TURUN YLIOPISTO

Luonnollisten lukujen aiheuttama harha

Kirjallisuuskatsaus ilmiön tutkimisesta eri-ikäisillä

Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen

pro gradu -tutkielma

Laatija:

Marika Lindgren

Kesäkuu 2024

Turku

Pro gradu -tutkielma

Oppiaine: Matematiikka
Tekijä: Marika Lindgren
Otsikko: Luonnollisten lukujen aiheuttama harha. Kirjallisuuskatsaus ilmiön tutkimisesta eri-ikäisillä.
Ohjaaja: professori Peter Hästö
Sivumäärä: 35 sivua
Päivämäärä: Kesäkuu 2024

Tämä pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, joka käsittelee luonnollisten lukujen aiheuttaman harhan (natural number bias, lyh. NNB) tutkimista eri-ikäisillä oppilailla sekä koulutetuilla aikuisilla. Tutkielmassa tarkastellaan, mitä NNB on, miten sitä tutkitaan ja minkälaisia tuloksia on saatu tutkimalla NNB:tä eri-ikäisillä oppilailla sekä aikuisilla. NNB viittaa taipumukseen käyttää luonnollisten lukujen ominaisuuksia rationaalilukuja käsiteltäessä. Rationaaliluvut käyttäytyvät kuitenkin eri tavalla verrattuna luonnollisiin lukuihin, minkä vuoksi luonnollisten lukujen ominaisuuksien käyttäminen rationaalilukutehtävissä saattaa johtaa virheisiin ja väärinkäsityksiin. Tässä tutkielmassa on keskitytty luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen eroihin, jotka liittyvät peruslaskutoimituksiin, suuruuteen ja tiheyteen.

NNB:n taustoittamiseksi on tehty tutkimusta kahdesta eri näkökulmasta; käsitteellisen muutoksen näkökulmasta ja ajattelun kaksoisprosessointiteorian näkökulmasta. Käsitteellisen muutoksen näkökulma selittänee NNB:n alkuperän ja kehityksen, kun taas ajattelun kaksoisprosessointiteoria selittänee ne prosessit, jotka vaikuttavat taustalla kun ihmiset käsittelevät rationaalilukutehtäviä.

NNB:n tutkimiseksi käytetään erilaisia metodeja, kuten kynä-paperi-testejä ja tietokoneella tehtyjä valintatehtäviä. Tutkimuksissa mitataan vastausten oikeellisuutta. Lisäksi osassa tutkimuksista mitataan myös aikaa, joka kuluu oikean vastauksen muodostamiseen eli reaktioaikaa. Tutkimuksissa tehtävät jaetaan kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin. Kongruentissa tehtävässä luonnollisiin lukuihin perustuvia ominaisuuksia käyttämällä päädytään oikeaan vastaukseen, kun taas inkongruentissa tehtävässä luonnollisiin lukuihin perustuvia ominaisuuksia käyttämällä päädytään väärään vastaukseen.

NNB:tä on tutkittu aina alakouluikäisistä aikuisiin saakka, niin korkeakouluopiskelijoilla kuin matemaatikoillakin. Alakouluikäisillä oppilailla NNB:tä on havaittu niin peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen suuruuden kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen tutkimuksissa, joissa on mitattu vastausten oikeellisuutta. Yläkoulu- ja lukioikäisillä oppilailla NNB:tä on havaittu peruslaskutoimitusten ja rationaalilukujen tiheyden suhteen tutkimuksissa, joissa on mitattu joko vastausten oikeellisuutta tai vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa. Rationaalilukujen suuruuden suhteen NNB:tä on havaittu tutkimuksessa, jossa on mitattu vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa, sen sijaan tutkimuksessa, jossa on mitattu vain vastausten oikeellisuutta, ei NNB:tä ole juurikaan havaittu yläkoulu- ja lukioikäisillä oppilailla. NNB:tä on havaittu myös koulutetuilla aikuisilla, mutta matemaatikoilla NNB:tä on havaittu vain rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna ja vain silloin, kun vertailtavilla murtoluvuilla on yhteinen tekijä.

Avainsanat: natural number bias, NNB, whole number bias, luonnolliset luvut, rationaaliluvut, matematiikka

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Rationaaliluvut Q ovat lukuja, jotka voidaan ilmaista muodossa $\frac{a}{b}$, missä a ja b ovat kokonaislukuja, ja b on erisuuri nollan kanssa. Rationaalilukuja ovat murtoluvut eli päättyvät tai päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut. Rationaalilukujen ymmärtäminen on tärkeää, sillä se ennustaa parempaa menestystä myöhemmin matematiikassa (Siegler ym. 2012). Kuitenkin on tutkittu, että niin lapsilla kuin aikuisillakin on vaikeuksia käsitellä rationaalilukuja (Van Hoof ym. 2017).

Luonnolliset luvut $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ käyttäytyvät eri tavalla kuin rationaaliluvut. Luonnolliset luvut yhdistetään usein tarkkaan lukumäärään ja luonnolliset luvut vastaavatkin usein kysymykseen, kuinka monta. Luonnolliset luvut ovat diskreettejä eli jokaisella luonnollisella luvulla on aina oma yksilöllinen seuraajansa. Luonnollisten lukujen kanssa yhteen laskeminen ja kertominen tekee aina suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen aina pienemmäksi (Vamvakoussi & Vosniadou 2010). Rationaaliluvuilla nämä eivät kuitenkaan välttämättä pidä paikkaansa, mistä seuraa se, että luonnollisten lukujen ominaisuuksien ja sääntöjen soveltaminen rationaalilukutehtäviin saattaa johtaa väärinkäsityksiin ja virheisiin. Taipumusta käyttää luonnollisten lukujen ominaisuuksia rationaalilukutehtävissä kutsutaan luonnollisten lukujen aiheuttamaksi harhaksi (natural number bias, lyh. NNB). (Ni & Zhou 2005.) Tässä tutkielmassa keskitymme luonnollisten lukujen ja rationaalilukujen eroihin, jotka liittyvät peruslaskutoimituksiin, suuruuteen ja tiheyteen.

Tutkimuksessa on käytetty seuraavanlaisia tutkimuskysymyksiä:

1. Mitä on NNB?
2. Miten NNB:tä on tutkittu?
3. Minkälaisia tuloksia on saatu tutkimalla NNB:tä eri-ikäisillä?

Tutkielman aluksi käsitellään, mitä NNB on ja minkälaisia teorioita NNB:n taustalla on. Tämän jälkeen käsitellään sitä, miten NNB:tä on tutkittu. Lopuksi käydään vielä läpi, minkälaisia tuloksia on saatu, kun NNB:tä on tutkittu eri-ikäisillä aina alakoulun loppupuolelta aikuisiin saakka.

Tämä Pro gradu -tutkielma on kirjallisuuskatsaus, ja se perustuu matematiikan ja didaktiikan alojen artikkeleihin ja tutkimuksiin. Tutkielman lähdekirjallisuutta etsittiin Volterista hakusanoilla natural number bias ja whole number bias, sekä tällä tavalla löydettyjen artikkeleiden lähdeluetteloista. Tutkimuksessa käytetyt artikkelit on rajattu niihin, joissa on tutkittu NNB:tä peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen suuruuden ja rationaalilukujen tiheyden suhteen.

2 Luonnollisten lukujen aiheuttama harha

2.1 Mitä on luonnollisten lukujen aiheuttama harha?

Luonnollisten lukujen aiheuttama harha (natural number bias, lyh. NNB) viittaa taipumukseen käyttää luonnollisten lukujen ominaisuuksia rationaalilukuja käsiteltäessä. Jossain lähteissä ilmiötä kutsutaan myös kokonaislukujen aiheuttamaksi harhaksi (whole number bias). (Ni & Zhou 2005.) NNB selittänee suurimman osan vaikeuksista ja virheistä, joita esiintyy rationaalilukuja käsiteltäessä (Christou ym. 2020). Yleinen NNB:stä johtuva virhekäsitys on olettaa, että lukujen laskeminen yhteen tai kertominen keskenään johtaa aina suurempaan lukuun, kun taas lukujen vähentäminen toisistaan tai lukujen jakaminen keskenään johtaa aina pienempään lukuun (Van Hoof ym. 2017). Oletetaan esimerkiksi virheellisesti, että 5 + (-3) on suurempi kuin 5, koska luonnollisten lukujen perusteella yhteenlasku tekee aina suuremmaksi tai että $4 \div \frac{1}{2}$ on pienempi kuin 4, koska luonnollisten lukujen perusteella jakaminen tekee aina pienemmäksi (Vamvakoussi ym. 2013).

Rationaaliluvun suuruutta arvioitaessa yleinen virhekäsitys on olettaa, että mitä enemmän desimaaliluvun desimaaliosassa on numeroita, sitä suurempi itse luku on, tai mitä suurempi luvun desimaaliosa on, sitä suurempi on myös itse luku. Oletetaan esimerkiksi, että luku 0,316 on suurempi kuin luku 0,32 koska luvun 0,316 desimaaliosassa on enemmän numeroita kuin luvun 0,32 desimaaliosassa, tai koska luku 316 on suurempi kuin luku 32. Murtoluvut taas nähdään usein kahtena erillisenä lukuna yhden luvun sijaan, mikä johtaa virhekäsitykseen, että mitä suurempi on murtoluvun osoittaja tai nimittäjä, sitä suurempi on itse murtoluku. Tämä taas puolestaan johtaa virheisiin silloin, kun pitäisi verrata murtolukujen suuruutta. Verrattaessa esimerkiksi murtolukuja $\frac{5}{9}$ ja $\frac{3}{4}$, saatetaan virheellisesti päätellä, että koska viisi on suurempi kuin kolme ja yhdeksän on suurempi kuin neljä, niin $\frac{5}{9}$ on suurempi kuin $\frac{3}{4}$. (Van Hoof ym. 2017.)

Rationaalilukujen tiheyttä on usein vaikea hahmottaa. Luonnolliset luvut ovat diskreettejä eli kahden peräkkäisen luonnollisen luvun välissä ei ole muita luonnollisia lukuja. Toisin sanoen annetulle luonnolliselle luvulle voidaan aina nimetä seuraava luonnollinen luku; luvun 5 jälkeen tulee luku 6, jonka jälkeen tulee luku 7 ja niin edelleen. Tämä johtaa yleiseen virhekäsitykseen, että kahden näennäisesti peräkkäisen rationaaliluvun, kuten lukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$ tai 1,2 ja 1,3, välissä ei myöskään olisi muita lukuja, vaikka rationaaliluvut sen sijaan eivät ole diskreettejä eli kahden rationaaliluvun välissä on aina äärettömän monta muuta rationaalilukua. (Christou 2020; Van Hoof ym. 2017.) Hienostuneemman käsityksen mukaan kahden näennäisesti peräkkäisen desimaaliluvun välillä on kymmenen tai jopa sata lukua, jotka on kaikki mahdollista luetella. Tästä esimerkkinä desimaaliluvut 0,5 ja 0,6, joiden välillä on luvut 0,51, 0,52, 0,53 ja niin edelleen tai jopa luvut 0,511, 0,512, 0,513 ja niin edelleen. Ei kuitenkaan käsitetä, että kahden näennäisesti peräkkäisen desimaaliluvun välissä on ääretön määrä lukuja, joita kaikkia ei ole mahdollista luetella. (Christou 2015)

2.2 Taustaa

NNB:n taustoittamiseksi on tehty tutkimusta kahdesta eri näkökulmasta; käsitteellisen muutoksen näkökulmasta ja ajattelun kaksoisprosessointiteorian näkökulmasta. Käsitteellisen muutoksen näkökulma selittänee NNB:n alkuperän ja kehityksen, kun taas ajattelun kaksoisprosessointiteoria selittänee ne prosessit, jotka vaikuttavat taustalla kun ihmiset käsittelevät rationaalilukutehtäviä. (Van Hoof ym. 2017.) Kaksoisprosessointiteoria selittänee, miksi he, joilla on aiheen hallinnan kannalta kaikki tieto ja taito vastata asetettuun kysymykseen oikein, vastaavat kuitenkin väärin (Van Hoof ym. 2020).

2.2.1 Käsitteellisen muutoksen näkökulma

Jo varhaisessa lapsuudessa opetellaan laskemaan luonnollisilla luvuilla käyttäen apuna usein käsiä tai muita fyysisiä esineitä. Näiden varhaisten laskukokemusten perusteella ihmiselle muodostuu kehysteoria siitä, mitä luvut ovat ja miten ne käyttäytyvät. Tässä muodostuneessa lukujen kehysteoriassa luvut käyttäytyvät kuten luonnolliset luvut. Ne ovat diskreettejä eli annetulle luonnolliselle luvulle voidaan aina nimetä seuraava luku. Numeroiden lukumäärä kertoo luvun suuruuden eli mitä enemmän luvussa on numeroita, sitä suurempi luku on. Lisäksi yhteen laskeminen ja kertominen tekee luvun aina suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen taas pienentää lukua. (Van Hoof ym. 2017.)

Kun myöhemmin kohdataan rationaalilukuja, tämä alkuperäinen lukujen kehysteoria toimii ikään kuin tulkitsevana suodattimena uudelle tiedolle. Oppiminen on additiivista eli uusi tieto sisällytetään vähitellen alkuperäiseen lukujen kehysteoriaan. Ongelmaa ei muodostu, kun uusi tieto sopii yhteen vanhan tiedon kanssa. Mutta kun uusi tieto on ristiriidassa vanhan tiedon kanssa, tuhoaa ristiriitaisen tiedon lisääminen johdonmukaisuuden alkuperäisessä lukujen kehysteoriassa ja johtaa epäjohdonmukaisuuksiin ja virhekäsityksiin. Syntyneet virhekäsitykset yhdistävät siis osia alkuperäisestä lukujen kehysteoriasta uuteen informaatioon, joka sulautuu uudeksi tiedoksi. Yhtenä esimerkkinä tästä voidaan pitää murtolukujen vertailua, jossa oletetaan, että murtoluvuista suurempi on se, jolla on suurempi nimittäjä tai osoittaja, ottamatta huomioon murtoluvun termien välistä yhteyttä. Johtuen epäkohdasta aiemman lukujen kehysteorian ja rationaalilukujen ominaisuuksien välillä, ihmisten on käytävä läpi käsitteen muutos eli aiemman tiedon huomattava uudelleenrakennus, jotta he voivat tavoittaa uuden laajemman käsityksen luvuista. Käsitteen muutos on kuitenkin aina hidas ja asteittainen prosessi. (Van Hoof ym. 2017.)

2.2.2 Ajattelun kaksoisprosessointiteoria

Kaksoisprosessointiteorian mukaan ihmisellä on kaksi eri tyyppistä ajattelun prosessia; intuitiivinen ja analyyttinen. Intuitiivinen päättely on nopeaa, automaattista ja vaatii vain vähän työmuistin käyttöä. Analyyttinen päättely sen sijaan on hidasta, kontrolloitua ja vaatii työmuistin käyttämistä. Intuitiivinen päättely on käytössä automaattisesti ja johtaa usein oikeaan vastaukseen. (Van Hoof ym. 2017.) Vamvakoussi ym. (2012) argumentoivatkin, että kohdattaessa rationaalilukutehtävä, ensimmäinen, intuitiivinen vastaus perustuu luonnollisiin lukuihin. Välillä intuitiivinen päättely saattaa kuitenkin johtaa väärään vastaukseen sellaisissa tehtävissä, joissa tarvitaankin laajempaa analyyttistä päättelyä. Tässä tapauksessa on kaksi mahdollisuutta, joko analyyttinen päättely ei keskeytä intuitiivista päättelyä ja päädytään nopeasti väärään vastaukseen tai vaihtoehtoisesti analyyttinen päättely keskeyttää intuitiivisen päättelyn ja luo vaihtoehtoisen vastauksen, joko voi olla joko oikein tai väärin. Väärä vastaus voi siis olla joko intuitiivisen päättelyn tulos, jota analyyttinen päättely ei ole keskeyttänyt, tai epäonnistuneen analyyttisen päättelyn tulos. Tätä käytetään hyväksi NNB:tä tutkittaessa. (Van Hoof ym. 2017.)

Van Hoof ym. (2020) tutkivat, onko NNB:llä intuitiivista luonnetta rajaamalla vastausaikaa, sillä kaksoisprosessointiteorian mukaan intuitiivinen päättely on nopeampaa kuin analyyttinen päättely. Tutkimuksessa tutkittiin aikaansaako vastausajan rajaaminen enemmän intuitiivisia vastauksia verrattuna siihen jos vastausaikaa ei rajoiteta. Tutkimuksen mukaan vastausaikaa rajaamalla vastausten oikeellisuus laski paljon enemmän tehtävissä, jotka vaativat analyyttistä päättelyä, kuin tehtävissä, jotka voi päätellä intuitiivisesti, mitä osoittaa, että NNB:llä on intuitiivista luonnetta. On esitetty, että mikäli NNB:llä on intuitiivista luonnetta, ei sitä ole mahdollista täysin sivuuttaa edes niiden, joilla on hyvin syvällinen ymmärrys rationaalilukujen osalta. (Obersteiner 2013).

3 Luonnollisten lukujen aiheuttaman harhan tutkiminen

NNB:n tutkimiseksi on käytetty erilaisia metodeja, kuten kynä-paperi-testejä (Christou 2015; Christou & Vamvakoussi 2023; Gómez ym. 2014; Van Hoof ym. 2015a; Van Hoof ym. 2015b) ja tietokoneella tehtyjä valintatehtäviä (Christou ym. 2020; DeWolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2013; Obersteiner ym. 2016; Obersteiner ym. 2020; Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2013). Tutkimuksissa on tutkittu vastausten oikeellisuutta. Vastausten oikeellisuuden lisäksi osassa tutkimuksista on mitattu myös aikaa, joka kuluu oikean vastauksen muodostamiseen, eli reaktioaikaa (Christou ym. 2020; DeWolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2013; Obersteiner ym. 2016; Obersteiner ym. 2020; Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2020). Reaktioaikaa on käytetty tutkimuksissa erottamaan toisistaan intuitiivinen ja analyyttinen päättely ongelmaa ratkaistaessa. Oletuksena on, että ensimmäinen, intuitiivinen vastaus perustuu luonnollisiin lukuihin. (Vamvakoussi 2012.)

Tutkimuksissa tehtävät on jaettu kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin. Kongruenteissa tehtävissä luonnollisiin lukuihin perustuvia ominaisuuksia käyttämällä päädytään oikeaan vastaukseen, kun taas inkongruenteissa tehtävissä luonnollisiin lukuihin perustuvia ominaisuuksia käyttämällä päädytään väärään vastaukseen. (Van Hoof ym. 2017.) Suurempaa oikeellisuutta kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä pidetään osoituksena NNB:n esiintymisestä. (Obersteiner ym. 2013.) Tutkimuksissa, joissa mitataan sekä tehtävien oikeellisuutta että reaktioaikaa, pidetään osoituksena NNB:n esiintymisestä pidempää vastausaikaa oikein vastatuissa inkongruenteissa tehtävissä verrattuna oikein vastattuihin kongruentteihin tehtäviin. (Vamvakoussi ym. 2013). Oletuksena on, että koska inkongruentteihin tehtäviin vastaaminen vaatii analyyttistä päättelyä, kestää se kauemmin kuin kongruentteihin tehtäviin vastaaminen, mihin riittää nopeampi intuitiivinen päättely. (Vamvakoussi ym. 2012.)

3.1 Peruslaskutoimitukset

Kun kaksi luonnollista lukua lasketaan yhteen tai kerrotaan keskenään, lopputulos on aina alkuperäisiä lukuja suurempi, lukuun ottamatta lukuja 0 ja 1. Vastaavasti kun kaksi luonnollista lukua vähennetään toisistaan tai jaetaan keskenään, lopputulos on aina pienempi kuin vähennettävä tai jaettava. Luonnollisten lukujen perusteella yhteen laskeminen ja kertominen tekee siis suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen taas pienemmäksi.

Rationaaliluvuilla tämä ei välttämättä pidä paikkaansa, vaan se riippuu kyseessä olevista luvuista. (Vamvakoussi ym. 2013.) Tämä kuitenkin johtaa yleiseen virhekäsitykseen, että yhteenlasku ja kertominen tekee aina suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen aina pienemmäksi (Christou 2015). NNB:tä tutkitaan peruslaskutoimitusten suhteen perustuen tähän virhekäsitykseen.

NNB:tä on tutkittu joko yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskujen suhteen (Christou 2015; Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2015b) tai vain kerto- ja jakolaskujen suhteen (Christou ym. 2020; Christou & Vamvakoussi 2023; Obersteiner ym. 2016). Tutkimuksissa matemaattinen väite on esitetty joko yhtälönä (Christou 2015; Christou ym. 2020; Christou & Vamvakoussi 2023) tai epäyhtälönä (Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2015b; Obersteiner ym. 2016), jossa tuntematonta muuttujaa on merkitty joko alaviivalla tai algebrallisella symbolilla. Tutkimuksissa kysytään, onko mahdollista löytää sellainen luku, jolla esitetty yhtälö tai epäyhtälö pitää paikkansa tai onko esitetty yhtälö tai epäyhtälö mahdollinen (Christou 2015). Lisäksi epäyhtälöitä on tutkittu myös niin, että epäyhtälölle tulee valita sopiva matemaattinen operaatio siten, että epäyhtälö pitää paikkansa. (Christou 2015.)

3.1.1 Yhtälöt

NNB:tä tutkittaessa peruslaskutoimitusten suhteen on yhtälöt jaettu kongruentteihin ja inkongruentteihin joko lukujen tai laskutoimitusten suhteen. Kongruentti yhtälö lukujen suhteen on yhtälö, jossa tuntematon muuttuja on luonnollinen luku, kun taas inkongruentissa yhtälössä tuntematon muuttuja on rationaaliluku. Kongruentti yhtälö laskutoimitusten suhteen on yhtälö, joka toteuttaa ehdon, että yhteen laskeminen ja kertominen tekee suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen pienemmäksi. Inkongruentti yhtälö laskutoimitusten suhteen vastaavasti on yhtälö, joka ei toteuta ehtoa, että yhteen laskeminen ja kertominen tekisi suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen taas pienemmäksi. (Christou 2015; Christou ym. 2020; Christou & Vamvakoussi 2023.)

Christou (2015) sekä Christou ja Vamvakoussi (2023) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen jakamalla yhtälöt kolmeen eri kategoriaan: 1) sekä lukujen, että laskutoimitusten suhteen kongruentteihin, 2) lukujen suhteen inkongruentteihin, mutta laskutoimitusten suhteen kongruentteihin ja 3) sekä luvun, että laskutoimitusten suhteen inkongruentteihin. Erona oli, että Christou (2015) käytti tutkimuksessaan kaikkia peruslaskutoimituksia, kun taas Christou ja Vamvakoussi (2023) käyttivät tutkimuksessaan vain kerto- ja jakolaskuja.

Christoun (2015) tutkimuksessa sekä lukujen, että laskutoimitusten suhteen kongruentti yhtälö oli esimerkiksi 7 × _ = 21. Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksessa vastaava yhtälö oli esimerkiksi 3 × _ = 12. Kummassakin yhtälössä tuntematon muuttuja on luonnollinen luku ja kertominen tekee suuremmaksi. Christoun (2015) tutkimuksessa yhtälö, joka ovat lukujen suhteen inkongruentti, mutta laskutoimitusten suhteen kongruentti oli esimerkiksi 6 × _ = 11. Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksessa vastaava yhtälö oli esimerkiksi 4 × _ = 31. Kummassakin yhtälössä tuntematon muuttuja on rationaaliluku ja kertominen tekee suuremmaksi. Christoun (2015) tutkimuksessa yhtälö, joka on sekä lukujen, että laskutoimitusten suhteen inkongruentti oli esimerkiksi 2 : _ = 5. Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksessa vastaava yhtälö oli esimerkiksi 7 ÷ _ = 42. Kummassakin yhtälössä tuntematon muuttuja on rationaaliluku ja kumpikaan yhtälö ei toteuta ehtoa, että jakaminen tekisi pienemmäksi.

Christou ym. (2020) tutkivat niin ikään NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen, mutta jakoivat tehtävät neljään eri kategoriaan: 1) laskutoimitusten suhteen kongruentteihin, 2) laskutoimitusten suhteen inkongruentteihin, 3) yhtälön tekijöiden muodon suhteen kongruentteihin ja 4) yhtälön tekijöiden muodon suhteen inkongruentteihin. Laskutoimitusten suhteen kongruentti yhtälö oli esimerkiksi 6 × _ = 498, jossa kertominen tekee suuremmaksi tai esimerkiksi 735 ÷ _ = 8, jossa jakaminen tekee pienemmäksi. Laskutoimitusten suhteen inkongruentti yhtälö oli esimerkiksi 437 × _ = 3, jossa kertominen ei tee suuremmaksi tai esimerkiksi 9 ÷ _ = 656, jossa jakaminen ei tee pienemmäksi. Toisin kuin Christoun (2015) ja Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksissa, joissa tehtävät oli jaettu lukujen suhteen kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, onko tuntematon muuttuja luonnollinen luku vai rationaaliluku, Christou ym. (2020) jakoivat tehtävät kongruentteihin ja inkongruentteihin sen perusteella, onko yhtälössä tekijä samaa muotoa yhtälön vastauksen kanssa vai ei. Yhtälön tekijöiden muodon suhteen kongruentti yhtälö oli esimerkiksi 6,3 × _ = 2,1, jossa sekä annettu tekijä, että vastaus ovat kummatkin desimaalilukumuodossa. Yhtälön tekijöiden muodon suhteen inkongruentti tehtävä oli esimerkiksi 4 ÷ _ = 7,6, jossa annettu tekijä ja vastaus ovat keskenään eri muotoa. Toisin kuin Christoun (2015) ja Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksessa, Christoun ym. (2020) tutkimuksessa mitattiin vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa.

3.1.2 Epäyhtälöt

NNB:tä on tutkittu peruslaskutoimitusten suhteen esittämällä matemaattisia väittämiä, joiden paikkansapitävyyttä tuli arvioida (Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2015b; Obersteiner ym. 2016) sekä esittämällä matemaattisia lausekkeita, joiden suuruutta tuli arvioida (Christou 2015). Lisäksi NNB:tä on tutkittu antamalla laskutoimitus, jonka arvoa tuli arvioida (Van Hoof ym. 2015a). Tehtävät, joissa matemaattisen väitteen paikkansapitävyyttä tuli arvioida, jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin perustuen siihen, päädytäänkö oikeaan vai väärään vastaukseen korvaamalla tuntematon muuttuja luonnollisella luvulla (Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2015b; Obersteiner ym. 2016). Tehtävät, joissa itse laskutoimitusta tai laskutoimituksen arvoa tuli arvioida, jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin olettamalla, että yhteen laskeminen ja kertominen tekee aina suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen aina pienemmäksi (Christou 2015; Van Hoof ym. 2015a).

Vamvakoussi ym. (2012), Vamvakoussi ym. (2013) sekä Van Hoof ym. (2015b) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen esittämällä matemaattisia väittämiä, joiden paikkansapitävyyttä tuli arvioida. Tutkimuksissa käytettiin yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Tehtävät jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin niin ikään sillä perusteella, päädytäänkö oikeaan vai väärään vastaukseen korvaamalla tuntematon muuttuja luonnollisella luvulla. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa kongruentti väittämä oli esimerkiksi yhteenlaskun suhteen että $1 + 10y$ on aina suurempi kuin 1. Vamvakoussin ym. (2013) tutkimuksessa kongruentti väittämä oli esimerkiksi yhteenlaskun suhteen että $5 + 2x$ voi olla suurempi kuin 5. Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksessa kongruentti väittämä oli esimerkiksi että epäyhtälö $x > x + 2$ ei voi pitää paikkansa. Korvaamalla väittämien tuntemattomat muuttujat luonnollisilla luvuilla, päädytään oikeaan vastaukseen. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa inkongruentti väittämä oli esimerkiksi jakolaskun suhteen että $2 \div y$ on aina pienempi kuin kaksi. Vamvakoussin ym. (2013) tutkimuksessa inkongruentti väittämä oli esimerkiksi jakolaskun suhteen että $5 \div x$ voi olla suurempi kuin 5. Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksessa jakolaskun suhteen inkongruentti väittämä oli esimerkiksi, että epäyhtälö $x \div 4 > x$ pitää paikkansa. Korvaamalla väittämien tuntemattomat muuttujat luonnollisilla luvuilla, päädytään väärään vastaukseen.

Myös Obersteiner ym. (2016) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen esittämällä matemaattisia väittämiä, joiden paikkansapitävyyttä tuli arvioida, mutta toisin kuin

Vamvakoussi ym. (2012), Vamvakoussi ym. (2013) ja Van Hoof ym. (2015b) Obersteiner ym. (2016) käyttivät tutkimuksessaan vain kerto- ja jakolaskuja. Tutkimuksessaan he kysyivät esimerkiksi, onko mahdollista, että $4 \times x < 4$, kun x on positiivinen rationaaliluku.

Christou (2015) tutki NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen jo aiemmin käsiteltyjen yhtälöiden lisäksi myös epäyhtälöitä käyttäen. Tutkimuksessa esitettiin epäyhtälöitä, joiden arvot oli annettu, mutta joihin tuli valita sopiva laskutoimitus. Vaihtoehtoina oli joko kerto- tai jakolasku. Kongruentit tehtävät sisälsivät vain luonnollisia lukuja ja toteuttivat ehdon, jonka mukaan kertominen tekee suuremmaksi ja jakaminen pienemmäksi. Kongruentti tehtävä oli esimerkiksi 3 _ 10 > 3. Inkongruentit tehtävät sisälsivät luonnollisten lukujen lisäksi lukuja joko desimaali- tai murtolukumuodossa, eivätkä toteuttaneet ehtoa, jonka mukaan kertominen tekisi suuremmaksi ja jakaminen pienemmäksi. Inkongruentti tehtävä oli esimerkiksi 6 _ 0,2 < 6, jossa on käytetty desimaalilukua sekä $10 \_ \frac{1}{2} < 10$, jossa on käytetty murtolukua.

Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen pyytämällä arvioimaan esitetyn matemaattisen lausekkeen suuruutta. Tehtävät jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen oletuksen perusteella, että yhteen laskeminen ja kertominen tekee aina suuremmaksi ja vähentäminen ja jakaminen aina pienemmäksi. Kongruentti tehtävä oli esimerkiksi sellainen, jossa kysytään, onko $50 \times \frac{3}{2}$ suurempi vai pienempi kuin 50. Olettamalla, että kertominen tekee aina suuremmaksi, päädytään oikeaan vastaukseen. Inkongruentti tehtävä oli esimerkiksi sellainen, jossa kysytään, onko $72 \times 0{,}99$ suurempi vai pienempi kuin 72. Olettamalla, että kertominen tekee aina suuremmaksi, päädytään väärään vastaukseen.

3.2 Rationaalilukujen suuruus

Murtoluku nähdään usein kahtena erillisenä lukuna sen sijaan, että se nähtäisiin osoittajan ja nimittäjä välisenä suhteena. Tämä murtoluvun väärä tulkinta saattaa johtaa virhekäsitykseen, että murtoluvun numeerinen arvo kasvaa kun murtoluvun osoittaja, nimittäjä tai kumpikin kasvavat aivan kuten luonnollisilla luvuilla. Vastaavasti desimaaliluvuilla on todettu, että osa virheellisesti olettaa, että mitä suurempi desimaaliluvun desimaaliosa on tai mitä enemmän desimaaliluvun desimaaliosassa on numeroita, sitä suurempi myös itse luku on. (Van Hoof ym. 2017.) NNB:tä tutkitaan rationaalilukujen suuruuden suhteen perustuen näihin virhekäsityksiin.

3.2.1 Murtoluvut

NNB:tä on tutkittu murtolukujen suuruuden suhteen joko tehtävillä, joissa tulee verrata keskenään kahta erisuuruista murtolukua ja valita murtoluvuista suurempi (DeWolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2013; Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2015a; Van Hoof ym. 2020) tai tehtävillä, joissa tulee asettaa annettu joukko murtolukuja suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan (Christou 2015; Van Hoof ym. 2015a). Tehtävät, joissa tulee verrata kahden annetun murtoluvun suuruutta on jaettu kolmeen eri kategoriaan: 1) Tehtäviin, joissa vertailtavilla murtolukupareilla on yhteinen tekijä (Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2020). 2) Tehtäviin, joissa vertailtavilla murtolukupareilla ei ole yhteisiä tekijöitä (De Wolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2020; Van Hoof ym. 2015a). 3) Tehtäviin, jotka sisältävät sekä murtolukupareja, joilla on yhteisiä tekijöitä, että murtolukupareja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä (Gomez ym. 2014; Obersteiner ym. 2013; Vamvakoussi ym. 2012).

Tehtävät, joissa vertailtavilla murtolukupareilla on yhteinen tekijä, jaetaan kongruentteihin ja inkongruentteihin sen perusteella, onko vertailtavalla murtolukuparilla yhteinen nimittäjä vai osoittaja. Kongruentti tehtävä on sellainen, jossa vertailtavalla murtolukuparilla on yhteinen nimittäjä ja inkongruentti tehtävä taas on sellainen, jossa vertailtavalla murtolukuparilla on yhteinen osoittaja. (Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2020.) Tehtävissä, joissa vertailtavilla murtolukupareilla ei ole yhteisiä tekijöitä, jaetaan kongruentteihin ja inkongruentteihin sen perusteella, päädytäänkö vertailtavien murtolukuparien tekijöiden suuruutta vertaamalla oikeaan vai väärään vastaukseen. Kongruentti tehtävä on sellainen, jossa murtolukujen tekijöitä vertaamalla päädytään oikeaan vastaukseen eli vertailtavasta murtolukuparista suuremmalla on myös suurempi osoittaja ja nimittäjä. Inkongruentti tehtävä taas on sellainen, jossa murtolukujen tekijöitä vertaamalla päädytään väärään vastaukseen eli murtolukuparista suuremmalla onkin pienempi osoittaja ja nimittäjä. (De Wolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2020; Van Hoof ym. 2015a.) Lisäksi osassa tutkimuksista on mitattu myös vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa (DeWolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2020; Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2013).

Van Hoof ym. (2013) ja Van Hoof ym. (2020) tutkivat NNB:tä murtolukujen suuruuden suhteen pyytämällä valitsemaan annetuista murtolukupareista suuremman. Vastausten oikeellisuuden lisäksi Van Hoof ym. (2013) mittasivat reaktioaikaa. Tehtävät jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen mukaan, oliko vertailtavilla murtolukupareilla yhteinen nimittäjä vai osoittaja. Van Hoofin ym. (2014) tutkimuksessa vertailtava kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{11}{26}$ ja $\frac{17}{26}$, jossa kummallakin murtoluvulla on yhteinen nimittäjä 26. Van Hoofin ym. (2020) tutkimuksessa taas vertailtava kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{6}{13}$ ja $\frac{9}{13}$, joilla on yhteinen nimittäjä 13. Van Hoofin ym. (2014) tutkimuksessa vertailtava inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{10}{27}$ ja $\frac{10}{21}$, jossa kummallakin murtoluvulla on yhteinen osoittaja kymmenen. Van Hoofin ym. (2020) tutkimuksessa taas vertailtava inkongruentti murtolukupari esimerkiksi $\frac{8}{11}$ ja $\frac{8}{17}$, joilla on yhteinen osoittaja 8.

Kuten Van Hoof ym. (2013) ja Van Hoof ym. (2020) myös DeWolf ja Vosniadou (2011), Obersteiner ym. (2020) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä murtolukujen suuruuden suhteen pyytämällä valitsemaan annetuista murtolukupareista suuremman. DeWolf ja Vosniadou (2011), Obersteiner ym. (2020) ja Van Hoof ym. (2015a) jakoivat kuitenkin tehtävät kongruentteihin ja inkongruentteihin perustuen siihen, päädytäänkö oikeaan vai väärään vastaukseen kun verrataan murtolukujen tekijöiden suuruutta. DeWolfin ja Vosniadoun (2011) tutkimuksessa kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{2}{5}$ ja $\frac{5}{7}$, jossa päättelemällä, että koska viisi on suurempi kaksi ja seitsemän on suurempi kuin viisi, päädytään oikeaan vastaukseen, että $\frac{5}{7}$ on suurempi kuin $\frac{2}{5}$. Obersteinerin ym. (2020) tutkimuksessa vastaava kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{6}{37}$ ja $\frac{13}{43}$, jossa päättelemällä kuten edellä, päädytään oikeaan vastaukseen, että $\frac{13}{43}$ on suurempi kuin $\frac{6}{37}$. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{14}{18}$ ja $\frac{19}{31}$, jossa niin ikään edellisten tavoin päättelemällä, päädytään oikeaan vastaukseen, että $\frac{29}{31}$ on suurempi kuin $\frac{14}{18}$. DeWolfin ja Vosniadoun (2011) tutkimuksessa inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{3}{7}$ ja $\frac{2}{3}$, jossa päättelemällä, että koska kolme on suurempi kuin kaksi ja seitsemän on suurempi kuin kolme, päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{3}{7}$ olisi suurempi kuin $\frac{2}{3}$. Obersteinerin ym. (2020) tutkimuksessa inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{17}{91}$ ja $\frac{13}{41}$, jossa päättelemällä kuten edellä päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{17}{91}$ olisi suurempi kuin $\frac{13}{41}$. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{3}{9}$ ja $\frac{2}{5}$, jossa niin ikään edellisten tavoin päättelemällä päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{3}{9}$ olisi suurempi kuin $\frac{2}{5}$.

Toisin kuin Van Hoof ym. (2015a) De Wolf ja Vosniaudou (2011) sekä Obersteiner ym. (2020) mittasivat oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa.

Myös Gomez ym. (2014), Obersteiner ym. (2013) ja Vamvakoussi ym. (2012), tutkivat NNB:tä murtolukujen suuruuden suhteen pyytämällä valitsemaan annetuista murtolukupareista suuremman, mutta heidän tutkimuksensa sisälsi sekä tehtäviä, joissa vertailtavilla murtolukupareilla oli yhteinen tekijä, kuin tehtäviä, joissa vertailtavilla murtolukupareilla ei ollut yhteisiä tekijöitä. Tehtävät, joissa murtoluvuilla on yhteinen tekijä jaettiin niin ikään kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, onko vertailtavilla murtoluvuilla yhteinen osoittaja vai nimittäjä kun taas tehtävät, joissa vertailtavilla murtolukupareilla ei ollut yhteisiä tekijöitä jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, päädytäänkö oikeaan vai väärään vastaukseen kun verrataan murtolukujen tekijöiden suuruutta. Gomezin ym. (2014) tutkimuksessa kongruentti murtolukupari, jolla on yhteinen tekijä, oli esimerkiksi $\frac{4}{9}$ ja $\frac{8}{9}$, jossa murtoluvuilla on yhteinen nimittäjä yhdeksän. Obersteinerin ym. (2013) tutkimuksessa vastaava kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{7}{8}$ ja $\frac{5}{8}$, joilla on yhteinen nimittäjä kahdeksan. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa vastaava kongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{2}{5}$ ja $\frac{3}{5}$, joilla on yhteinen nimittäjä viisi. Gomezin ym. (2014) tutkimuksessa inkongruentti murtolukupari, jolla on yhteinen tekijä, oli esimerkiksi $\frac{4}{15}$ ja $\frac{4}{6}$, jossa murtoluvuilla on yhteinen osoittaja neljä. Obersteinerin ym. (2013) tutkimuksessa vastaava inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{5}{9}$ ja $\frac{5}{7}$, joilla on yhteinen osoittaja viisi. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa vastaava inkongruentti murtolukupari oli esimerkiksi $\frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{3}$, joilla on yhteinen osoittaja yksi.

Gomezin ym. (2014) tutkimuksessa kongruentti murtolukupari, jolla ei ole yhteisiä tekijöitä, oli esimerkiksi $\frac{5}{7}$ ja $\frac{1}{3}$, missä päättelemällä, että koska viisi on suurempi kuin yksi ja seitsemän on suurempi kuin kolme, päädytään oikeaan vastaukseen että $\frac{5}{7}$ on suurempi kuin $\frac{1}{3}$. Obersteinerin ym. (2013) tutkimuksessa esimerkki vastaavasta vertailtavasta kongruentista murtolukuparista on $\frac{24}{26}$ ja $\frac{11}{19}$, jossa päättelemällä kuten edellä päädytään oikeaan vastaukseen, että $\frac{24}{26}$ on suurempi kuin $\frac{11}{19}$. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa esimerkki vastaavasta vertailtavasta kongruentista murtolukuparista on $\frac{1}{4}$ ja $\frac{19}{20}$, jossa niin ikään edellisten tavoin päättelemällä päädytään oikeaan vastaukseen, että $\frac{19}{20}$ on suurempi kuin $\frac{1}{4}$. Gomezin ym.

(2014) tutkimuksessa inkongruentti murtolukupari, jolla ei ole yhteisiä tekijöitä, oli esimerkiksi $\frac{5}{6}$ ja $\frac{8}{19}$, missä päättelemällä, että koska kahdeksan on suurempi kuin viisi ja 19 on suurempi kuin 6, päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{8}{19}$ olisi suurempi kuin $\frac{5}{6}$. Obersteinerin ym. (2013) tutkimuksessa esimerkki vastaavasta vertailtavasta inkongruentista murtolukuparista oli $\frac{25}{36}$ ja $\frac{19}{24}$, jossa päättelemällä kuten edellä päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{25}{36}$ olisi suurempi kuin $\frac{19}{24}$. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa esimerkki vastaavasta vertailtavasta inkongruentista murtolukuparista on $\frac{28}{90}$ ja $\frac{1}{3}$, jossa niin ikään edellisten tavoin päättelemällä päädytään väärään vastaukseen, että $\frac{28}{90}$ olisi suurempi kuin $\frac{1}{3}$. Toisin kuin Gomez ym. (2014) ja Obersteiner ym. (2013) Vamvakoussi ym. (2012) mittasivat oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa.

Myös Christou (2015) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä murtolukujen suuruuden suhteen, mutta pyysivät järjestämään tehtävässä annetut murtoluvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan. Christoun (2015) tutkimuksessa annettiin esimerkiksi murtoluvut $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{11}$, jotka tuli asettaa suuruusjärjestykseen. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa annettiin esimerkiksi murtoluvut $\frac{5}{100}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{70}{100}$, $\frac{10}{10}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{7}{10}$ ja $\frac{2}{100}$, jotka tuli asettaa suuruusjärjestykseen.

3.2.2 Desimaaliluvut

NNB:tä on tutkittu desimaalilukujen suuruuden suhteen joko antamalla kaksi eri suuruista desimaalilukua ja kysymällä kumpi desimaaliluvuista on suurempi (Vamvakoussi ym. 2012) tai antamalla joukon desimaalilukuja ja pyytämällä järjestämään ne suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan (Christou 2015; Van Hoof ym. 2015a). Vamvakoussi ym. (2012) tutkivat NNB:tä desimaalilukujen suhteen jakamalla tehtävät kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, päädytäänkö oikeaan vai väärään vastaukseen olettamalla, että mitä enemmän luvun desimaaliosassa on numeroita, sitä suurempi on itse desimaaliluku. Kongruentti desimaalilukupari oli esimerkiksi 1,3 ja 1,859, josta päättelemällä, että koska luvun 1,859 desimaaliosassa on enemmän numeroita kuin luvun 1,3 desimaaliosassa, päädytään oikeaan vastausteen että 1,859 on suurempi kuin 1,3. Inkongruentti desimaalilukupari oli esimerkiksi 3,479 ja 3,6, josta päättelemällä, että koska luvun 3,479 desimaaliosassa on enemmän numeroita kuin luvun 3,6 desimaaliosassa, päädytään väärään vastaukseen, että 3,479 olisi suurempi kuin 3,6.

Christou (2015) ja Van Hoof ym. (2015a) sen sijaan tutkivat NNB:tä desimaalilukujen suuruuden suhteen antamalla joukon desimaalilukuja, jotka tuli asettaa suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan. Christoun (2015) tutkimuksessa annettiin esimerkiksi desimaaliluvut 0,12, 1,549, 0,4, 0,387, jotka tuli asettaa suuruusjärjestykseen. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa annettiin esimerkiksi desimaaliluvut 7,651, 7,8 ja 7,08, jotka tuli asettaa suuruusjärjestykseen.

3.2.3 Murtoluvut ja desimaaliluvut

Sen lisäksi, että NNB:tä on tutkittu rationaalilukujen suuruuden suhteen käyttämällä tehtäviä, jotka sisältävät joko murtolukuja tai desimaalilukuja, NNB:tä on tutkittu myös käyttämällä tehtäviä, jotka sisältävät sekä murtolukuja, että desimaalilukuja ja pyytämällä järjestämään annetut luvut suuruusjärjestykseen suurimmasta pienimpään (Van Hoof ym. 2015a). Van Hoof ym. (2015a) pyysi esimerkiksi järjestämään luvut 0,5, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{10}$ ja 0,356 suuruusjärjestykseen sekä ympyröimään luvut, jotka ovat yhtä suuret, mikäli sellaisia tehtävässä esiintyy.

3.3 Rationaalilukujen tiheys

Luonnolliset luvut ovat diskreettejä eli kahden peräkkäisen luonnollisen luvun välissä ei ole muita luonnollisia lukuja, mikä saattaa johtaa virhekäsitykseen, että kahden näennäisesti peräkkäisen rationaaliluvun välissä ei myöskään olisi muita lukuja, vaikka minkä tahansa kahden rationaaliluvun välissä on ääretön määrä muita rationaalilukuja (Van Hoof ym. 2017). NNB:tä tutkitaan rationaalilukujen tiheyden suhteen perustuen tähän virhekäsitykseen.

NNB:tä on tutkittu rationaalilukujen tiheyden suhteen joko antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja kysymällä, kuinka monta lukua näiden kahden luvun välissä on (Christou 2015; Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2015a) tai antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja pyytämällä antamaan jokin luku näiden välistä (Van Hoof ym. 2015a). Tehtävät on jaettu kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, johtaako luonnollisiin lukuihin perustuva päättely oikeaan vai väärään vastaukseen. (Van Hoof ym. 2015a)

Vamvakoussi ym. (2012) tutkivat NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen antamalla kaksi desimaali- tai murtolukua, sekä väitteen, jolla kuvattiin annettujen lukujen välissä olevien lukujen lukumäärää ja jonka paikkansapitävyyttä tuli arvioida. Desimaalilukujen tiheyttä koskeva kongruentti väite oli esimerkiksi, että lukujen 2,32 ja 2,39 välillä on enemmän kuin kolme lukua. Luonnollisten lukujen perusteella olettamalla, että lukujen välissä on vain luvut 2,33, 2,34, 2,35, 2,36, 2,37 ja 2,38, päädytään kuitenkin oikeaan vastaukseen eli että annettujen lukujen välissä on enemmän kuin kolme lukua. Inkongruentti väite oli esimerkiksi, että lukujen 5,12 ja 5,14 välissä on enemmän kuin 4000 lukua. Olettamalla, että lukujen välissä on vain luku 5,13 päädytään väärään vastaukseen. Murtolukujen tiheyttä koskeva kongruentti väite oli esimerkiksi, että lukujen $\frac{1}{7}$ ja $\frac{6}{7}$ välissä on enemmän kuin kaksi lukua. Olettamalla, että lukujen välissä on vain luvut $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ ja $\frac{6}{6}$, päädytään kuitenkin oikeaan vastaukseen, että annettujen lukujen välissä on enemmän kuin kaksi lukua. Inkongruentti väite oli esimerkiksi, että lukujen $\frac{1}{13}$ ja $\frac{3}{13}$ välissä on enemmän kuin 3000 lukua. Olettamalla, että lukujen välissä on vain luku $\frac{2}{13}$ päädytään väärään vastaukseen.

Christou (2015) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja kysymällä, kuinka monta lukua annettujen lukujen välissä on. Christoun (2015) tutkimuksessa annetut luvut olivat näennäisesti peräkkäisiä lukuja, kun taas Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa käytettiin näennäisesti peräkkäisten lukujen lisäksi muitakin lukupareja. Christoun (2015) tutkimuksessa vastausvaihtoehdot olivat, että 1) annettujen lukujen välissä ei ole muita lukuja, 2) annettujen lukujen välissä on luvut, jotka on mahdollista luetella yksitellen ja 3) annettujen lukujen välissä on niin monta lukua, että niitä ei ole mahdollista luetella kaikkia yksitellen. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa vastausvaihtoehtoja oli enemmän ja ne olivat, että 1) lukujen välissä ei ole muita lukuja, 2) lukujen välissä on äärellinen määrä desimaalilukuja, 3) lukujen välissä on äärellinen määrä murtolukuja, 4) lukujen välissä on ääretön määrä desimaalilukuja, 5) lukujen välissä on ääretön määrä murtolukuja, 6) lukujen välissä on ääretön määrä lukuja, jotka voivat olla joko desimaaliluku- tai murtolukumuodossa tai 7) ei mikään edellä mainituista. Kohtaan seitsemän oli mahdollista kirjoittaa oma vastaus. Christoun (2015) tutkimuksessa annetut lukuparit olivat esimerkiksi desimaaliluvut 0,005 ja 0,006 ja murtoluvut $\frac{1}{3}$ ja $\frac{2}{3}$. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa annetut lukuparit olivat esimerkiksi desimaaliluvut 3,42 ja 3,124 ja murtoluvut $\frac{1}{6}$ ja $\frac{1}{7}$.

Myös Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja pyytämällä antamaan jokin luku näiden kahden luvun välistä. Tehtävät jaettiin kongruentteihin ja inkongruentteihin tehtäviin sen perusteella, johtaako luonnollisiin lukuihin perustuva päättely oikeaan vai väärään vastaukseen. Kongruentti tehtävä oli esimerkiksi sellainen, jossa pyydettiin antamaan jokin luku lukujen $\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$ välistä. Luonnollisten lukujen ominaisuuksien perusteella lukujen 1 ja 3 välissä on luku 2, joten antamalla vastaus $\frac{2}{3}$ päädytään oikeaan vastaukseen. Inkongruentti tehtävä oli esimerkiksi sellainen, jossa pyydettiin antamaan jokin luku lukujen 3,49 ja 3,50 välistä. Luonnollisten lukujen ominaisuuksien perusteella lukujen 49 ja 50 välissä ei ole muita lukuja, joten päättelemällä, että lukujen 3,49 ja 3,50 välissä ei ole muita lukuja, päädytään väärään vastaukseen.

4 Rationaalilukujen aiheuttaman harhan tutkiminen eri-ikäisillä

NNB:tä on tutkittu eri-ikäisillä aina alakoulun loppupuolelta aikuisiin saakka. Aikuisilla NNB:tä on tutkittu korkeakouluopiskelijoilla, jotka opiskelevat pääaineenaan muuta kuin matematiikkaa (Christou ym. 2020; Obersteiner ym. 2020; Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2020), ja yliopistolla työskentelevillä matemaatikoilla (Obersteiner ym. 2013; Obersteiner ym. 2016). Tutkimukset NNB:stä keskittyvät useimmiten yhteen tai korkeintaan kahteen eri ikäryhmään, joiden tuloksia vertaillaan keskenään. Useimmissa tutkimuksissa on keskitytty tutkimaan NNB:tä joko peruslaskutoimitusten, rationaaliluvun koon tai rationaaliluvun tiheyden suhteen. Vain kahdessa tutkimuksessa on tutkittu NNB:tä niin peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen koon, kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen. Toinen näistä laajoista tutkimuksista on toteutettu oppilailla alakoulun loppupuolelta lukioon saakka (Van Hoof ym. 2015a) ja toinen taas korkeakouluopiskelijoilla (Vamvakoussi ym. 2012).

Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä laajalla tutkimuksella, joka käsitti oppilaita aina alakoulun loppupuolelta lukioikäisiin saakka. Tutkimus sisälsi tehtäviä niin peruslaskutoimituksista, rationaalilukujen koosta kuin rationaalilukujen tiheydestäkin. Tutkimuksessa oppilaita pyydettiin valitsemaan annetuista murtoluvuista suurempi, asettamaan rationaalilukuja suuruusjärjestykseen, antamaan jokin luku kahden annetun rationaaliluvun välistä ja arvioimaan laskutoimitusten suuruusluokkaa. Tutkimuksessa havaittiin NNB:n vaikutuksen olevan heikointa rationaalilukujen koon suhteen tarkasteltuna, hieman voimakkaampaa peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna ja kaikista voimakkainta rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna. Tarkasteltaessa NNB:tä peruslaskutoimitusten ja rationaalilukujen suuruuden suhteen havaittiin myös, että NNB on kaikista voimakkainta alakouluikäisillä lapsilla ja laskee iän mukana. Sen sijaan tarkasteltaessa NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen havaittiin, että NNB laskee iän mukana vain vähän.

Toinen laaja tutkimus tehtiin korkeakouluopiskelijoilla, ja se sisälsi tehtäviä niin ikään peruslaskutoimituksista, rationaalilukujen koosta ja rationaalilukujen tiheydestä. Tutkimuksessa opiskelijoiden tuli valita kahdesta annetusta murtoluvusta tai desimaaliluvusta suurempi, arvioida heille esitetyn matemaattisen väitteen paikkansapitävyyttä ja arvioida kuinka monta lukua kahden annetun rationaaliluvun välissä on. Tutkimuksessa mitattiin vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa. Rationaalilukuja vertailtaessa ei tehty juurikaan virheitä niin kongruenteissa kuin inkongruenteissakaan tehtävissä, mutta inkongruentteihin tehtäviin oikein vastaaminen kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin tehtäviin. Peruslaskutoimituksia sisältävissä tehtävissä tehtiin enemmän virheitä inkongruenteissa tehtävissä verrattuna kongruentteihin tehtäviin, minkä lisäksi oikein vastaaminen inkongruentteihin tehtäviin kesti kauemmin kuin kongruentteihin tehtäviin. Rationaalilukujen tiheyttä mittaavissa tehtävissä taas tehtiin huomattavasti enemmän virheitä inkongruenteissa tehtävissä kongruentteihin tehtäviin verrattuna. Nämä osoittavat, että NNB:tä esiintyy aikuisilla niin rationaalilukujen suuruuden, peruslaskutoimitusten kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen tarkasteltuna. (Vamvakoussi ym. 2012.) Kuten Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa, myös Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa havaittiin NNB:n vaikutuksen olevan heikointa rationaalilukujen koon suhteen tarkasteltuna, voimakkaampaa peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna ja kaikista voimakkainta rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna.

4.1 Alakouluikäiset

4.1.1 Peruslaskutoimitukset

Van Hoof ym. (2015a) ja Christou (2015) tutkivat NNB:tä alakoulun loppupuolella olevilla oppilailla peruslaskutoimitusten suhteen. Van Hoof ym. (2015a) pyysivät tutkimuksessaan arvioimaan esitettyjen matemaattisten lausekkeiden suuruutta, kun taas Christoun (2015) tutkimuksessa oppilaille esitettiin matemaattinen väite, jonka paikkansapitävyyttä oppilaiden tuli arvioida sekä epäyhtälö, jonka puuttuva laskutoimitus oppilaiden tuli päätellä kun epäyhtälön arvot tunnettiin. Sekä Christoun (2015) että Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksissa oppilaat vastasivat enemmän oikein kongruentteihin kuin inkongruentteihin tehtäviin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy alakouluikäisillä oppilailla peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna. Lisäksi Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa havaittiin, että NNB oli suurinta neljäsluokkalaisilla oppilailla, jotka olivat nuorimpia tutkimukseen osallistuneista ja NNB väheni iän mukana niin, että kuudesluokkalaisilla NNB:tä havaittiin neljäsluokkalaisia vähemmän.

4.1.2 Rationaalilukujen suuruus

Gomez ym. (2014), Christou (2015) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä rationaalilukujen suuruuden suhteen alakouluikäisillä oppilailla. Gomez ym. (2014) ja Van Hoof ym. (2015a) pyysivät tutkimuksissaan oppilaita valitsemaan kahdesta annetusta murtoluvusta suuremman, kun taas Christou (2015) pyysi tutkimuksessaan järjestämään annetut murto- tai desimaaliluvut suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan. Sekä Gomezin ym. (2014), Christoun (2015), että Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksissa vastausten oikeellisuus oli suurempaa kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy alakouluikäisillä oppilailla rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksen mukaan NNB väheni voimakkaasti iän mukana ja kuudesluokkalaisilla NNB:tä havaittiinkin huomattavasti vähemmän kuin neljäsluokkalaisilla, jotka niin ikään olivat nuorimpia tutkimukseen osallistuneita.

4.1.3 Rationaalilukujen tiheys

Christou (2015) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen alakouluikäisillä oppilailla. Tutkimuksissa annettiin kaksi murto- tai desimaalilukua ja kysyttiin, kuinka monta lukua annettujen lukujen välissä on. Lisäksi Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa annettiin kaksi murto- tai desimaalilukua ja pyydettiin antamaan jokin luku näiden kahden annetun luvun välistä. Sekä Christoun (2015), että Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa vastausten oikeellisuus oli suurempaa kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy alakouluikäisillä oppilailla rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna. Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksen mukaan kongruenttien tehtävien oikeellisuus oli jopa huomattavasti suurempaa inkongruentteihin tehtäviin verrattuna, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy hyvin voimakkaasti alakouluikäisillä lapsilla rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna.

4.2 Yläkouluikäiset

4.2.1 Peruslaskutoimitukset

Christou ja Vamvakoussi (2023), Obersteiner ym. (2016), Van Hoof ym. (2015a) ja Van Hoof ym. (2015b) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen. Christoun ja Vamvakoussin (2023) tutkimuksessa kysyttiin, onko mahdollista löytää sellainen luku, jolla annettu yhtälö pitää paikkansa, Obersteinerin ym. (2016) ja Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksissa pyydettiin arvioimaan annettujen epäyhtälöiden paikkansapitävyyttä, kun taas Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa pyydettiin arvioimaan esitettyjen matemaattisten lausekkeiden suuruutta. Van Hoof ym. (2015a) ja Van Hoof ym. (2015b) käyttivät tutkimuksissaan niin yhteen-, vähennys-, kerto- kuin jakolaskujakin, kun taas Christou ja Vamvakoussi (2023) sekä Obersteiner ym. (2016) käyttivät tutkimuksissaan vain kerto- ja jakolaskuja. Van Hoof ym.

(2015a) ja Van Hoof ym. (2015b) havaitsivat, että vastausten oikeellisuus oli suurempaa kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä, mutta toisin kuin Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa, jossa havaittiin NNB:tä kaikkien laskutoimitusten suhteen, Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksessa havaittiin NNB:n olevan merkittävää vain kerto- ja jakolaskujen osalta. Christou ja Vamvakoussi (2023) ja Obersteiner (2016), jotka tutkivat NNB:tä vain kerto- ja jakolaskujen avulla, havaitsivat myös että vastausten oikeellisuus oli suurempaa kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä. Christoun & Vamvakoussin (2023) tutkimuksen mukaan oletus siitä, että kertominen tekee suuremmaksi ja jakaminen pienemmäksi näkyi voimakkaammin kuin oletus, että operaatioihin osallistuvien lukujen tulisi olla samaa muotoa eli molemmat kokonaislukuja tai molemmat esimerkiksi desimaalilukuja.

4.2.2 Rationaalilukujen suuruus

Van Hoof ym. (2013) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä yläkouluikäisillä oppilailla rationaalilukujen suuruuden suhteen. Tutkimuksissa oppilaiden tuli valita kahdesta annetusta murtoluvusta suurempi. Lisäksi Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa tuli asettaa annetut murto- ja desimaaliluvut suuruusjärjestykseen. Van Hoofin ym. (2013) mukaan vastausten oikeellisuusaste oli hyvin korkea niin kongruenteissa kuin inkongruenteissakin tehtävissä, mutta oikein vastaaminen inkongruentteihin tehtäviin kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin tehtäviin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy yläkouluikäisillä oppilailla. Sen sijaan Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksen mukaan, jossa mitattiin vain vastausten oikeellisuutta, NNB:tä ei juurikaan havaittu enää yläkoulun loppupuolella olevilla oppilailla.

4.2.3 Rationaalilukujen tiheys

NNB:tä on tutkittu rationaalilukujen tiheyden suhteen yläkouluikäisillä oppilailla vain yhdessä tutkimuksessa. Van Hoof ym. (2015a) tutkivat rationaalilukujen tiheyttä antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja pyytämällä antamaan jokin luku näiden kahden annetun luvun välistä, sekä antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja kysymällä, kuinka monta lukua näiden kahden luvun välissä on. Kongruenttien tehtävien oikeellisuus oli suurempaa kuin inkongruenttien tehtävien oikeellisuus, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy yläkouluikäisillä oppilailla rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna.

4.3 Lukioikäiset

4.3.1 Peruslaskutoimitukset

Van Hoof ym. (2015a) ja Van Hoof ym. (2015b) tutkivat NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen lukioikäisillä opiskelijoilla. Van Hoof ym. (2015a) pyysivät tutkimuksessaan arvioimaan esitettyjen matemaattisten lausekkeiden suuruutta, kun taas Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksessa pyydettiin arvioimaan annettujen epäyhtälöiden paikkansapitävyyttä. Sekä Van Hoofin ym. (2015a), että Van Hoofin ym. (2015b) tutkimusten mukaan kongruenttien tehtävien oikeellisuus oli suurempi kuin inkongruenttien tehtävien, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy lukio-ikäisillä opiskelijoilla peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna. Van Hoof ym. (2015a) havaitsivat kuitenkin NNB:n vähenevän iän mukana kun tuloksia verrattiin ala- ja yläkouluikäisiin, mutta verrattaessa lukioiän alkupuolella olevia oppilaita lukioiän loppupuolella oleviin, ei huomattu merkittävää eroa. Sen sijaan Van Hoofin ym. (2015b) tutkimuksen mukaan, jossa tutkittiin lukioikäisten lisäksi yläkouluikäisiä, havaittiin, että NNB ei vähene iän mukana.

4.3.2 Rationaalilukujen suuruus

Van Hoof ym. (2013) ja Van Hoof ym. (2015a) tutkivat NNB:tä lukioikäisillä opiskelijoilla murtolukujen suuruuden suhteen. Tutkimuksissa opiskelijoiden tuli valita kahdesta annetusta murtoluvusta suurempi. Lisäksi Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksessa tuli asettaa annetut murto- ja desimaaliluvut suuruusjärjestykseen. Van Hoofin ym. (2013) mukaan vastausten oikeellisuusaste oli hyvin korkea niin kongruenteissa kuin inkongruenteissakin tehtävissä, mutta oikein vastaaminen inkongruentteihin tehtäviin kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin tehtäviin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy lukioikäisillä opiskelijoilla rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna. Sen sijaan Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksen mukaan, jossa mitattiin vain vastausten oikeellisuutta, NNB:tä ei juurikaan havaittu enää lukioikäisillä opiskelijoilla. Van Hoof ym. (2013) havaitsivat myös, että NNB ei vähene iän mukana, kun taas Van Hoofin ym. (2015a) tutkimuksen mukaan NNB laskee voimakkaasti iän mukana ja näin ollen lukion loppupuolella NNB on jo olematonta.

4.3.3 Rationaalilukujen tiheys

NNB:tä on tutkittu rationaalilukujen tiheyden suhteen lukioikäisillä opiskelijoilla vain yhdessä tutkimuksessa. Van Hoof ym. (2015b) tutkivat rationaalilukujen tiheyttä antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja pyytämällä antamaan jokin luku näiden kahden annetun luvun välistä, sekä antamalla kaksi murto- tai desimaalilukua ja kysymällä, kuinka monta lukua näiden kahden luvun välissä on. Kongruenttien tehtävien oikeellisuus oli suurempaa kuin inkongruenttien tehtävien oikeellisuus, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy lukioikäisillä opiskelijoilla rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna.

4.4 Aikuiset

4.4.1 Peruslaskutoimitukset

Christou ym. (2020), Vamvakoussi ym. (2012) ja Vamvakoussi ym. (2013) tutkivat NNB:tä aikuisilla korkeakouluopiskelijoilla peruslaskutoimitusten suhteen. Christou ym. (2020) esittivät tutkimuksessaan yhtälöitä, joiden oikeellisuutta tuli arvioida. Vamvakoussi ym. (2012) ja Vamvakoussi ym. (2013) sen sijaan esittivät tutkimuksissaan matemaattisia väittämiä, joiden paikkansapitävyyttä tuli arvioida. Christoun ym. (2020) tutkimus sisälsi vain kerto- ja jakolaskuja, kun taas Vamvakoussin ym. (2012) ja Vamvakoussin ym. (2013) tutkimus sisälsi kaikki peruslaskutoimitukset. Yhteistä tutkimuksille oli, että niin Christou ym. (2020), Vamvakoussi ym. (2012) kuin Vamvakoussinkin ym. (2013) mittasivat tutkimuksissaan oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa. Tutkimusten mukaan enemmän virheitä tehtiin inkongruenteissa kuin kongruenteissa tehtävissä ja inkongruentteihin tehtäviin oikein vastaaminen kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin tehtäviin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy aikuisilla peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna.

Obersteiner ym. (2016) tutkivat niin ikään NNB:n esiintymistä aikuisilla peruslaskutoimitusten suhteen, mutta tutkimuksessa käytettiin korkeakouluopiskelijoiden sijaan yliopistolla työskenteleviä matemaatikoita. Tutkimuksessa tuli arvioida annettujen epäyhtälöiden paikkansapitävyyttä, mutta kuten Christoun ym. (2020) tutkimus, myös Obersteinerin ym. (2016) tutkimus sisälsivät vain kerto- ja jakolaskuja. Vastausten oikeellisuuden lisäksi myös Obersteinerin ym. (2016) tutkimuksessa mitattiin reaktioaikaa. Tutkimuksen mukaan matematiikoilla ei havaittu NNB:tä peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna.

4.4.2 Rationaalilukujen suuruus

De Wolf ja Vosniadou (2011), Obersteiner ym. (2020), Vamvakoussi ym. (2012) ja Van Hoof ym. (2020) tutkivat NNB:tä aikuisilla korkeakouluopiskelijoilla murtolukujen suuruuden suhteen pyytämällä valitsemaan annetuista murtolukupareista suuremman. Lisäksi Vamvakoussi ym. (2012) tutkivat NNB:tä desimaalilukujen suhteen pyytämällä valitsemaan annetuista desimaalilukupareista suuremman. Van Hoofin ym. (2020) tutkimuksessa verrattavilla murtolukupareilla oli yhteinen tekijä, kun taas De Wolfin ja Vosniadoun (2011) ja Obersteinerin ym. (2020) tutkimuksissa verrattavilla murtolukupareilla ei ollut yhteisiä tekijöitä. Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksessa taas osa tehtävistä oli sellaisia, joissa verrattavilla murtolukupareilla oli yhteinen tekijä, kun taas osa oli sellaisia tehtäviä, joissa yhteisiä tekijöitä ei ollut. Niin De Wolfin ja Vosniadoun (2011), Obersteinerin ym. (2020), Vamvakoussin ym. (2012) kuin Van Hoofinkin ym. (2020) tutkimuksissa mitattiin oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa. De Wolfin ja Vosniadoun (2011) ja Van Hoofin ym. (2020) tutkimusten mukaan vastausten oikeellisuus oli suurempaa kongruenteissa kuin inkongruenteissa tehtävissä, kun taas Vamvakoussin ym. (2012) tutkimuksen mukaan oikeellisuus oli korkea niin kongruenteissa kuin inkongruenteissakin tehtävissä. Kuitenkin niin De Wolfin ja Vosniadoun (2011), Van Hoofin ym. (2020) kuin Vamvakoussinkin ym. (2012) mukaan oikein vastaaminen inkongruentteihin tehtäviin kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin tehtäviin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy korkeakouluopiskelijoilla. Sen sijaan Obersteiner ym. (2020), jotka jakoivat tutkimukseen osallistujat kahteen ryhmään aiemman matemaattisen osaamisen perusteella, havaitsivat tutkimuksessaan NNB:n sijaan käänteistä NNB:tä eli mitä pienemmät murtoluvun tekijät ovat, sitä suurempi murtoluvun oletetaan olevan, joka korostui varsinkin alemmassa matemaattisen taidon ryhmässä.

Obersteiner ym. (2013) tutkivat niin ikään NNB:n esiintymistä aikuisilla murtolukujen suuruuden suhteen, mutta tutkimuksessaan he käyttivät korkeakouluopiskelijoiden sijaan yliopistolla työskenteleviä matemaatikoita. Myös heidän tutkimuksessaan tuli valita kahdesta annetusta murtoluvusta suurempi. Kuten Vamvakoussi ym. (2012), myös Obersteiner ym. (2013) jakoivat tehtävät kahteen eri kategoriaan: niihin, joissa vertailtavilla murtoluvuilla on yhteinen tekijä ja niihin, joissa vertailtavilla murtoluvuilla ei ole yhteisiä tekijöitä, ja mittasivat tehtävien oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa. Kun vertailtavalla murtolukuparilla oli joko yhteinen nimittäjä, tai yhteinen osoittaja, havaittiin, että oikein vastaaminen inkongruentteihin kysymyksiin kesti kauemmin kuin oikein vastaaminen kongruentteihin kysymyksiin, mikä osoittaa, että NNB:tä esiintyy matemaatikoilla rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna. Sen sijaan, kun vertailtavilla murtolukupareilla ei ollut yhteisiä tekijöitä, NNB:tä ei havaittu.

4.4.3 Rationaalilukujen tiheys

NNB:tä on tutkittu rationaalilukujen tiheyden suhteen aikuisilla vain yhdessä tutkimuksessa. Vamvakoussi ym. (2012) tutkivat rationaalilukujen tiheyttä korkeakouluopiskelijoilla antamalla kaksi desimaalilukua tai murtolukua, sekä väitteen, jolla kuvataan annettujen lukujen välissä olevien lukujen lukumäärää, ja jonka paikkansapitävyyttä tuli arvioida. Inkongruentteihin tehtäviin oikein vastaaminen kesti kauemmin kuin kongruentteihin tehtäviin oikein vastaaminen, joskaan reaktioaikojen ero ei ollut kovin suuri. Tutkimuksen mukaan inkongruenteissa tehtävissä tehtiin kuitenkin huomattavasti enemmän virheitä verrattuna kongruentteihin tehtäviin, mitä osoittaa, että NNB:tä esiintyy korkeakouluopiskelijoilla rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna.

4.5 Yhteenveto

Alakouluikäisillä oppilailla on havaittu NNB:tä niin peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen suuruuden kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen tarkasteltuna tutkimuksissa, joissa on mitattu vastausten oikeellisuutta (Christou 2015; Gomez ym. 2014; Van Hoof ym. 2015a). Yläkoulu- ja lukioikäisillä oppilailla on havaittu NNB:tä peruslaskutoimitusten ja rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna tutkimuksissa, joissa on mitattu joko vastausten oikeellisuutta tai vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa (Christou & Vamvakoussi 2023; Obersteiner ym. 2016; Van Hoof ym. 2015a; Van Hoof ym. 2015b). Rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna NNB:tä on havaittu tutkimuksessa, jossa on mitattu sekä vastausten oikeellisuutta, että reaktioaikaa, sen sijaan tutkimuksessa, jossa on mitattu vain vastausten oikeellisuutta, ei NNB:tä ole enää juurikaan havaittu yläkoulu- ja lukioikäisillä oppilailla. (Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2015a).

Aikuisilla korkeakouluopiskelijoilla NNB:tä on havaittu niin peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen suuruuden kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen tarkasteltuna tutkimuksissa, joissa on mitattu sekä vastausten oikeellisuutta, että reaktioaikaa (De Wolf & Vosniadou 2011; Christou ym. 2020, Obersteiner ym. 2020, Vamvakoussi ym. 2012; Vamvakoussi ym. 2013; Van Hoof ym. 2020). Matemaatikoilla sen sijaan NNB:tä ei ole havaittu peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna, eikä rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna silloin, kun vertailtavilla murtoluvuilla ei ole yhteisiä tekijöitä (Obersteiner ym. 2013, Obersteiner ym. 2016). Silloin kun vertailtavilla murtoluvuilla on yhteinen tekijä, NNB:tä havaitaan myös matemaatikoilla (Obersteiner ym. 2013).

NNB:n vaikutuksen on havaittu olevan heikointa rationaalilukujen koon suhteen tarkasteltuna, voimakkaampaa peruslaskutoimitusten suhteen tarkasteltuna ja kaikista voimakkainta rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna (Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2015a). Peruslaskutoimitusten ja rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna NNB:n on havaittu vähenevän iän mukana, joskin rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna NNB:n on havaittu vähenevän iän mukana vain vähän (Van Hoof ym. 2015a). Myös rationaalilukujen suuruuden suhteen NNB:n on havaittu laskevan iän mukana tutkimuksessa, jossa on mitattu vain vastausten oikeellisuutta, sen sijaan tutkimuksessa, jossa on mitattu vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa, ei NNB:n ole havaittu vähenevän iän mukana (Van Hoof ym. 2013, Van Hoof ym. 2015a).

5 Pohdinta

Tämän kirjallisuuskatsauksen tarkoitus oli tutkia, mitä NNB on, miten NNB:tä on tutkittu ja minkälaisia tuloksia on saatu tutkimalla NNB:tä eri-ikäisillä. NNB:tä on tutkittu laajasti aina alakoulun loppupuolelta aikuisiin korkeakouluopiskelijoihin ja matemaatikoihin saakka. NNB:tä on tutkittu niin peruslaskutoimitusten, rationaalilukujen suuruuden kuin rationaalilukujen tiheydenkin suhteen tarkasteltuna. Eniten tutkimuksia on kohdistettu aikuisiin ja vähiten taas alakoulu- ja lukioikäisiin. Alakouluikäisten ollessa kyseessä tutkimusta rajoittanee lasten taitotaso ja se, kuinka paljon rationaalilukuja on ehditty käsitellä. Aikuiset ja varsinkin matemaatikot ovat hedelmällistä tutkittavaa, sillä heillä oletetaan olevan jo kaikki tieto tehtäviin oikein vastaamiseksi ja onkin mielenkiintoista, miksi he silti vastaavat väärin.

NNB:tä on tutkittu eniten rationaalilukujen suuruuden ja peruslaskutoimitusten suhteen, mutta rationaalilukujen tiheyden suhteen sen sijaan melko vähän. Tämä on hämmentävää siihen nähden, että NNB:n on todettu olevan kaikista voimakkainta juurikin rationaalilukujen tiheyteen liittyvissä tehtävissä, ja NNB:n on havaittu laskevan vain vähän iän mukana rationaalilukujen tiheyden suhteen tarkasteltuna (Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2015a). Matemaatikoilla NNB:tä rationaalilukujen tiheyden suhteen ei ole tutkittu lainkaan, mikä myös on hämmentävää kun ottaa huomioon, että matemaatikot muodostavat kuitenkin oman mielenkiintoisen tutkimusryhmänsä.

NNB:tä rationaalilukujen suuruuden suhteen tarkasteltuna on havaittu yläkoulu- ja lukioikäisillä tutkimuksissa, joissa on mitattu sekä vastausten oikeellisuutta, että reaktioaikaa, kun taas tutkimuksissa, joissa on mitattu vain vastausten oikeellisuutta, ei NNB:tä ole juurikaan enää havaittu yläkoulu- ja lukioikäisillä (Van Hoof ym. 2013; Van Hoof ym. 2015a). Aikuisilla korkeakoulutetuilla NNB:tä rationaalilukujen suuruuden suhteen on sen sijaan tutkittu vain tutkimuksilla, joissa on mitattu vastausten oikeellisuuden lisäksi reaktioaikaa, mutta aikuisilla ei ole tehty lainkaan tutkimusta, jossa olisi mitattu vain vastausten oikeellisuutta ja jota voisi näin ollen verrata yläkoulu- ja lukioikäisille tehtyihin tutkimuksiin, joissa reaktioaikaa ei ole mitattu (De Wolf & Vosniadou 2011; Obersteiner ym. 2020; Vamvakoussi ym. 2012; Van Hoof ym. 2020).

Tutkimusta voisi tulevaisuudessa laajentaa NNB:n ulkopuolelle esimerkiksi tutkimalla, mitä eri ajattelumalleja NNB:n lisäksi löytyy kun vertaillaan murtolukupareja tai arvioidaan matemaattisten lausekkeiden suuruutta. González-Forte ym. (2020) ovatkin tutkineet opiskelijoiden erilaisia ajattelumalleja rationaalilukuja vertailtaessa, ja González-Forte ym. (2022) ovat taasen tutkineet eri ajattelumalleja, joita esiintyy rationaalilukuja sisältävien matemaattisten lausekkeiden suuruutta arvioitaessa.

Lähteet

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. ZDM, Vol.47 (5), 747-758.

Christou, K. P., Pollack, P., Hoof, J. V. & Van Dooren, W. (2020). Natural Number Bias in Arithmetic Operations With Missing Numbers – A Reaction Time Study. Journal of numerical cognition, Vol.6 (1), 22-49.

Christou, K. P. & Vamvakoussi, X. (2023). Natural number bias on evaluations of the effect of multiplication and division: the role of the type of numbers. Mathematics education research journal, Vol.35 (3), 427-443.

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2011). The Whole Number Bias in Fraction Magnitude Comparisons with Adults. Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Vol.33.

Gómez, D. M., Jiménez, A., Bobadilla, A., Reyes, C. & Dartnell, P. (2014). Exploring fraction comparison in school childen. Enero, 10, 1–10.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. European Journal of Psychology of Education, Vol. 35 (3), 549–565

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding operations with rational numbers. Mathematical thinking and learning, Vol.24 (3), 230-24.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. Educational psychologist, Vol.40 (1), 27-52.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. Learning and instruction, Vol.28, 64-72.

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2016) Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. The British journal of psychology, Vol.107 (3), 537-555.

Obersteiner, A., Alibali, M. W. & Marupudi, V. (2020). Complex fraction comparisons and the natural number bias: The role of benchmarks. Learning and instruction, Vol.67, p.101307, Article 101307.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. Grantee Submission, Vol.23 (7), 691-697.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. Cognition and instruction, Vol.28 (2), 181-209.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of mathematical behavior, Vol.31 (3), 344-355.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: Evidence from a reaction-time study. Educational studies in mathematics, Vol.82 (2), 323-330.

Van Hoof, J, Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. Research in mathematics education, Vol.15 (2), 154-164.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015b). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. Learning and instruction, Vol.37, 30-38.

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015a). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. Educational studies in mathematics, Vol.90 (1), 39-56.

Van Hoof, J., Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. & Verschaffel, L. (2017). Chapter 5 – The Transition from Natural to Rational Number Knowledge. Acquisition of Complex Arithmetic Skills and Higher-Order Mathematics Concepts, 101-123.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., De Neys, W. & Van Dooren, W. (2020). Intuitive errors in learners' fraction understanding: A dual-process perspective on the natural number bias. Memory & cognition, Vol.48 (7), Gomez1171-1180.