytännön sovelluksiin. Tässä luvussa esitellään, miten Laplace-muunnosta voidaan käyttää erilaisten tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

3.1 Yleinen menetelmä

Tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisuprosessi Laplace-muunnosten avulla voidaan tiivistää seuraavasti [1, 2]:

1. Määritetään differentiaaliyhtälön molempien puolien Laplace-muunnos.

2. Käytetään Laplace-muunnoksen ominaisuuksia differentiaalitermeiden muuntamiseksi algebrallisiksi lausekkeiksi.

3. Sijoitetaan alkuehdot muunnettuun yhtälöön.
4. Ratkaistaan tuloksena saatu algebrallinen yhtälö termin $Y(s)$ suhteen.
5. Määritetään käänteinen Laplace-muunnos $\mathcal{L}^{-1}\big(Y(s)\big)$ differentiaaliyhtälön ratkaisuun $y(t)$ saamiseksi.

Laplace-muunnos on tehokas työkalu, mutta sillä on rajoituksia. Koska Laplace-muunnos on itsessään lineaarinen, sitä voidaan käyttää vain lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen [3]. Lineaarisessa differentiaaliyhtälössä riippuvainen muuttuja noudattaa lineaarisuusperiaatetta.

Differentiaaliyhtälöt, joita ei voida ratkaista tämän muunnoksen avulla, sisältävät tuntemattomia eksponentteja y^n tai lausekkeita kuten $\tan(y)$ tai e^y [3]. Kun nämä termit esiintyvät differentiaaliyhtälössä, lineaarisuus ei ole enää voimassa. Muunnos muuttuu monimutkaisemmaksi tai mahdottomaksi.

3.2 Sovellukset erilaisiin ongelmiin

Ensimmäinen esimerkki havainnollistaa alkuarvo-ongelman ratkaisuprosessia, jossa käänteismuunnoksen määrittämiseen tarvitaan osamurtokehitelmää.

Esimerkki 3.1. [1, s. 382, tehtävä 3] Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y'' + 6y' + 9y = 0; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 6. \tag{6}$$

Sovelletaan Laplace-muunnosta differentiaaliyhtälöön. Lineaarisuuden perusteella saadaan

$$\mathcal{L}(y'') + 6 \cdot \mathcal{L}(y') + 9 \cdot \mathcal{L}(y) = 0.$$

Käyttämällä derivaatan muunnosta saadaan

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 6 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) + 9 \cdot Y(s) = 0.$$

Sijoitetaan alkuarvot, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} s^2 \cdot Y(s) - s \cdot (-1) - 6 + 6 \cdot (s \cdot Y(s) - (-1)) + 9 \cdot Y(s) &= 0 \\ s^2 \cdot Y(s) + s - 6 + 6 \cdot (s \cdot Y(s) + 1) + 9 \cdot Y(s) &= 0 \\ s^2 \cdot Y(s) + 6 \cdot s \cdot Y(s) + 6 + 9 \cdot Y(s) &= -s + 6 \\ Y(s) \cdot (s^2 + 6s + 9) &= -s. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla termin $Y(s)$ suhteen saadaan

$$Y(s) = \frac{-s}{s^2 + 6s + 9} = \frac{-s}{(s+3)^2}. \tag{7}$$

Nyt täytyy löytää käänteinen Laplace-muunnos ratkaisun saamiseksi. Käyttämällä osamurtokehitelmää yhtälö (7) saadaan muotoon

$$\frac{-s}{(s+3)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} = \frac{(s+3)A + B}{(s+3)^2} = \frac{sA + 3A + B}{(s+3)^2}.$$

Tästä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} A = -1 \\ 3A + B = 0 \end{cases}.$$

Ratkaisemalla yhtälöpari saadaan vakiot $A = -1$ ja $B = 3$. Nyt alkuperäinen yhtälö (7) saadaan muotoon

$$Y(s) = \frac{-s}{(s+3)^2} = \frac{-1}{s+3} + \frac{3}{(s+3)^2}.$$

Lineaarisuuden ja taulukon 1 avulla saadaan käänteinen Laplace-muunnos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+3} + \frac{3}{(s+3)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s+3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s+3)^2}\right) \\ &= e^{-3t} + e^{-3t} \cdot 3t, \end{aligned}$$

joka on differentiaaliyhtälön (6) ratkaisu.

Seuraava esimerkki esittää, miten konvoluutiota voidaan käyttää differentiaaliyhtälön ratkaisun määrittämiseen.

Esimerkki 3.2. [1, s. 404, tehtävä 2] Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y'' + 9y = g(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \tag{8}$$

missä funktio $g(t)$ on paloittain jatkuva välillä $[0, \infty)$ ja eksponentiaalista kertalukua α. Sovelletaan Laplace-muunnosta differentiaaliyhtälöön. Lineaarisuuden perusteella saadaan

$$\mathcal{L}(y'') + 9 \cdot \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g(t)).$$

Käyttämällä derivaatan muunnosta saadaan

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + 9 \cdot Y(s) = G(s).$$

Sijoitetaan alkuarvot ja ratkaistaan termin $Y(s)$ suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} s^2 \cdot Y(s) - s \cdot 1 - 0 + 9 \cdot Y(s) &= G(s) \\ s^2 \cdot Y(s) - s + 9 \cdot Y(s) &= G(s) \\ (s^2+9) \cdot Y(s) &= s + G(s) \\ Y(s) &= \frac{s}{s^2+9} + \frac{G(s)}{s^2+9}. \end{aligned} \tag{9}$$

Nyt täytyy löytää käänteinen Laplace-muunnos ratkaisun saamiseksi. Yhtälö (9) voidaan esittää muodossa

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9} \cdot G(s).$$

Konvoluutiolauseen 2.14 ja taulukon 1 perusteella saadaan

$$\frac{3}{s^2+9} \cdot G(s) = \mathcal{L}\big(\sin(3t)\big) \cdot \mathcal{L}\big(g(t)\big) = \mathcal{L}\big(\sin(3t) * g(t)\big).$$

Nyt määritelmän 2.13 ja taulukon 1 avulla saadaan differentiaaliyhtälön (8) ratkaisu

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9} \cdot G(s)\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9} \cdot G(s)\right) \\
&= \cos(3t) + \frac{1}{3} \cdot \big(\sin(3t) * g(t)\big) \\
&= \cos(3t) + \frac{1}{3} \cdot \int_0^t \Big(\sin\big(3(t-v)\big)g(v)\Big)\, dv.
\end{aligned}$$

Lauseen 2.10 avulla voidaan soveltaa Laplace-muunnosta korkeamman kertaluvun derivaattoihin. Seuraava esimerkki havainnollistaa kolmannen kertaluvun alkuarvo-ongelman ratkaisuprosessia.

Esimerkki 3.3. [1, s. 383, tehtävä 27] Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla differentiaaliyhtälö

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0; \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -2. \tag{10}$$

Lineaarisuuden perusteella

$$\mathcal{L}(y''') + 3 \cdot \mathcal{L}(y'') + 3 \cdot \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = 0$$

Soveltamalla derivaatan muunnosta ja sijoittamalla alkuarvot saadaan

$$s^3Y(s) + 4s^2 + 4s + 2 + 3(s^2Y(s) + 4s - 4) + 3(sY(s) + 4) + Y(s) = 0.$$

Ratkaistaan termin $Y(s)$ suhteen, jolloin saadaan

$$Y(s) = \frac{-4s^2 - 8s - 2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{-4s^2 - 8s - 2}{(s+1)^3}. \tag{11}$$

Nyt täytyy selvittää käänteinen Laplace-muunnos ratkaisun saamiseksi. Käyttämällä osamurtokehitelmää yhtälö (11) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\frac{-4s^2 - 8s - 2}{(s+1)^3} &= \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} \\
&= \frac{s^2A + s(2A+B) + A + B + C}{(s+1)^3}.
\end{aligned}$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A = -4 \\ 2A + B = -8 \\ A + B + C = -2 \end{cases}.$$

Yhtälöryhmän ratkaiseminen antaa vakiot $A = -4$, $B = 0$ ja $C = 2$. Nyt alkuperäinen yhtälö (11) saadaan muotoon

$$Y(s) = \frac{-4s^2 - 8s - 2}{(s+1)^3} = \frac{-4}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^3}.$$

Lineaarisuuden ja taulukon 1 avulla saadaan käänteinen Laplace-muunnos

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-4}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^3}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-4}{(s+1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^3}\right) \\ &= -4e^{-t} + e^{-t} \cdot t^2, \end{aligned}$$

joka on differentiaaliyhtälön (10) ratkaisu.

Jos alkuarvoja ei ole määritetty, Laplace-muunnosta voidaan silti soveltaa yleisen ratkaisun löytämiseksi [2]. Seuraava esimerkki havainnollistaa, miten differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu löydetään.

Esimerkki 3.4. [1, s. 383, tehtävä 31] Ratkaistaan Laplace-muunnoksen avulla

$$y'' + 2y' + 2y = 5; \quad y(0) = a, \quad y'(0) = b, \tag{12}$$

missä a ja b ovat mielivaltaisia vakioita. Lineaarisuuden perusteella saadaan

$$\mathcal{L}(y'') + 2 \cdot \mathcal{L}(y') + 2 \cdot \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(5).$$

Sovelletaan derivaatan muunnosta ja sijoitetaan $y(0) = a$ ja $y'(0) = b$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= \frac{5}{s} \\ s^2Y(s) - s \cdot a - b + 2sY(s) - 2a + 2Y(s) &= \frac{5}{s} \\ Y(s)(s^2 + 2s + 2) - (s \cdot a + b + 2 \cdot a) &= \frac{5}{s} \end{aligned}$$

Ratkaisemalla termin $Y(s)$ suhteen saadaan

$$Y(s) = \frac{5 + s^2 \cdot a + (2a + b)s}{s(s^2 + 2s + 2)}. \tag{13}$$

Käyttämällä osamurtokehitelmää yhtälö (13) saadaan muotoon

$$\frac{5 + s^2 \cdot a + (2a+b)s}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)+C}{s^2+2s+2}.$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A = 5/2 \\ B = (2a-5)/2 \\ C = (2a+2b-5)/2 \end{cases}.$$

Nyt yhtälö (13) saadaan muotoon

$$Y(s) = \frac{5}{2s} + \frac{(2a-5)(s+1)+2a+2b-5}{2(s^2+2s+2)}.$$

Nyt täytyy selvittää käänteinen Laplace-muunnos ratkaisun saamiseksi. Lineaarisuuden ja taulukon 1 avulla saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{2s} + \frac{(2a-5)(s+1)+2a+2b-5}{2(s^2+2s+2)}\right) \\ &= \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{2a-5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) + \frac{2a+2b-5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+1}\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2a-5}{2}e^{-t}\cos(t) + \frac{2a+2b-5}{2}e^{-t}\sin(t). \end{aligned}$$

Koska a ja b voivat saada kaikki mahdolliset arvot, differentiaaliyhtälön (12) yleinen ratkaisu on

$$y(t) = \frac{5}{2} + c_1 e^{-t}\cos(t) + c_2 2e^{-t}\sin(t),$$

missä c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia reaalivakioita.

Laplace-muunnosta voidaan käyttää myös lineaaristen differentiaaliyhtälöryhmien ratkaisemiseen. Samoin kuin se muuntaa yksittäisen differentiaaliyhtälön algebralliseksi yhtälöksi, se muuntaa differentiaaliyhtälöryhmän algebralliseksi yhtälöryhmäksi. [1] Viimeisessä esimerkissä esitetään lineaarisen differentiaaliyhtälöparin ratkaisuprosessi.

Esimerkki 3.5. [1, s. 413, tehtävä 2] Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + 4y \end{cases} \tag{14}$$

Laplace-muunnoksen avulla, kun $x(0) = -1$ ja $y(0) = 0$. Sovelletaan Laplace-muunnosta molempiin yhtälöihin. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x') &= \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) \\
sX(s) - x(0) &= X(s) - Y(s) \\
sX(s) - (-1) &= X(s) - Y(s) \\
sX(s) - X(s) &= -Y(s) - 1 \\
X(s)(s-1) &= -Y(s) - 1 \\
X(s) &= \frac{-Y(s)-1}{s-1}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Vastaavasti toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y') &= 2\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y) \\
sY(s) - y(0) &= 2X(s) + 4Y(s) \\
sY(s) - (0) &= 2X(s) + 4Y(s) \\
sY(s) - 4Y(s) &= 2X(s) \\
Y(s)(s-4) &= 2X(s) \\
Y(s) &= \frac{2X(s)}{s-4}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Sijoittamalla yhtälö (16) yhtälöön (15) saadaan

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{-\frac{2X(s)}{s-4} - 1}{s-1} \\
X(s)(s-1)(s-4) &= -2X(s) - s + 4 \\
X(s)(s^2 - 5s + 4) &= -2X(s) - s + 4 \\
X(s)(s^2 - 5s + 6) &= -s + 4 \\
X(s) &= \frac{-s+4}{(s-2)(s-3)}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Nyt sijoittamalla yhtälö (17) yhtälöön (16) saadaan

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2 \cdot \frac{-s+4}{(s-2)(s-3)}}{s-4} \\
Y(s) &= \frac{2(-s+4)}{(s-2)(s-3)(s-4)} \\
Y(s) &= \frac{-2}{(s-2)(s-3)}. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Nyt täytyy selvittää molempien funktioiden käänteiset Laplace-muunnokset ratkaisun saamiseksi. Tehdään osamurtokehitelmät kummallekin yhtälölle, jolloin yhtälöstä (17) saadaan

$$X(s) = \frac{-2}{s-2} + \frac{1}{s-3}$$

ja yhtälöstä (18) saadaan

$$Y(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s-3}.$$

Lopuksi taulukon 1 avulla saadaan käänteiset Laplace-muunnokset

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{2t} + e^{3t} \\ y(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{cases} .$$

Tämä on yhtälöparin (14) ratkaisu.

Kirjallisuutta

[1] R. Kent Nagle, Edward B. Saff ja Arthur David Snider: *Fundamentals of Differential Equations, 9th edition*. Prearson, Boston, 2018.

[2] Joel L. Schiff: *The Laplace Transform: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] Phil Dyke: *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Second Edition*. Springer-Verlag, London, 2014.

[4] Erwin Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics, 10th Edition*. John Wiley & Sons, United States, 2011.

[5] Timo Ojala, Leena Ojala ja Timo Ranta: *Laplace-muunnos*. Ojalain laskuopit -opetusmoniste, Satakunnan ammattikorkeakoulu, Pori, 2017.

[6] Jan Thompson ja Thomas Martinsson: *Matematiikan käsikirja*. Tammi, Helsinki, 1994.