Lagrangen teoreema ketjumurtoluvuille

Reetta Mäenpää

LuK-tutkielma
Elokuu 2024

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

REETTA MÄENPÄÄ: Lagrangen teoreema ketjumurtoluvuille
LuK-tutkielma, 6 s.
Matematiikka
Elokuu 2024

Tutkielman ensimmäisessä osassa on määritelty ketjumurtoluvut ja niiden osat.

Toisessa osassa on esitetty todistus sille että, jaksollinen ketjumurtoluku on toisen asteen yhtälön irrationaalinen juuri ja todistus Lagrangen teoreemalle.

Asiasanat: ketjumurtoluku, jaksollisuus, irrationaaliluku, Lagrangen teoreema.

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielmassa esitetään todistus jaksollisen ketjumurtoluvun kvadraattisuudesta ja Lagrangen teoreema. Alussa esitellään myös pohjatietoja ketjumurtoluvuista ja todistuksissa tarvittavia tuloksia. Jaksollisen ketjumurtoluvun kvadraattisuuden todistus Khinchinin kirjasta Continued Fractions [4] ja Lagrangen teoreeman todistus on Steinigin [2].

2 Määritelmiä

2.1 Ketjumurtoluku

Määritelmä 1. Jokainen rationaaliluku $\frac{p}{q} > 1$ voidaan esittää *ketjumurtolukumuodossa*,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

missä a_0 on kokonaisluku ja *osanimittäjät* $a_1, \dots, a_n$ ovat positiivisia kokonaislukuja ja $n \in [0, 1, 2, 3, \dots]$. Yleensä käytetään myös merkintää $a_0 + \frac{1}{a_1+} \frac{1}{a_2+} \cdots \frac{1}{a_n}$.

2.2 Segmentit ja jäännökset

Tässä osiossa on lähteestä [4] pohjatietoina määritelmiä ketjumurtolukujen osista ja niitä koskevia, todistuksissa tarvittavia, yhtälöitä.

Määritelmä 2. Kutsutaan ketjumurtolukua

$$s_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

äärellisen ketjumurtoluvun

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

segmentiksi, kun $0 \leq k \leq n$. Vastaavasti äärettömän ketjumurtoluvun

$$[a_0; a_1, a_2, \dots]$$

segmentti on s_k, mielivaltaisella $k \geq 0$.

Määritelmä 3. Kutsutaan ketjumurtolukua

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n]$$

äärellisen ketjumurtoluvun *jäännökseksi* ja vastaavasti

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$$

on äärettömän ketjumurtoluvun jäännös.

Jäännöksille pätee

$$r_k = a_k + \frac{1}{r_{k+1}}.$$

Olkoon murtoluku $\frac{a_0}{1}$, pituudeltaan 1 olevan ketjumurtoluvun $\alpha = [a_0] = a_0$, rationaaliapproksimaatio. Kahden pituiselle ketjumurtoluvulle pätee

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Olkoon r_1 on pituudeltaan $(n-1)$ olevan ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ jäännös. Merkitään sitä

$$r_1 = \frac{p'}{q'},$$

jolloin

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{q'}{p'} = \frac{a_0 p' + q'}{p'}.$$

Olkoon tämä viimeinen murtoluku ketjumurtoluvun $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ approksimaatio. Approksimaatioiden osoittajiksi ja nimittäjiksi saadaan

$$p = a_0 p' + q', \quad q = p'. \tag{1}$$

Segmentin s_k rationaaliapproksimaatio on $\frac{p_k}{q_k}$.[4]

2.3 Konvergentit

Ketjumurtoluvun *konvergentti* saadaan katkaisemalla kyseinen ketjumurtoluku jonkin osanimittäjän jälkeen ja kehittämällä saatu lauseke murtoluvuksi [5]. Ketjumurtoluvun konvergentit ovat

$$a, a_0 + \frac{1}{a_1}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \ldots,$$

jotka saadaan pysähtymällä ketjumurtoluvussa ennen jotakin a_k, missä $k \in \mathbb{N}$. Yleinen konvergentti on:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \cdots \frac{1}{a_k} = \frac{p_k}{q_k}.$$

Ensimmäinen konvergentti on $\frac{p_0}{q_0} = a_0$. Äärellisen ketjumurtoluvun viimeinen konvergentti on $\frac{p_n}{q_n}$, joka on itse ketjumurtoluku.

Lemma 1. *[4] Mielivaltaisella $k \geq 2$, k:nnen konvergentin osoittaja p_k ja nimittäjä q_k saadaan muodostettua yhtälöiden 1 avulla niin, että*

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \tag{2}$$

Määritelmä 4. [4] Jokaiselle äärettömälle ketjumurtoluvulle $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ on olemassa ääretön jono konvergentteja

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}, \ldots.$$

Jos tämä suppenee kohti jotakin raja-arvoa α, voidaan lukua α pitää ketjumurtoluvun *arvona* ja merkitä

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Jokaiselle reaaliluvulle voidaan muodostaa tälläinen ketjumurtolukukehitelmä.

2.4 Toisen asteen yhtälön juuret

Tämän luvun kaavat ovat taulukkokirjasta [6].

Määritelmä 5. Toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$, missä a, b ja $c \in \mathbb{Z}$, ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Tällöin yhtälön diskriminantti $D = b^2 - 4ac$.
Jos $D > 0$, saadaan kaksi erisuurta reaalijuurta,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Jos $D = 0$, x on reaalinen kaksoisjuuri

$$x = -\frac{b}{2a},$$

ja jos, $D < 0$, niin

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Tällöin juuret eivät ole reaalisia, vaan kompleksisia. Jos D olisi neliö, eli $D = b^2$, yhtälön juuret olisivat reaalisia, mutta eivät irrationaalisia.

Irrationaalisia juuria ovat esimerkiksi kaikki muotoa $\sqrt{\frac{h}{k}}$ olevat luvut, missä $\frac{h}{k}$ ei ole rationaaliluvun neliö, sillä ne toteuttavat muotoa $kx^2 - h = 0$ olevan yhtälön [5].

3 Lagrangen teoreema

Määritelmä 6. Ketjumurtoluku $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ on *jaksollinen*, jos on olemassa sellaiset kokonaisluvut k_0 ja $h > 0$, että mielivaltaiselle $k \geq k_0$

$$a_{k+h} = a_k. \tag{3}$$

Merkitään tämän kaltaista jaksollista ketjumurtolukua seuraavasti:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k_n-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots, a_{k_0+h-1}}]. \tag{4}$$

3.1 Jaksollinen ketjumurtoluku on toisen asteen polynomin irrationaalijuuri

Tämän kappaleen lopussa todistetaan, että jaksollinen ketjumurtoluku on toisen asteen polynomin irrationaalijuuri eli kvadraattinen irrationaali. Tätä ennen on esitetty kaksi todistuksessa tarvittavaa tulosta. Lauseen 1 todistus on Rockettin ja Szuszin teoksesta [7]. Lauseiden 2 ja 3 todistukset ovat Khinchiniltä [4].

Lause 1. *Mielivaltaisella $k \in [1, \ldots, n]$,*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}},$$

missä p_i, q_i, r_i viittaavat yhtälön vasemmalla puolella olevaan ketjumurtolukuun.

Todistus. r_k on ketjumurtoluvun α jäännös, joten kun $k = 0$

$$\frac{p_0 r_1 + p_{-1}}{q_0 r_1 + q_{-1}} = \frac{a_0 r_1 + 1}{r_1} = a_0 + \frac{1}{r_1} = r_0 = \alpha.$$

Oletetaan että, väite pätee jollain $k \in \mathbb{N}$. Koska $r_k = a_k + \frac{1}{r_{k+1}}$, niin

$$\alpha = \frac{p_k r_{k+1} + p_{k-1}}{q_k r_{k+1} + q_{k-1}} = \frac{(a_{k+1} + \frac{1}{r_{k+2}})p_k + p_{k-1}}{(a_{k+1} + \frac{1}{r_{k+2}})q_k + q_{k-1}} \tag{5}$$

$$= \frac{(a_{k+1}p_k + p_{k-1}) + (\frac{1}{r_{k+2}})p_k}{(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) + (\frac{1}{r_{k+2}})q_k} \tag{6}$$

$$= \frac{p_{k+1} r_{k+2} + p_k}{q_{k+1} r_{k+2} + q_k}. \tag{7}$$

Saadaan että, väite pätee myös tapauksessa k+1. Siis väite on tosi kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

□

Lause 2. *Jos vähintään yksi ketjumurtoluvun jäännöksistä suppenee, niin myös itse ketjumurtoluku suppenee.*

Todistus. Merkitään $\frac{p_k}{q_k}$ annetun ketjumurtoluvun konvergentteja ja $\frac{p'_k}{q'_k}$ jonkin sen jäännöksen, kuten r_n, konvergenttia. Lauseesta [1], kun $k = 0, 1, \ldots,$ saadaan:

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}}. \tag{8}$$

ja tästä

$$\frac{p'_k}{q'_k} = \frac{q_{n+k}p_{n-2} - p_{n+k}q_{n-2}}{p_{n+k}q_{n-1} - q_{n+k}p_{n-1}}. \tag{9}$$

Jos r_n konvergoituu, niin k lähestyy ääretöntä ja $\frac{p'_k}{q'_k}$ lähestyy raja-arvoa. Merkitköön r_n myös tätä raja-arvoa. Nyt jos jäännös r_n konvergoituu, niin $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ konvergoituu kohti rajaa β, jolle pätee

$$\beta = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}. \tag{10}$$

□

Yhtälöstä 10 saadaan seurauksena ketjumurtoluku β toisen asteen yhtälöksi, kun sijoitetaan β konvergentin r_n paikalle,

$$q_{n-1}\beta^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\beta - p_{n-2} = 0.$$

Lause 3. *Jaksollinen ketjumurtoluku on toisen asteen polynomin irrationaalijuuri*

Todistus. Kaavan 4 jaksollisen ketjumurtoluvun α jäännöksillä pätee $r_{k+h} = r_k$, missä $k \geq k_0$. Joten, kaavan 10 nojalla, kun $k \geq k_0$, niin

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}} \tag{11}$$

eli

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}. \tag{12}$$

Yhtälöstä 12 saadaan

$$\begin{aligned}(p_{k-1}q_{k+h-1} - p_{k+h-1}q_{k-1})r_k^2 + \\ (p_{k-1}q_{k+h-2} + p_{k-2}q_{k+h-1} - p_{k+h-1}q_{k-2} - p_{k+h-2}q_{k-1})r_k \\ + p_{k-2}q_{k+h-2} - p_{k+h-2}q_{k-2} = 0.\end{aligned}$$

Joten r_k on toisen asteen yhtälön juuri ja kvadraattinen irrationaali. Tällöin kaavan 11 ensimmäisen epäyhtälön perusteella α on myös kvadraattinen irrationaali. □

3.2 Lagrangen teoreema

Seuraava todistus on Steinigin [2]. Sen perusväite seuraa samanlaista kaavaa kuin useat muut aikaisemmat todistukset Lagrangen lauseelle. On olemassa sarja toisen asteen polynomeja $f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, joilla kaikilla on sama diskriminantti, jonka kertoimet voidaan rajoittaa n:stä riippumatta ja polynomeille pätee jokaisella n, $f_n(\alpha_n) = 0$. [2]

Olkoon a reaaliluku. Määritellään jono kokonaislukuja $\{a_n\}$ ja jono reaalilukuja $\{\alpha_n\}$ niin, että

$$a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \text{ kun } n \geq 0;\ \alpha_0 = \alpha \tag{13}$$

ja

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}},\ (n \geq 0)\,. \tag{14}$$

Nyt $a_n \geq 1$ ja $\alpha \geq 1$, kun $n \geq 1$. Jos α on irrationaalinen, niin myös jokainen α_n on irrationaalinen ja jonot $\{a_n\}$ ja$\{\alpha_n\}$ ovat äärettömiä. Tämän algoritmin avulla saadaan luvulle α ketjumurtolukuesitys:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Lause 4. *Toisen asteen polynomin irrationaalijuuren ketjumurtolukuesitys on jaksollinen*

Todistus. Olkoon α toisen asteen polynomin irrationaalijuuri. Määritellään joukko $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ yhtälöiden 13 ja 14 avulla. Oletaan, että jokaiselle $n \geq 0$ on olemassa jokin sellainen polynomi

$$f_n(x) = A_n x^2 + B_n x + C_n,$$

joka toteuttaa yhtälön $f_n(\alpha_n) = 0$. Tässä polynomin kertoimet A_n,B_n ja C_n ovat kokonaislukuja, polynomin diskriminantti $D = B_n^2 - 4A_nC_n > 0$ eikä D ole neliö. Sillä, jos D olisi neliö, polynomin juuret eivät olisi irrationaalisia, ja jos D olisi negatiivinen, juuret olisivat kompleksilukuja. Jos tämän kaltainen f_n on olemassa jollekin $n \geq 0$, niin silloin yhtälön 14 nojalla

$$\alpha_{n+1}^2 f_n\left(a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) = 0.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0,$$

missä

$$f_{n+1}(x) = A_{n+1}x^2 + B_{n+1}x + C_{n+1},$$

ja

$$A_{n+1} = a^2 A_n + a_n B_n + C_n,$$

$$B_{n+1} = 2a_n A_n + B_n, \tag{15}$$

$$C_{n+1} = A_n. \tag{16}$$

Selvästi funktion f_{n+1} kertoimet ovat kokonaislukuja. Saadaan tarkistettua, että

$$B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = B_n^2 - 4A_nC_n,$$

joten

$$D := B_0^2 - 4A_0C_0 = B_n^2 - 4A_nC_n, \ (n \geq 0). \tag{17}$$

Diskriminantti ei ole neliö, joten täytyy päteä $D \neq B_n^2$, siis $A_n \neq 0$, kun $n \geq 0$. Joukko $\{A_n\}_{n\geq 0}$ vaihtaa merkkiä äärettömän usein. Sillä, jos A_n olisi lopulta muuttumatonta merkkiä, kuten jos $A_n > 0$, kun $n \geq n_1$, niin $\{B_n\}_{n\geq n_1}$ olisi kasvava sarja kokonaislukuja yhtälön 15 takia, sillä $a_n > 0$, kun $n \geq 1$. Täten yhtälön 16 kanssa seuraa, että $A_n > 0$, $B_n > 0$ ja $C_n > 0$, kun $n > n_2$, joillakin $n_2 \geq n_1$. Tästä seuraa ristiriita, sillä $\alpha_n > 0$, kun $n \geq 1$, ja $f_n(\alpha_n) = 0$. Samoin $A_n < 0$, kun $n \geq n_1$, on mahdoton.

Joten $A_nA_{n-1} < 0$ jollakin äärettömällä joukolla E positiivisia kokonaislukuja n. Siis $A_nC_n < 0$, kun $n \in E$. Joten yhtälön 17 nojalla,

$$|B_n| < \sqrt{D},$$

$$|A_n| \leq \frac{1}{4}D,$$

$$|C_n| \leq \frac{1}{4}D.$$

Nyt, kun $n \in E$, on olemassa vain äärellisen monta erillistä polynomia f_n. Tästä seuraa, että kaksi joukon α_n alkioista ovat yhtä suuret, mistä seuraa väite. □

Viitteet

[1] Davenport, H. The Higher Arithmetic: an Introduction to the Theory of Numbers. Lontoo, 1968.

[2] Steinig, J. A proof of Lagrange's theorem on periodic continued fractions, Arch. Math., Vol. 59, s. 21–23, 1992

[3] Hardy, G. H. & Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. Lontoo, 1960.

[4] Khinchin, A. Ya. Continued Fractions, Dover, 1997.

[5] Nevanlinna, V. Lukuteorian alkeet. 2. uud. p., Jyväskylän yliopisto, 2004.

[6] Eronen, J. et al. MAOL-taulukot. 1. painos. Helsinki, 2019

[7] Rockett, A. M. & Szusz P. Continued Fractions. Singapore 1992