Klassisen mekaniikan ilmeneminen kvanttimekaniikassa

Kandidaatin tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikka
2024
Milo Sulin
Tarkastaja:
FT Kimmo Luoma

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan laitos

Sulin, Milo Klassisen mekaniikan ilmeneminen kvanttimekaniikassa

Kanditaatin tutkielma, 24 s.
Fysiikka
Elokuu 2024

Esitetään Hamiltonin mekaniikan ja kvanttimekaniikan perusteet. Käydään läpi Lien ryhmien ominaisuuksia ja niiden avulla määritellään yleiset koherentit tilat kvanttisysteemeille. Kerrotaan miten näissä tiloissa klassinen mekaniikka ilmenee kvanttimekaniikassa. Esimerkkeinä tarkastellaan harmonista oskillaattoria ja spin-$\frac{1}{2}$ systeemiä.

Sisällys

Johdanto

Klassiselle mekaniikalle on usea formalismi, joita voidaan käyttää erilaisten systeemien kuvaamiseen. Ne eivät kuitenkaan riitä kuvaamaan kaikkia havaittuja ilmiöitä vaan tarvitaan myös kvanttimekaniikka. Koska kvanttimekaniikan tulisi myös kuvata klassisia tilanteita sopivissa olosuhteissa, olemme kiinnostuneita löytämään kvanttimekaanisia tiloja, jotka täyttävät nämä piirteet.

Tässä tutkielmassa käsitellään miten klassinen mekaniikka ilmenee kvanttimekaniikassa. Osassa 1 esitetään lyhyesti Hamiltonin mekaniikka ja tarkastellaan esimerkkinä yksinkertaista systeemiä, harmonista oskillaattoria. Osassa 2 käydään läpi kvanttimekaniikan perusteet sekä klassisen systeemin kvantisointi.

Osassa 3 esitetään menetelmä kvanttisysteemin koherenttien tilojen löytämiseksi. Tätä varten tarkastellaan Lien ryhmien ominaisuuksia ja niiden merkitystä kvanttimekaanisen systeemin dynamiikkaan liittyen. Esitetään yleisten koherenttien tilojen määritelmä sekä niiden merkittävimmät ominaisuudet. Esimerkkeinä tutkitaan harmonista oskillaattoria kvanttisysteeminä sekä spin-$\frac{1}{2}$ systeemiä. Lopuksi tehdään yhteenveto ja mainitaan joitain koherenttien tilojen sovelluksia.

1 Klassinen Hamiltonin mekaniikka

Klassiselle mekaniikalle on monta lähestymistapaa. Tässä tutkielmassa käsitellään Hamiltonin mekaniikkaa sillä se luo pohjan monille teoreettisille jatkeille fysiikassa [1, s.334-337] ja on siis hyvä alkukohta kvanttimekaniikkaan siirtyessä. Hamiltonin mekaniikka voidaan johtaa riippumatta muista klassisen mekaniikan näkökulmista, mutta se voidaan myös johtaa Lagrangen mekaniikasta jonka teemme tässä.

Lagrangen mekaniikassa systeemiä kuvaa Lagrangen funktio $L(q, \dot{q}, t)$, jonka muuttujat ovat paikka(q), paikan aikaderivaatta($\dot{q}$) sekä aika(t). Systeemillä, jolla on n määrä vapausasteita on Lagrangen funktiota derivoimalla saatavat toista astetta olevat n liikeyhtälöä [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1}$$

jossa $i = (1, ..., n)$. Liikeyhtälöt ratkaisemalla saadaan systeemille n $q(t)$-koordinaattia, jotka kuvaavat systeemin tilaa ajan funktioina. Tällainen olisi esimerkiksi kolmiulotteisessa ns. konfiguraatioavaruudessa liikkuva hiukkanen, jonka tilaa kuvattaisiin paikkana karteesisessa koordinaatistossa.

1.1 Hamiltonin liikeyhtälöt

Hamiltonin mekaniikka on periaatteeltaan erilainen kuva mekaniikasta. Se kuvaa liikettä ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöillä toisen asteen sijaan. Jotta näin voidaan tehdä täytyy systeemiä kuvata kaksinkertaisella määrällä itsenäisiä muuttujia, joten systeemi on nyt $2n$-uloitteisessa ns. faasiavaruudessa. Systeemillä on edelleen n määrä muuttujia q, mutta toiseksi osuudeksi valitaan liikemäärä, joka riippuu paikasta ja nopeudesta [1]

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Siirtyessä Hamiltonin mekaniikkaan muutamme siis funktioden muuttujat $(q, \dot{q}, t)$:sta (q, p, t):aan. Tällainen muunnos on niin kutsuttu Legendren muunnos. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f(x,y)$, jonka differentiaali on muotoa

$$\mathrm{d}f = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y \tag{3}$$

ja u ja v saavat yhtälöt

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

Haluamme nyt vaihtaa muuttujiksi u:n ja y:n joten määritellään sitä varten funktio $g = f - ux$, jonka differentiaali on

$$\mathrm{d}g = \mathrm{d}f - u\mathrm{d}x - x\mathrm{d}u \tag{5}$$

ja käyttämällä siihen kaavaa (3) saamme

$$\mathrm{d}g = v\mathrm{d}y - x\mathrm{d}u. \tag{6}$$

Lopuksi saadaan vielä halutut differentiaaliset suureet

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y}. \tag{7}$$

Tekemällä nyt siis Legendren muunnos Lagrangen funktiolle saadaan Hamiltonin funktio

$$H = \dot{q}_i p - L(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{8}$$

josta saadaan uudet liikeyhtälöt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{9}$$

1.2 Faasiavaruus ja Poissonin sulut

Hamiltonin liikeyhtälöt ratkaisemalla saadaan systeemille suureet $(q_i, ..., q_n, p_i, ..., p_n)$, jotka muodostavat $2n$-uloitteisen avaruuden. Tässä faasiavaruudessa systeemin tilaa kuvataan pisteenä sen sijainnin ja liikemäärän muodostamassa koordinaatistossa.

Paikka ja liikemäärä ovat ns. kanoniset suureet, jotka tietämällä voimme sanoa tuntevamme systeemin tilan täydellisesti. Tällöin kaikki muut suureet voidaan ilmaista kanonisten suureiden funktiona $F(q,p,t)$ ja suureen F kokonais aikaderivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(q,p,t) &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned} \tag{10}$$

Kaavassa (10) suluissa olevaa termiä kutsutaan Poissonin suluiksi [2], joita merkataan aaltosuluilla

$$\{F,H\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{11}$$

Poissonin sulut ovat bilineaarinen operaatio kahden suureen välillä ja se on esimerkki symplektisestä rakenteesta [1].

Poissonin sulut voidaan ottaa minkä tahansa kahden suureen $F(q,p,t)$ ja $G(q,p,t)$ välillä, mutta tässä tutkielmassa oleellisinta on operaatio juurikin Hamiltonin funktion kanssa. Joitain tärkeitä Poissonin sulkujen ominaisuuksia ovat esimerkiksi niiden katoaminen ($\{F,H\}=0$) kun suure ei ole eksplisiittisesti ajasta riippuva ja se on vakio liikkeen suhteen, sekä kanoniset Poissonin sulut

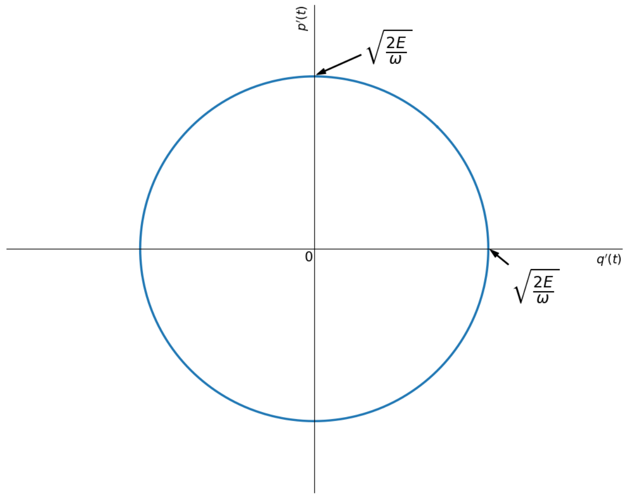
$$\{q_i,q_j\} = 0, \quad \{p_i,p_j\} = 0, \quad \{q_i,p_j\} = \delta_{ij}. \tag{12}$$

Lisäksi suureelle F saadaan yhtälöt

$$\{q_i,F\} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \{p_i,F\} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}. \tag{13}$$

Poissonin sulut ovat hyvä työkalu systeemin tarkasteluun ilman, että tarvitsee ratkaista paikan ja liikemäärän funktioita, jos Hamiltonin funktio tunnetaan. Poissonin suluille ja kaavoille (12) ja (13) on myös vastineet kvanttimekaniikassa joihin tutustumme myöhemmin.

Kuva 1. Harmonisen oskillaattorin kuvaaja faasiavaruudessa.



1.3 Harmoninen oskillaattori

Tarkastelemme esimerkkinä yksiuloitteista harmonista oskillaattoria. Hamiltonin funktio ja liikeyhtälöt ovat nyt [1, s.377-380]

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \end{aligned} \tag{14}$$

ja liikeyhtälöiden ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t) \\ p(t) &= m\omega\left(-q_0 \sin(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega}\cos(\omega t)\right), \end{aligned} \tag{15}$$

missä $q_0 = q(0)$ ja samoin $p_0 = p(0)$. Skaalaamme koordinaatit siten, että niiden yksikkö on sama

$$q' = \sqrt{m\omega}q, \ p' = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}p.$$

Kun oskillaattorin tila kuvataan (q', p') -koordinaatistossa se piirtää origon ympärille ympyrän, jonka säteen pituus riippuu systeemin kokonaisenergiasta E. Kuvassa 1 on esimerkki harmonisen oskillaattorin faasiavaruuskuvaajasta.

2 Kvantisointi ja Heisenbergin kuva

2.1 Hilbertin avaruus

Klassinen mekaniikka ei riitä kuvaamaan kaikkia kokeellisia tuloksia. Tarvitaan uusi teoria, joka antaa täydemmän kuvan maailmasta. Kvanttimekaniikassa systeemin tilaa kuvaa vektori Hilbertin avaruudessa, joka on abstrakti kompleksinen vektoriavaruus varustettuna sisätulolla [3].

Tätä vektoria kutsutaan ket-vektoriksi, jota merkataan $|a\rangle$ ja a on mikä tahansa tilaa nimittävä symboli. Sisätuloa merkataan $\langle a|b\rangle$, jossa $\langle a|$ on niin kutsuttu bra-vektori ja sen yhteys ket-vektoriin on $|a\rangle^\dagger = \langle a|$. Bra-vektori on siis ket-vektorin hermiittinen konjugaatti, jota merkataan tikarilla, joka on matriisiesityksessä transpoosin kompleksikonjugaatti. Jos $|b\rangle = |a\rangle$, silloin sisätulo on

$$\langle a|a\rangle = ||a||^2 \tag{16}$$

eli vektorin normin neliö. Kvanttimekaniikassa systeemin suureet ja muuttujat eivät ole numeroita tai funktioita, vaan lineaarioperaattoreita joille ei päde tulon kommutatiivisuus. Jos nyt suuretta A vastaava operaattori muuntaa jotain tilaa siten, että

$$A\,|\psi\rangle = a\,|\psi\rangle \text{ ja } a \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

on tila $|\psi\rangle$ operaattorin ominaistila ja a sitä vastaava ominaisarvo. Operaattoria, jonka ominaistilat $|a_i\rangle$ ja ominaisarvot $a \in \mathbb{R}$ muodostavat täyden joukon, eli mikä tahansa tila voidaan antaa niiden lineaarikombinaationa, kutsutaan observaabeliksi ja sen ominaistilat muodostavat kannan Hilbertin avaruudessa. Jotta systeemin tiloja kuvaavilla ket-vektoreilla on fysikaalinen tulkinta todennäköisyystiehyksinä, on niiden oltava normitettuja eli

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Lisäksi, ellei toisin mainita, valitsemme aina representaation, jossa Hilbertin avaruuden kanta on ortogonaalinen [4].

2.2 Schrödingerin yhtälö ja Heisenbergin kuva

Kvanttisysteemin tila voidaan ratkaista systeemin dynamiikkaa kuvaavasta Schrödingerin yhtälöstä [5]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle , \tag{18}$$

missä H on energiaoperaattori, Hamiltonin operaattori, ja $\hbar$ on redusoitu Planckin vakio $\hbar = h/(2\pi)$. Ajasta riippuvan tilan kehityksen määrää unitaarioperaattori $U(t_2, t_1)$, joka kuvaa tilan ajan hetkellä t_1 tilaan hetkellä t_2. Eli siis

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle \quad \text{tai yleisesti} \quad |\psi(t)\rangle = U(t) |\psi\rangle , \tag{19}$$

missä $|\psi\rangle$ on systeemin alkutila. Ehdolla $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$ eli $U(0) = \mathbb{1}$ sekä unitaario-operaattorin määritelmästä

$$U^\dagger = U^{-1}, \; UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1} \tag{20}$$

saadaan käyttämällä kaavaa (17) ja huomioimalla, että $|\psi\rangle$ on mielivaltainen ketvektori Schrödingerin yhtälölle ratkaisu [3, s.135]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = HU(t) \;\Rightarrow\; U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}. \tag{21}$$

Tässä Hamiltonin funktio ei ole eksplisiittisesti ajasta riippuvainen, mutta tämä ei ole pakollista. Hamiltonin operaattorin sisältäessä ajasta riippuvia termejä on aikakehitysoperaattori muotoa

$$U(t) = T\mathrm{exp}\left(-\frac{i}{\hbar}\int H(t)\mathrm{d}t\right), \tag{22}$$

missä T on aikajärjestys operaattori.

Tätä kuvaa, jossa kvanttisysteemin tila liikkuu ajassa ja operaattorit ovat kiinnitetyt, kutsutaan Schrödingerin kuvaksi [5]. Jos haluamme mitata jotain suuretta A, voimme laskea sen odotusarvon tilassa $|\psi(t)\rangle$ ajan funktiona

$$\langle A(t)\rangle = \langle\psi(t)|\, A\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi|\, U^{\dagger}(t)AU(t)\,|\psi\rangle\,. \tag{23}$$

Päätämme nyt kiinnittää vektorit $|\psi\rangle$ ja määrittelemme uuden ajasta riippuva operaattorin

$$A(t) = U^{\dagger}(t)AU(t). \tag{24}$$

Voimme tehdä tämän kaikille mitattaville suureille ja siirrymme Heisenbergin kuvaan [5], joka muistuttaa intuitiivisemmin klassisen mekaniikan formalismia, missä suureet kehittyvät ajassa.

2.3 Kanoninen kvantisointi ja kommutaattori

Lähtien liikkeelle oletuksesta, että klassinen mekaniikka ilmenee kvanttimekaniikasta jollain rajalla, rakennamme uudet kommutaatiosäännöt kvanttisysteemin suureiden operaattoreille klassisen analogian avulla. Haluamme löytää uuden operaation, joka täyttää Poissonin sulkujen ominaisuudet kvanttimekaanisille q_i ja p_i operaattoreille. Käyttäen Poissonin sulkujen ominaisuuksia voidaan kanonisille koordinaateille johtaa yhtälö

$$q_i p_j - p_j q_i = i\hbar\{q_i, p_j\}_Q, \tag{25}$$

missä aaltosulut $\{\}_Q$ ovat nyt kvanttisysteemin Poissonin sulut ja i on imaginaariyksikkö. Oletamme, että kvantti Poissonin sulkujen arvo on paikalle ja liikemäärälle sama kuin klassisessa kuvassa ja saamme lopulta operaattorille kommutaatiosäännön

$$[q_i, p_j] = q_i p_j - p_j q_i = i\hbar\delta_{ij}, \tag{26}$$

missä hakasulkuja kutsutaan kommutaattoriksi ja se määrittää kvanttisysteemin rakenteen. Jos suureet f ja g ovat paikan ja liikemäärän funktioita, jotka voidaan antaa potenssisarjoina voidaan niiden kommutaattorin arvo laskea käyttämällä kaavaa (26) [4].

Kanonisessa kvantisoinnissa siis määritämme kvanttisysteemin sopivan klassisen analogian ja korvaamme Poissonin sulut kommutaattorilla

$$f \mapsto f_Q, \quad \{f, g\} \mapsto -\frac{i}{\hbar}[f_Q, g_Q], \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \ [p_j, q_i] = -[q_i, p_j], \\ &[q_i, q_j] = 0, \ [p_i, p_j] = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Tämä tapa kvantisoida ei kuitenkaan ole yleispätevä sillä, kun suure $f(q, p)$ sisältää termejä jotka ovat muotoa $q_i p_i$ emme tiedä mihin järjestykseen operaattorit tulisi laittaa [6]. Lisäksi Poissonin sulkujen korvaaminen kommutaattorilla johtaa ristiriitaan, kun molemmat argumentit ovat kolmannen tai korkeamman asteen polynomeja [7]. Todellisuudessa siis kvantisointi täytyy tehdä systeemikohtaisesti, mutta jos ongelmallisia termejä ei ole tai tehdään approksimaatio jossa ne eliminoidaan, voidaan systeemi kvantisoida esitetyllä tavalla.

2.4 Heisenbergin liikeyhtälöt

Palataan takaisin Heisenbergin kuvaan ja lasketaan operaattorin aikaderivaatta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}A(t) &= \frac{\partial U^\dagger(t)}{\partial t}AU(t) + U^\dagger(t)A\frac{\partial U(t)}{\partial t} \\ &= \frac{i}{\hbar}HU^\dagger(t)AU(t) - U^\dagger(t)A(\frac{i}{\hbar}H)U(t) \\ &= \frac{i}{\hbar}(HA(t) - A(t)H) && (29) \\ &= -\frac{i}{\hbar}[A(t), H], && (30) \end{aligned}$$

saamme nyt paikalle ja liikemäärälle Heisenbergin liikeyhtälöt [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_i(t) &= -\frac{i}{\hbar}[q_i(t), H], \\ \frac{\partial}{\partial t} p_i(t) &= -\frac{i}{\hbar}[p_i(t), H]. \end{aligned} \tag{31}$$

Aikaisemman esimerkin, yksiuloitteisen harmonisen oskillaattorin, liikeyhtälöt ovat siis

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{i}{\hbar}[q(t), H] = -\frac{i}{\hbar}(\frac{i\hbar}{m}p) = \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -\frac{i}{\hbar}[p(t), H] = -\frac{i}{\hbar}(-2i\hbar m\omega^2 q) = -m\omega^2 q. \end{aligned} \tag{32}$$

Näemme helposti, että ne ovat samaa muotoa kuin klassisessa mekaniikassa

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{33}$$

Nyt tiedämme miten kvanttimekaanisen systeemin tilaa kuvataan ja miten se kehittyy ajassa. Lisäksi kommutaatiosääntöjen tunteminen tekee mahdolliseksi kvanttisysteemin rakentamisen kanonisella kvantisoinnilla ja antaa myös vahvat työkalut varsinaisten laskujen tekemiseen.

3 Koherentit tilat

Jotta kvanttimekaniikka olisi käypä kuvaamaan maailmaa, tulisi sen myös mallintaa oikein klassisia tilanteita. Haluamme siis löytää ratkaisuja kvanttimekaanisiin liikeyhtälöihin, missä suureiden odotusarvot kehittyvät kuin klassisessa mekaniikassa ja epätarkkuus katoaa suurilla kvanttiluvuilla. Tässä osassa esitämme yleisen menetelmän niin kutsuttujen koherenttien tilojen rakentamiseen perustuen kvanttisysteemin dynaamiseen ryhmään. Koska useimpien systeemien dynaamiset ryhmät ovat Lien ryhmiä [8], käsittelemme tässä tutkielmassa koherentteja tiloja vain niiden suhteen.

3.1 Lien ryhmät

Kuten aikaisemmin mainitsimme, kvanttitiloja kuvaavien ket-vektoreiden normin on oltava arvoltaan yksi $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Toisin sanoen systeemin tila riippuu vain sen ket-vektorin suunnasta. Näin ollen jos esimerkiksi siirrämme systeemiä sen paikka-koordinaatistossa, sen uusi Hilbertin avaruuden tila on

$$|\psi_d\rangle = D\,|\psi\rangle \ \text{ ja } \ \langle\psi_d|\psi_d\rangle = \langle\psi|\, D^\dagger D\,|\psi\rangle = 1. \tag{34}$$

Nyt D on unitaarinen siirto-operaattori, joka kuvaa alkuperäisen tilan siirrettyyn tilaan [4]. Määritellään infinitesimaalinen siirto δx suunnassa q

$$D(\delta x)\,|\psi\rangle = (1 + \delta x \mathrm{d}_q)\,|\psi\rangle\,, \tag{35}$$

missä d_q on infinitesimaalinen siirtogeneraattori. Tälle operaattorille pätee kommutaatiosääntö

$$\mathrm{d}_q q - q\mathrm{d}_q = -1. \tag{36}$$

Nyt operaattori $i\hbar\mathrm{d}_q$ täyttää samat kvanttiehdot kuin liikemäärä

$$[p, q] = [i\hbar\mathrm{d}_q, q] = -i\hbar \ \Rightarrow \mathrm{d}_q = -\frac{i}{\hbar}p. \tag{37}$$

Toisaalta myös operaattori $-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ toteuttaa samat kommutaatiosäännöt [4], joten infinitesimaalinen siirtogeneraattori on valitun suunnan derivaattaoperaattori:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_q &= -\frac{i}{\hbar}p,\ p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \\ \mathrm{d}_q &= i^2\frac{\hbar}{\hbar}\frac{\partial}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned} \tag{38}$$

Jos nyt infinitesimaalisen siirron δq raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} n\delta q = C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\delta q = \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n}$$

eli siirto $D(\delta q)$ on infinitesimaalinen osa jatkuvaa siirtoa $D(C)$, jonka saamme operoimalla n kertaa alkutilaan [9, s.27-31]

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(1+\frac{C}{n}\mathrm{d}_q)^n \left|\psi\right\rangle &= e^{C\mathrm{d}_q}\left|\psi\right\rangle, \\ D(C) &= e^{-\frac{i}{\hbar}Cp}. \end{aligned} \tag{39}$$

Yleinen siirto-operaattori on siis jatkuva lineaarimuunnos, ja d_q on sen infinitesimaalinen generaattori.

Tällainen muunnos on jonkin Lien ryhmän G alkio ja sen generaattori kuuluu ryhmää vastaavaan Lien algebraan [9, s.175-180][10]. Lien algebra on reaalinen tai kompleksinen vektoriavaruus $\mathfrak{g}$, jolla on bilineaarinen ja antisymmetrinen kuvaus $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, joka toteuttaa Jacobin identiteetin

$$[X,[Y,Z]]+[Z,[X,Y]]+[Y,[Z,X]]=0,\ \ X,Y,Z\in\mathfrak{g}. \tag{40}$$

Yllä hakasulut, Lien sulut, merkkaavat kyseistä kuvausta. Algebran $\mathfrak{g}$ ollessa jonkin assosiatiivisen algebran $\mathfrak{A}$ ala-algebra tämä kuvaus on tuttu kommutaattori [11]

$$[X,Y]=XY-XY. \tag{41}$$

Tämän tutkielman kannalta olemme kiinnostuneet tilanteesta jossa $\mathfrak{A}$ on kompleksinen matriisialgebra. Jatkossa käsittelemme kyseisiä algebroja ja puhumme niiden, ja vastaavien Lien ryhmien, alkioista operaattoreina. Jos nyt joukko algebran $\mathfrak{g}$ operaattoreita $\{T_i,\ i=1,2,3,...,n\}$ on täysi, eli mikä tahansa muu alkio voidaan antaa niiden lineaarikombinaationa, on tämä joukko operaattoreita algebran kanta. Kannan operaattoreille pätee kommutaattorisääntö

$$[T_i,T_j]=\sum_k C_{ij}^k T_k, \tag{42}$$

missä lukuja C_{ij}^k kutsutaan rakennevakioiksi [10]. Lien ryhmä, josta olemme kiinnostuneet saadaan muodostettua Lien algebrasta eksponentiaalikuvauksella

$$\begin{aligned} \exp:\mathfrak{g}&\mapsto G, \\ X&\mapsto e^X,\ \ X\in\mathfrak{g}\text{ ja } e^X\in G. \end{aligned} \tag{43}$$

Määrittelemme nyt Lien algebralle adjungoidun representaation

$$X \mapsto \mathrm{ad}_X,\ X \in \mathfrak{g}, \tag{44}$$

jonka vaikutus toiseen algebran operaattoriin Y on

$$\mathrm{ad}_X(Y) = XY - YX = [X, Y]. \tag{45}$$

Seuraavaksi määrittelemme Lien ryhmälle G myös adjungoidun representaation

$$\begin{aligned} &A \mapsto \mathrm{Ad}_A,\ A = e^X \\ &\mathrm{Ad}_A(Y) = AYA^{-1}. \end{aligned} \tag{46}$$

Lien ryhmien ja niitä vastaavien algebrojen ominaisuuksista saamme kaavan [11]

$$\mathrm{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\mathrm{ad}_X} Y. \tag{47}$$

Avaamme operaattorin eksponentiaalifunktion Taylorin sarjana

$$e^{\mathrm{ad}_X} Y = Y + \mathrm{ad}_X(Y) + \frac{1}{2!}\mathrm{ad}_X^2(Y) + \frac{1}{3!}\mathrm{ad}_X^3(Y) + \cdots, \tag{48}$$

jossa adjungoidun representaation potenssi määritellään sisäkkäisinä kommutaattoreina

$$\mathrm{ad}_X^n(Y) = \underbrace{[X, [X, [X, [\ldots, Y] \ldots]}_{\text{n kommutaattoria}}. \tag{49}$$

Eli Lien ryhmän operaattorin $A = e^X$ vaikutus Lien algebran operaattoriin Y on [11]

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots. \tag{50}$$

Toinen olennainen ominaisuus on kahden Lien ryhmän G operaattorin tulo

$$e^X e^Y = e^Z, \tag{51}$$

jossa $e^Z \in G$ ja Z on Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) kaavan mukaan ääretön sarja X:n ja Y:n sisäkkäisiä kommutaattoreita [12]

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] - \frac{1}{24}[X,[Y,[X,Y]]] + \cdots . \tag{52}$$

Tärkeä erityistapaus löytyy, kun kommutaattori $[X,Y]$ kommutoi operaattoreiden X ja Y kanssa

$$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0, \tag{53}$$

tällöin BCH-kaava saa muodon [13]

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]} \\ e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} &= e^{X+Y}. \end{aligned} \tag{54}$$

3.2 Koherentit tilat

Käsitelkäämme kvanttisysteemiä, jonka dynamiikan määräävä Hamiltonin operaattori H voidaan esittää joidenkin generaattoreiden $\{T_i\}$ funktiona, yleensä summana [8][14]

$$H = \sum_i d_i T_i, \ \text{tai} \tag{55}$$

$$H = \sum_i d_i T_i + \sum_{ij} d_{ij} T_i T_j. \tag{56}$$

Systeemin Hamiltonin operaattori kuuluu nyt johonkin Lien algebraan $\mathfrak{g}$ ja vastaava Lien ryhmä G on systeemin dynaaminen ryhmä. Valitsemme seuraavaksi jonkin referenssitilan $|\Phi_0\rangle$ ja etsimme ryhmästä G tilaa vastaavan stabiliteetti alaryhmän H. Alaryhmään H kuuluvat operaattorit h kuvaavat referenssitilan itseensä vaihetekijää lukuunottamatta

$$h\,|\Phi_0\rangle = e^{i\phi(h)}\,|\Phi_0\rangle\,, \ \phi(h) \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

Mikä tahansa ryhmän G operaattori voidaan antaa alaryhmän H ja sivujoukon G/H operaattoreiden tulona $A = \Omega h$, jossa $A \in G$, $h \in H$ ja $\Omega \in G/H$. Ryhmän G yleisen operaattorin vaikutus referenssitilaan on siis

$$A\left|\Phi_0\right\rangle = \Omega h \left|\Phi_0\right\rangle = \Omega \left|\Phi_0\right\rangle e^{i\phi(h)}, \tag{58}$$

ja nyt

$$\left|\Omega\right\rangle = \Omega \left|\Phi_0\right\rangle \tag{59}$$

on yleisten koherenttien tilojen määritelmä [14].

Referenssitila on periaatteessa mielivaltainen, mutta valitsemme sen nyt olevan systeemin vapaan hamiltonin H_0 alin ominaistila $|0\rangle$. Tällöin voimme antaa Lien algebran kannan joukkona $\{H_i, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$, jossa operaattorit $\{H_i\}$ ovat ominaistiloijen suhteen diagonaaliset ja $\{E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ ovat nosto- ja laskuoperaattoreita, jotka kuvaavat operaattorin H_0 ominaistilan toiseksi ominaistilaksi [8][14]

$$\begin{aligned} H_0\left|\lambda\right\rangle &= \lambda\left|\lambda\right\rangle, \\ H_0 E_\alpha \left|\lambda\right\rangle &= H_0\left|\lambda+\alpha\right\rangle \times C = (\lambda+\alpha)\left|\lambda+\alpha\right\rangle \times C, \end{aligned} \tag{60}$$

jossa λ on hamiltonin ominaisarvo ja C on kerroin. Näille operaattoreille pätevät kommutaattorisäännöt

$$\begin{aligned} &[H_i, H_j] = 0,\ [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \\ &[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i,\ [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{61}$$

Yhtälön (54) mukainen Hamiltonin operaattori voidaan esittää muodossa [14]

$$H = \sum_i \epsilon_i H_i + \sum_\alpha (\gamma_\alpha E_\alpha + \gamma_\alpha^* E_{-\alpha}) \tag{62}$$

ja voimme kirjoittaa koherentit tilat tuottavat operaattorit $\Omega \in G/H$ siirto-operaattoreina

$$\Omega = D(\eta) = \exp\left(\sum_\alpha \eta_\alpha E_\alpha - \eta_\alpha^* E_{-\alpha}\right). \tag{63}$$

Kun nyt hamiltonin ollessa muotoa (61) tarkastelemme koherentin tilan aikakehitystä

$$U(t)\left|\Omega\right\rangle = U(t)\Omega\left|0\right\rangle, \tag{64}$$

yhtälöiden (49), (56) ja (59) avulla näemme, että tila myös pysyy koherenttina [8]

$$\begin{aligned} U(t)\Omega\left|0\right\rangle &= \Omega'(t)h(t)\Omega h^{-1}(t)h(t)\left|0\right\rangle \\ &= \Omega'(t)\Omega(t)h(t)\left|0\right\rangle \\ &= U'(t)h(t)\left|0\right\rangle = \Omega''(t)h'(t)h(t)\left|0\right\rangle \\ &= \Omega''(t)h''(t)\left|0\right\rangle = \left|\Omega''(t)\right\rangle e^{i\phi(h'')}. \end{aligned} \tag{65}$$

Toinen tärkeä seuraus, joka johtaa alimman tilan valitsemisesta referenssitilaksi on koherenttien tilojen avaruuden symplektinen rakenne [8][15]. Eli saamme funktioille $f = \left\langle\Omega\right| F \left|\Omega\right\rangle$ Poissonin sulut

$$\{f, g\} = -i\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}\frac{\partial g}{\partial z_\alpha^*} - \frac{\partial f}{\partial z_\alpha^*}\frac{\partial g}{\partial z_\alpha}\right), \tag{66}$$

jossa z on siirto-operaattorin η-parametreista riippuvat avaruuden G/H lokaalit koordinaatit. Koherentit tilat siis säilyttävät koherentit ominaisuutensa dynaamisen ryhmän G vaikutuksessa ja niillä on faasiavaruuden rakenne. Osan 3.3 esimerkissä näemme Heisenbergin epävarmuuden olevan minimissä, jolloin koherentit tilat eivät myöskään leviä faasiavaruudessa joten ne ovat lähimpinä klassisen mekaniikan systeemejä.

3.3 Esimerkki: harmoninen oskillaattori

Jatkamme harmonisen oskillaattorin esimerkin tarkastelua. Hamiltonin operaattori on

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \tag{67}$$

jossa q ja p ovat nyt paikka- ja liikemääräoperaattorit. Seuraavaksi esitämme operaattorit muodossa [14]

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{2m\omega}}(a + a^\dagger), \\
p &= -i\frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger),
\end{aligned}
\tag{68}
$$

missä a ja $a^\dagger$ ovat lasku- ja nosto-operaattori, joita kutsutaan myös hävitys- ja luomisoperaattoreiksi, ja hamiltoni on nyt

$$
H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{69}
$$

Hamiltonin ominaistilat ovat niin sanotut Fockin tilat $|n\rangle$ (n=0,1,2,3,...), joiden ominaisarvot ovat

$$
H\,|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|n\rangle \tag{70}
$$

ja hävitys- ja luomisoperaattorin vaikutus on

$$
a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,\;\; a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,. \tag{71}
$$

Systeemin alin tila on nyt siis $|0\rangle$, jonka hävitysoperaattori annihiloi

$$
a\,|0\rangle = 0,\;\; (\langle 0|\,a^\dagger = 0) \tag{72}
$$

ja mikä tahansa $|n\rangle$ voidaan antaa muodossa

$$
|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,. \tag{73}
$$

Operaattoreille $\{a^\dagger a, a, a^\dagger, \mathbb{1}\}$ pätevät kommutaatiosäännöt [14]

$$
[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger,\;\; [a^\dagger a, a] = -a,\;\; [a, a^\dagger] = \mathbb{1}, \tag{74}
$$

ja ne muodostavat Lien algebran h_4 jota vastaa Heisenberg-Weyl ryhmä H_4. Yleinen systeemin dynaamisen ryhmän operaattori on

$$
\exp\left(\epsilon_1 a^\dagger a + \epsilon_2 \mathbb{1} + \eta a^\dagger + \eta^* a\right) \tag{75}
$$

ja helposti näemme, että stabiliteetti alaryhmä koostuu operaattoreista

$$e^{i\left(\delta_1 a^\dagger a+\delta_2 \mathbb{1}\right)}. \tag{76}$$

Koherentit tilat määrittävä siirto-operaattori on nyt

$$D(\alpha)=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a} \tag{77}$$

ja harmonisen oskillaattorin koherentit tilat ovat siis muotoa

$$|\alpha\rangle=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}|0\rangle. \tag{78}$$

Paikka- ja liikemääräoperaattoreilla ilmaistuna siirto-operaattori on

$$\exp\left(\alpha a^\dagger-\alpha^* a\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[Pq-Qp\right]\right), \tag{79}$$

jossa kertoimet Q ja P ovat

$$Q=\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\mathrm{Re}(\alpha), \tag{80}$$

$$P=\sqrt{2\hbar m\omega}\mathrm{Im}(\alpha). \tag{81}$$

Eli aikakehittyvä harmonisen oskillaattorin koherentti tila on

$$\begin{aligned}|\alpha(t)\rangle&=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}|0\rangle\\&=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}e^{\frac{i}{\hbar}(Pq-Qp)}|0\rangle.\end{aligned} \tag{82}$$

Kun nyt laskemme operaattoreiden q ja p odotusarvot ajan funktioina koherentissa tilassa on kannattavaa tehdä se Heisenbergin kuvassa jolloin operaattorit $q(t)$ ja $p(t)$ voidaan laskea käyttämällä yhtälöä (49) ja kommutaatiosääntöjä:

$$\begin{aligned}q(t)&=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}q_0e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\\&=q_0\left(1-\frac{\omega^2t^2}{2!}+\frac{\omega^4t^4}{4!}-\frac{\omega^6t^6}{6!}+\cdots\right)\\&\quad+\frac{p_0}{m\omega}\left(\omega t-\frac{\omega^3t^3}{3!}+\frac{\omega^5t^5}{5!}-\frac{\omega^7t^7}{7!}+\cdots\right)\\&=q_0\cos(\omega t)+\frac{p_0}{m\omega}\sin(\omega t)\end{aligned} \tag{83}$$

ja vastaavasti

$$p(t) = m\omega \left(-q_0 \sin(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \cos(\omega t) \right). \tag{84}$$

Yllä q_0 ja p_0 ovat paikka- ja liikemääräoperaattori Schrödingerin kuvassa ja näemme, että Heisenbergin kuvan operaattorit vastaavat klassisen mekaniikan suureiden yhtälöitä kuten osan 1.3 esimerkissä sekä yhtälöissä (31) ja (32).

Koska operaattoreiden q ja p kommutaattori on vain luku $[q,p] = i\hbar$, se kommutoi molempien kanssa ja saamme yhtälöstä (53) siirto-operaattorin BCH-kaavan

$$e^{\frac{i}{\hbar}(Pq-Qp)} = e^{\frac{i}{\hbar}Pq} e^{-\frac{i}{\hbar}Qp} e^{-\frac{i}{2\hbar}QP}. \tag{85}$$

Siirto-operaattorin vaikutus paikka- ja liikemääräoperaattoreihin saadaan ratkaistua käyttämällä taas yhtälöä (49)

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}Pq} q e^{\frac{i}{\hbar}Pq} &= q, & e^{\frac{i}{\hbar}Qp} p e^{-\frac{i}{\hbar}Qp} &= p, \\ e^{\frac{i}{\hbar}Qp} q e^{-\frac{i}{\hbar}Qp} &= q + Q, & e^{-\frac{i}{\hbar}Pq} p e^{\frac{i}{\hbar}Pq} &= p + P. \end{aligned} \tag{86}$$

Paikan odotusarvo aikakehittyvässä koherentissa tilassa on siis

$$\begin{aligned} \langle q(t) \rangle &= \langle 0 | \, e^{-\frac{i}{\hbar}(Pq-Qp)} e^{\frac{i}{\hbar}Ht} q e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} e^{-\frac{i}{\hbar}(Pq-Qp)} \, | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \, e^{\frac{i}{2\hbar}QP} e^{\frac{i}{\hbar}Qp} e^{-\frac{i}{\hbar}Pq} q(t) e^{\frac{i}{\hbar}Pq} e^{-\frac{i}{\hbar}Qp} e^{-\frac{i}{2\hbar}QP} \, | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \left(q_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) + Q \cos(\omega t) + \frac{P}{m\omega} \sin(\omega t) \right) | 0 \rangle \, , \end{aligned} \tag{87}$$

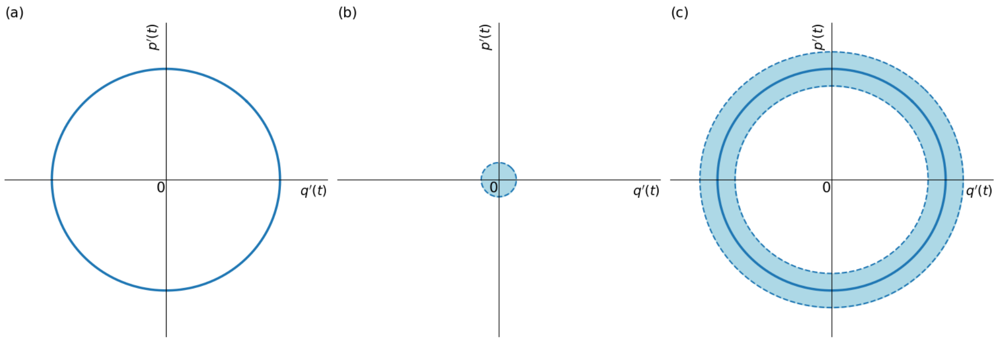
ja yhtälöiden (67) ja (71) perusteella näemme, että $\langle 0 | \, q \, | 0 \rangle = 0$ ja $\langle 0 | \, p \, | 0 \rangle = 0$ joten ratkaisu on

$$\langle q(t) \rangle = Q \cos(\omega t) + \frac{P}{m\omega} \sin(\omega t). \tag{88}$$

Vastaavasti liikemäärän odotusarvo on

$$\langle p(t) \rangle = m\omega \left(-Q \sin(\omega t) + \frac{P}{m\omega} \cos(\omega t) \right). \tag{89}$$

Kuva 2. Kvantti harmonisen oskillaattorin kuvaaja faasiavaruudessa. (a) Odotusarvojen aikakehitys, (b) epätarkkuus, (c) epätarkkuuden määrittämä alue aikakehityksen ympärillä.



Lisäksi voimme samalla tavalla laskea koherenteissa tiloissa suureiden varianssit, jotka ovat

$$(\Delta q)^2 = \langle \alpha(t)| \left(q - \langle q(t) \rangle\right)^2 |\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \tag{90}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \alpha(t)| \left(p - \langle p(t) \rangle\right)^2 |\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}. \tag{91}$$

Kuten aikaisemmin mainitsimme, varianssit ovat nyt vakiot ja Heisenbergin epätarkkuus periaatteen epäyhtälö [5]

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [q, p] \rangle| \tag{92}$$

saa pienimmän mahdollisen arvon

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \tag{93}$$

Kuten osassa 1.3 voimme piirtää oskillaattorin kuvaajan faasiavaruudessa skaalatuilla koordinaateilla

$$q' = \sqrt{m\omega} q, \;\; p' = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p,$$

ja merkitä siihen paikka- ja liikemääräkoordinaattien kehityksen lisäksi niiden varianssin. Kuvaaja on ympyrärata ja mitatessa systeemin tilaa saadaan tulokseksi jokin piste epätarkkuuden määrittämältä alueelta. Kuvassa 2 on piirrettynä kvantti harmonisen oskillaattorin tilan kehitys faasiavaruudessa, suureiden q' ja p' epätarkkuus, sekä niiden yhdistelmä.

3.4 Spin-1/2 koherentti tila

Tarkastellaan toisena esimerkkinä spin-$\frac{1}{2}$ systeemiä. Sen dynaaminen ryhmä on SU(2) ja generaattorit $\{a^\dagger,\ a,\ a^\dagger a - \frac{1}{2}\}$ [14]. Niille pätevät kommutaatiosäännöt

$$[a^\dagger, a] = 2(a^\dagger a - \frac{1}{2}),\ [a^\dagger a - \frac{1}{2}, a] = -a,\ [a^\dagger a - \frac{1}{2}, a^\dagger] = a^\dagger, \tag{94}$$

sekä antikommutaatiosäännöt

$$[a, a^\dagger]_+ = \mathbb{1},\ [a, a]_+ = [a^\dagger, a^\dagger]_+ = 0. \tag{95}$$

Yllä antikommutaattori $[A, B]_+ = AB + BA$. Systeemin generaattorit vastaavat klassisia kulmaliikemääräoperaattoreita $\{J_x,\ J_y,\ J_z\}$. Tällaisen systeemin kantavektorit ovat $|j, m\rangle$, jossa m on kulmaliikemäärän arvo valitussa mitattavassa suunnassa ja j suurin mahdollinen arvo. Luku m saa siis arvot $m = \{-j, -j+1, -j+2, ..., j-1, j\}$.

Nyt $j = \frac{1}{2}$ joten systeemin tilat ovat

$$|-\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle,\ |+\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \tag{96}$$

ja merkataan $a^\dagger a - \frac{1}{2} = S_0$, joten

$$\begin{aligned} a\,|+\rangle &= |-\rangle\,, \\ a^\dagger\,|-\rangle &= |+\rangle\,, \\ S_0\,|\pm\rangle &= \pm\frac{1}{2}\,|\pm\rangle\,. \end{aligned} \tag{97}$$

Näemme helposti, että valitessamme tilan $|-\rangle$ referenssitilaksi koostuu stabiliteetti alaryhmä $H = \mathrm{U}(1)$ operaattoreista

$$h = e^{i\epsilon S_0}, \tag{98}$$

ja sivujoukon muodostavat siirto-operaattorit ovat muotoa

$$D(\zeta) = e^{\zeta a^\dagger - \zeta^* a}. \tag{99}$$

Spin-$\frac{1}{2}$ systeemin siirto-operaattoreilla on BCH-kaava [14]

$$e^{\zeta a^\dagger - \zeta^* a} = e^{\tau a^\dagger} e^{\ln(1+\tau^*\tau) S_0} e^{-\tau^* a}, \tag{100}$$

missä parametrit ovat

$$\tau = \zeta \frac{\tan(|\zeta|)}{|\zeta|}, \ \tau^* = \zeta^* \frac{\tan(|\zeta|)}{|\zeta|}, \ (1 + \tau^* \tau) = \frac{1}{\cos^2(|\zeta|)}. \tag{101}$$

Koska sivujoukko avaruuden SU(2)/U(1) geometria on pallopinta [14], voidaan parametri ζ antaa muodossa $\zeta = \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}$, jossa θ=[0, π] on kulma ominaistilojen välillä ja ϕ=[0, 2π] kulma xy-tasossa. Koherentit tilat ovat siis

$$\begin{aligned} D(\zeta) \left|-\right\rangle &= e^{\tau a^\dagger} e^{\ln(1+\tau^*\tau) S_0} e^{-\tau^* a} \left|-\right\rangle \\ &= e^{\tau a^\dagger} e^{-\frac{1}{2}\ln(1+\tau^*\tau)} \left|-\right\rangle \\ &= \cos(|\zeta|) \left|-\right\rangle + \zeta \frac{\sin(|\zeta|)}{|\zeta|} \left|+\right\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left|-\right\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} \left|+\right\rangle , \end{aligned} \tag{102}$$

ja systeemille voidaan määritellä kanoniset koordinaatit (q, p) [8][14]

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip) = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \tau^* \tau}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}. \tag{103}$$

Spin-$\frac{1}{2}$ systeemin faasiavaruuden koordinaatit ovat siis

$$q = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi), \ p = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi), \tag{104}$$

ja Poissonin sulut ovat

$$\{f, g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \right). \tag{105}$$

4 Yhteenveto

Lähtien liikkeelle Hamiltonin mekaniikasta ja kvanttimekaniikan perusteista esitimme yleisen tavan löytää koherentit tilat kvanttimekaaniselle systeemille. Näissä tiloissa systeemi käyttäytyy kuin klassisessa tilanteessa. Kommutaatiosääntöjä ja Lien ryhmien ominaisuuksia hyödyntämällä näytettiin miten nämä ominaisuudet ilmenevät ja tarkasteltiin esimerkkeinä harmonista oskillaattoria sekä spin-$\frac{1}{2}$ systeemiä.

Sen lisäksi, että koherentit tilat osoittavat kvanttimekaniikan sallivan klassisen mekaniikan sopivalla rajalla, esimerkiksi kahden fotonin koherentteja tiloja, ns. puristettuja tiloja, on käytetty optisessa kommunikoinnissa manipuloimaan mittausten epätarkkuutta [14]. Yleisiä koherentteja tiloja on käytetty myös usean kanssakäyvän hiukkasen systeemeissä kvasihiukkasapproksimaatioina [16] ja kaoottisten systeemien tutkimisessa [8].

Viitteet

[1] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, 3. painos (Addison-Wesley, 2002)

[2] F. Strocchi, *A Primer of Analytical Mechanics*, (Springer International Publishing AG, 2018)

[3] J. von Neumann, engl. käännös R. Beyer, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: New Edition*, (Princeton University Press, 2018)

[4] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4. painos (Oxford University Press, 1967)

[5] K. Gottfried, Y. Tung-Mow, *Quantum Mechanics: Fundamentals*, 2. painos (Springer New York, 2003)

[6] F. A. Berezin, "General Concept of Quantization", *Communications in Mathematical Physics 40*, (1975)

[7] H. J. Groenewold, "On the Principles of Elementary Quantum Mechanics", *Physica 12*(7), (1946)

[8] W.-M. Zhang, D. H. Feng, J.-M. Yuan, "Integrability and nonintegrability of quantum systems. II. Dynamics in quantum phase space.", *Physical Review A 42*(12), (1990)

[9] H. Weyl, engl. käännös H. P. Robertson, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, (Dover, 1950)

[10] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, (John Wiley & Sons, 1974)

[11] R. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, 2. painos (Springer International, 2015)

[12] H. F. Baker, "Alternants and Continuous Groups", *Proceedings of the London Mathematical Society 2*(1), (1905)

[13] J. A. Oteo, "The Baker–Campbell–Hausdorff formula and nested commutator identities", *Journal of Mathematical Physics 32*(2), (1991)

[14] W.-M. Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore, "Coherent states: Theory and some applications", *Reviews of Modern Physics 62*(4), (1990)

[15] E. Onofri, "A Note on Coherent State Representation of Lie Groups", *Journal of Mathematical Physics 16*(5), (1975)

[16] W.-M. Zhang *et al.*, "Symmetry constrained Hartree-Fock-Bogoliubov theory with applications to the fermion dynamical symmetry model", *Nuclear Physics A 505*(1), (1989)