



**TURUN
YLIOPISTO**

VEKTORINKENTÄN ROOTTORIN LOKAALI KARAKTERISOINTI

Noora Kontoniemi

LuK-tutkielma
Lokakuu 2024

Tarkastaja:
FT J.L.

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatu­järjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

Sisällys

1	Johdanto	1
2	Käyräintegraalin kertaus	1
2.1	Käyräintegraali skalaarikentässä	2
2.2	Käyräintegraali vektorikentässä	2
3	Roottori	3
3.1	Pyörteisyyden määrittäminen	3
4	Yhteenveto	8

1 Johdanto

Tässä työssä perehdytään roottorin käsitteeseen (engl. *curl*) ja harjoitellaan vektorikentän pyörteisyyden lokalisointia. Roottori on differentiaalinen operaatio, jolla kuvataan vektorikentän pyörteisyyttä. Aiemmin pyörteisyyden kuvaamiseen on käytetty sanaa rotaatio (engl. *rotation*) roottorin sijaan (Schey, 1973).

Roottoria käytetään yleensä fysiikassa varsinkin tutkittaessa sähkömagnetismia tai tutkittaessa ilmapirtauksia. Roottori on osa *Maxwellin yhtälöitä* ja se esiintyy mm. *Faradayn laissa*. Lisäksi roottoria voidaan hyödyntää määrittäessä esimerkiksi sähkökentän tekemää työtä.

Vaikka roottori onkin helppo yhdistää fysikaalisiin laskuihin, perehdytään tässä tutkielmassa sen matematiikkaan ja siihen, kuinka roottoria voitaisiin mallintaa.

Alkuun kerrataan lyhyesti käyräintegraalia sekä skalaarikentässä, että vektorikentässä. Tämä auttaa ymmärtämään roottorin differentiaalista muotoa ja näistä jälkimmäistä käytetään myöhemmin myös roottorin määrittämisessä. Tämän jälkeen tutkitaan roottorin määrittäystä eri suunnista. Lopuksi pohditaan vielä tilannetta, jossa tarkasteltavan roottorin suunta on epäideaalinen.

Työn tarkoituksena on avata roottorin käsitettä sellaiselle oppijalle, jolle se on vielä tuore tai heikosti hallussa. Tarkoituksena on myös mallintaa roottorin käyttötarkoitusta kentänpyörteisyyden laskujen yksinkertaistamiseksi. Tätä tutkielmaa voi käyttää auttavana ja avaavana materiaalina muun oppimateriaalin tueksi tai kertauksena, jos roottorin opiskelusta on kulunut paljon aikaa.

2 Käyräintegraalin kertaus

Jotta voidaan määrittää vektorikentälle roottori, on hyvä ymmärtää käyräintegraaleja. Tässä luvussa käydään lyhyesti käyräintegraaleja, sekä esitetään niistä esimerkit.

Olkoon käyrä C kolmessa ulottuvuudessa. Valitaan käyrälle suunta kuvan mukaisesti. Olkoon s kaaren pituus mielivaltaisesta pisteestä P . Esimerkiksi $s = s_1$ pisteestä P_1 ja $s = s_2$ pisteestä P_2 . Olkoon myös funktio $f(x, y, z)$. Oletetaan, että funktio f on määritelty kaikkialla käyrässä C .

Nyt jaetaan pisteiden P_1 ja P_2 välinen osa käyrästä C n :ään osaan. Yhdistetään pisteet jänneillä ja valitaan niistä jänne j , jonka pituus on Δs_j .

Arvioidaan funktiota $f(x, y, z)$ mielivaltaisessa jänneen j vastaisen kaaren pisteessä x_j, y_j, z_j ja muodostaa $f(x_j, y_j, z_j)\Delta s_j$. Kun tehdään sama jokaiselle käyrän C segmentille n , saadaan summa

$$\sum_{j=1}^n f(x_j, y_j, z_j)\Delta s_j.$$

Käyräintegraalin määritelmästä saadaan tämän summan raja-arvoksi $f(x, y, z)$, kun jänneiden lukumäärä $n \rightarrow \infty$ ja niiden pituudet lähestyy nollaa.

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty \text{ ja } \Delta s \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j, z_j)\Delta s_j$$

Jotta voidaan arvioida käyräintegraali, täytyy selvittää polku C . Tämä saadaan helpoiten parametrisoimalla kaarenpituuksien s suhteen. Tällöin saadaan $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Nyt käyräintegraali saadaan tavalliseksi määrätyksi integraaliksi

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{s_1}^{s_2} f(x(s), y(s), z(s)) ds.$$

2.1 Käyräintegraali skalaarikentässä

Tarkastellaan ensin yksinkertaisempaa esimerkkiä käyräintegraalista skalaarikentässä kahdessa ulottuvuudessa.

Esimerkki 1. Olkoon käyrä C suora jana origosta pisteeseen $(1, 1)$ ja arvioidaan sitä yli integraalin

$$\int_C (x + y) ds.$$

Olkoon piste P mielivaltainen piste käyrällä C ja sen koordinaatit (x, y) ja kaaren pituus origosta s . Tällöin $x = \frac{s}{\sqrt{2}}$ ja $y = \frac{s}{\sqrt{2}}$. Siispä $x + y = \frac{2s}{\sqrt{2}} = s\sqrt{2}$. Nyt saamme integraalista

$$\int_C (x + y) ds = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}} s ds = \sqrt{2}.$$

Vastaus kuvaa tässä polun pituutta sen rajaaman pinta-alan sijaan.

2.2 Käyräintegraali vektorikentässä

Koska tavoitteena on määrittää vektorikenttä roottori, on tärkeää tarkastella myös käyräintegraalin vektorimuotoa. Jos käyräintegraalissa ilmenevät suureet ovat vektorisuureita, voidaan myös integraalia muokata sen mukaisesti.

Esimerkki 2. Tarkastellaan nyt käyrää C kolmessa ulottuvuudessa. Oletetaan, että mikä tahansa kappale liikkuu voiman vaikutuksesta tämän polun myötäisesti pisteestä s_1 pisteeseen s_2 . Olkoon käyrän mielivaltaisessa pisteessä P vektorin $\vec{f}(x, y, z)$ suuntainen voima. Määritelmän mukaan vektorin \vec{f} komponenteista on aktiivinen vain sen tangenciaalinen komponentti. Tämä vastaa voiman tekemän työn suuntaan. Olkoon \hat{t} yksikkövektori, ja olkoon se käyrän C tangentti pisteessä P . Tällöin voiman tekemä työ siirtämällä kappaletta pisteestä s_1 pisteeseen s_2 on

$$W = \int_C \vec{f}(x, y, z) \cdot \hat{t} ds.$$

Tässä integraali saadaan kahden vektorifunktion pistetulona. Ongelmana on kuitenkin, löytää yksikkövektori \hat{t} . Tarkastellaan kaarenpituudella parametrisoitua käyrää C . Jossain käyrän pisteessä s saadaan, että $x = x(s)$, $y = y(s)$ ja $z = z(s)$. Toisessa käyrän pisteessä $s + \Delta s$ saadaan, että $x + \Delta x = x(s + \Delta s)$, $y + \Delta y = y(s + \Delta s)$

ja $z + \Delta z = z(s + \Delta s)$. Tällöin käyrän kahden pisteen väliseksi jäniteeksi saadaan vektori $\Delta r \equiv i\Delta x + j\Delta y + k\Delta z$, missä

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(s + \Delta s) - x(s) \\ \Delta y &= y(s + \Delta s) - y(s) \\ \Delta z &= z(s + \Delta s) - z(s).\end{aligned}$$

Jakamalla vektori matkan muutoksella Δs , saadaan

$$\frac{\Delta r}{\Delta s} = i\frac{\Delta x}{\Delta s} + j\frac{\Delta y}{\Delta s} + k\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Ottamalla tästä raja-arvo, kun $\Delta s \rightarrow 0$, saadaan

$$i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds},$$

jonka väitetään vastaavan yksikkövektoria \hat{t} . Alussa, kun $\Delta s \rightarrow 0$, vektori Δr on käyrän tangentti pisteessä s . Kun raja-arvo $\Delta s \rightarrow 0$ jatkaa pienemistään, huomataan, että $|\Delta r| \rightarrow \Delta s$. Tällöin raja-arvo on 1 ja voidaan todeta, että

$$\hat{t}(s) = i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds}. \quad (1)$$

Seuraavaksi lasketaan vektorin \vec{f} yhtälön 1 tulon integraali, joka vastaa tarkastellun voiman suuruutta. Saadaan siis

$$\begin{aligned}W &= \int_C \vec{f}(x, y, z) \cdot \left[i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds} \right] ds \\ &= \int_C (f_x dx + f_y dy + f_z dz).\end{aligned}$$

3 Roottori

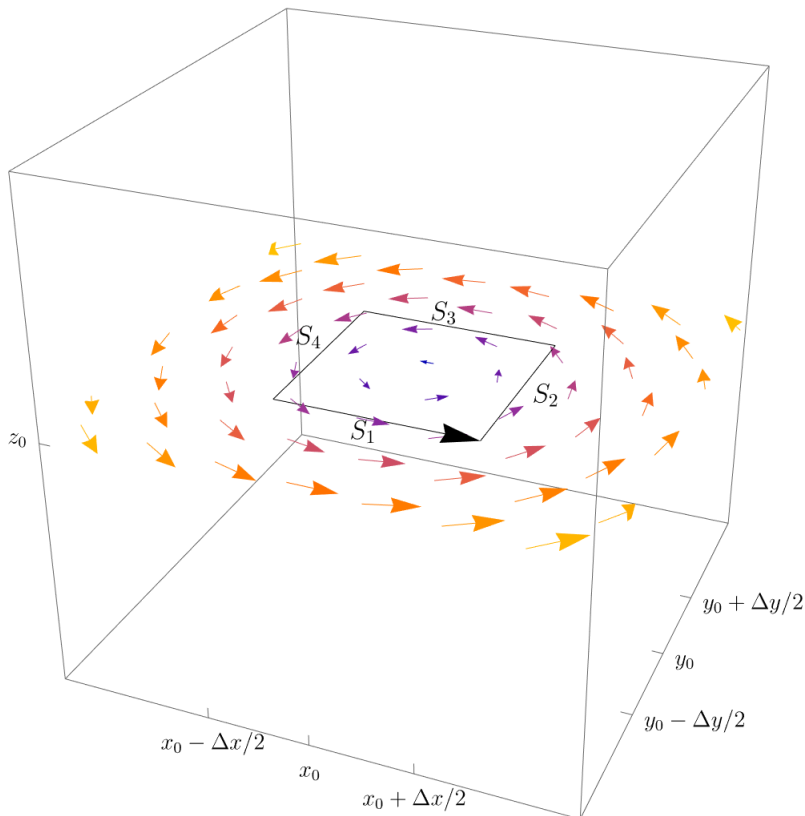
Roottori kuvaa matematiikassa differentiaalista operaatiota, joka mallintaa vektorikentän kiertoa. Tässä luvussa tarkastelemme näiden pyörteiden lokalisointia karteesisessa koordinaatistossa.

3.1 Pyörteisyyden määrittäminen

Tarkastellaan pyöteistä vektorikenttää $F = (-y, x, 0)$. Vektorikenttä muistuttaa rakenteeltaan sylinteriä, kun se on samanlainen kaikilla xy -tasolla. Hahmottamisen helpottamiseksi tarkastellaan kuitenkin vain yhtä tasoa, kun $z = 0$. Kyseinen kenttä on kuvattu kuvassa 1. Huomataan, että kenttä ikään kuin pyörii z -akselin ympäri, joten sillä täytyy olla vektorin luonne eli sen kuvaamiseen tarvitaan suunta ja

pyörimisnopeus. Näitä pyörteisen vektorikentän ominaisuuksia voidaan mitata käyräintegraaleilla. Tähän tarkoitukseen sopii erityisesti tasomaiset integraalit, jotka kulkevat tarkasteltavan pisteen tason kautta.

Tarkastellaan ensin suorakulmion muotoista käyräintegraalia xy -tasossa (kuva 1). Olkoon suorakulmion sivut Δx ja Δy ja suorakulmion keskellä piste (x_0, y_0, z_0) . Huomataan, että integroimispolku on samansuuntainen pyörteen tason kanssa ja siten kohtisuorassa pyörteen akseliin nähden. Tavoitteena on mitata lokaalia pyörteisyyttä, joten annetaan suorakulmion kutistua rajatta.



Kuva 1: Vektorikenttä ja integroitava kierto xy -tasossa

Käyräintegraali suoritetaan tämän kuvion yli vastapäivään ja se jaetaan neljään eri osaan, eli kukin sivu integroidaan erillään. Koska suorakulmio oletetaan pieneksi, voidaan sen kunkin sivun integraalit approksimoida $F \cdot \hat{t}$. (mikä on t)

Olkoon suorakulmion sivut nyt S_1 , S_2 , S_3 ja S_4 . Integroidaan ensin x -akselin suuntaisten sivujen yli. Tällöin

$$\int_{S_1} F \cdot \hat{t} ds = \int_{S_1} F_x dx = F_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \Delta x \quad (2)$$

ja

$$\int_{S_3} F \cdot \hat{t} ds = \int_{S_3} F_x dx = -F_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) \Delta x. \quad (3)$$

Koska

$$\int_{S_3} F_x dx = \int_{S_3} F_x \frac{dx}{ds} ds$$

ja $dx/ds = -1$, niin integraali sivun S_3 yli saa negatiivisen etumerkin. Yhdistämällä yhtälöt 2 ja 3 saadaan

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_3} F \cdot \hat{t} ds &= -(F_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - F_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0))\Delta x \\ &= -\frac{F_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - F_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)}{\Delta y} \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

missä $\Delta x \Delta y$ kuvaa suorakulmion alaa ΔS . Näin ollen

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{S_1+S_3} F \cdot \hat{t} ds = -\frac{F_x(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - F_x(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)}{\Delta y}. \quad (4)$$

Samalla menetelmällä voidaan laskea integraali y -akselin suuntaisten sivujen S_2 ja S_4 yli. Jolloin

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{S_2+S_4} F \cdot \hat{t} ds = -\frac{F_y(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) - F_y(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)}{\Delta x}. \quad (5)$$

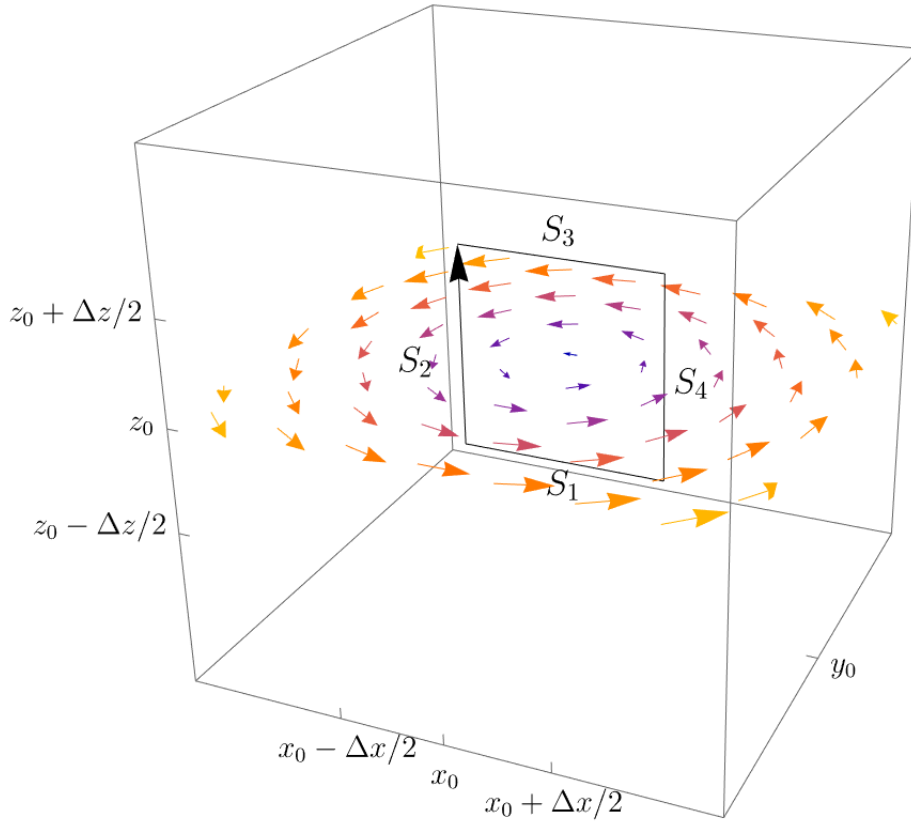
Nyt yhdistämällä yhtälöt 4 ja 5 voidaan määrittää suorakulmion keskipiste (x_0, y_0, z_0) , kun Δx ja $\Delta y \rightarrow 0$, saadaan

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint F \cdot \hat{t} ds = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad (6)$$

missä \oint kuvaa käyräintegraalia pienen suorakulmion yli.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa integroimispolku onkin käännetty xz -tasoon (kuva 2). Nyt polun rajaaman tason normaali on kohtisuorassa kentän akseliin nähden. Tällöin siis myös vektori kenttä on kohtisuorassa polkuun nähden, ja täten integraali reunan yli häviää.

Olkoon tämän suorakulmion sivut Δx ja Δz ja suorakulmion keskellä edelleen piste (x_0, y_0, z_0) .



Kuva 2: Vektorikenttä ja integroitava kierto xz -tasossa

Jaetaan integroitava polku neljään sen sivujen mukaisesta. Olkoon sivut S_1 , S_2 , S_3 ja S_4 . Suoritetaan integrointi ensin x -akselin suuntaisten sivujen yli. Tällöin

$$\int_{S_1} F \cdot \hat{t} ds = \int_{S_1} F_x dx = F_x(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x \quad (7)$$

ja

$$\int_{S_3} F \cdot \hat{t} ds = \int_{S_3} F_x dx = -F_x(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x. \quad (8)$$

Koska

$$\int_{S_3} F_x dx = \int_{S_3} f_x \frac{dx}{ds} ds$$

ja $dx/ds = -1$, niin integraali saa negatiivisen etumerkin. Yhdistämällä kummankin sivun yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned} \int_{S_1+S_3} F \cdot \hat{t} ds &= -(F_x(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x - F_x(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x)\Delta x \\ &= -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) - F_x(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})}{\Delta y} \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

missä $\Delta x \Delta y$ kuvaa suorakulmion alaa ΔS . Jolloin jälleen

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{S_1+S_3} F \cdot \hat{t} ds = -\frac{F_x(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}) - F_x(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})}{\Delta y}.$$

Samoin integraaliksi yli z -akselin suuntaisten sivujen S_2 ja S_4 saadaan

$$\begin{aligned} \int_{S_2+S_4} F \cdot \hat{t} ds &= -(F_z(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta x - F_z(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)) \Delta z \\ &= -\frac{F_z(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta x - F_z(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)}{\Delta x} \Delta x \Delta z. \end{aligned}$$

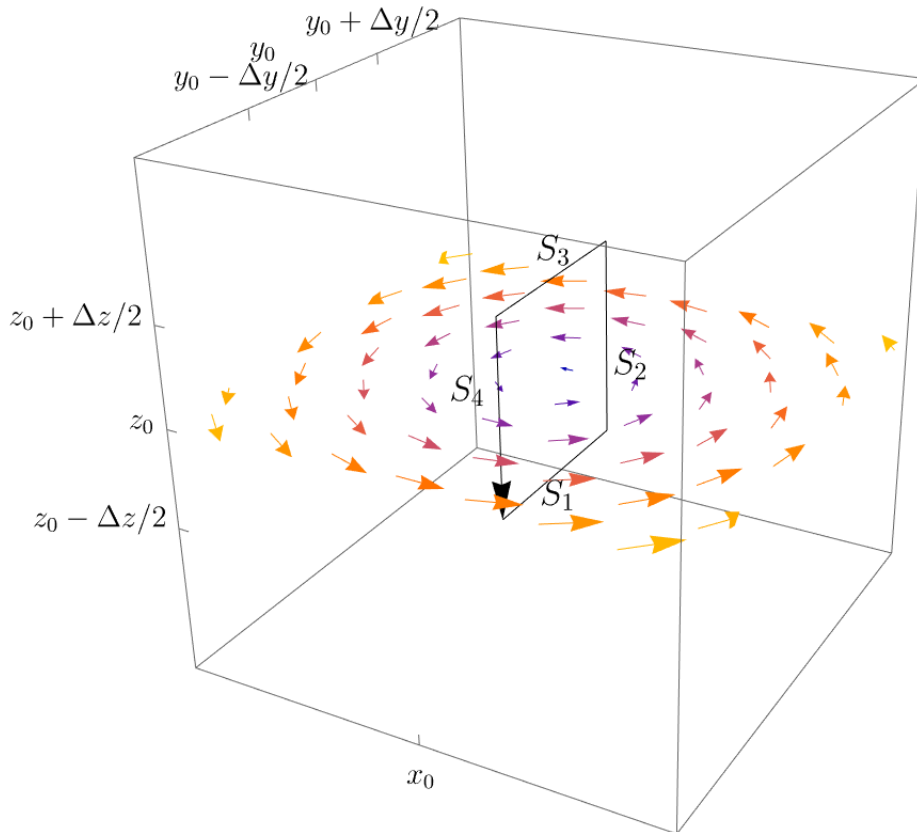
Jälleen jakamalla käyräintegraali suorakulmion pinta-alalla saadaan

$$\frac{1}{\Delta S} \int_{S_2+S_4} F \cdot \hat{t} ds = -\frac{F_z(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta x - F_z(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Nyt nämä yhdistämällä voidaan laskea raja-arjo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint F \cdot \hat{t} ds = \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (9)$$

Tarkastellaan vielä lopuksi tilannetta, jossa integroimispolku on yz -tasossa (kuva 3). Olkoon suorakulmion sivut nyt Δy ja Δz ja suorakulmion keskipiste (x_0, y_0, z_0) .



Kuva 3: Vektorikenttä ja integroitava kierto yz -tasossa

Jaetaan integroitava polku jälleen neljään osaan suorakulmion sivujen mukaisesti. Olkoon sivut S_1 , S_2 , S_3 ja S_4 . Integrointi suoritetaan jälleen kahdessa osassa eri akselien suuntaisten sivujen yli ja tulokset yhdistetään yhdeksi lausekkeeksi samaan tapaan kuin aiempien integroimispolkujen kohdalla.

Nämä kolme polkua kuvaavat kukin kentän pyörteisyyttä tiettyyn suuntaan. Laskemalla ja yhdistämällä ne saadaan vektori, joka kuvaa kentän pyörteisyyttä eli saadaan kentän roottori F (engl. *curl F*).

Kierto nimetään aina sen normaalivektorin mukaan käyttäen apuna oikeankädensääntöä, jossa peukalo osoittaa normaalin suuntaan ja muut sormet kierron suuntaan. Eli kiertotapahtuu tason keskipisteen kautta kulkevan normaalin suuntaisen akselin ympäri. Oikeankädensäännöllä raja-arvo $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \oint F \cdot \hat{t} ds / \Delta S$ lasketaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \text{Jos polun normaali on } i, \text{ lasketaan } & \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}. \\ \text{Jos polun normaali on } j, \text{ lasketaan } & \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}. \\ \text{Jos polun normaali on } k, \text{ lasketaan } & \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Roottorin lauseketta

$$\text{rot}(F) = i\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

käytetään usein roottorin määritelmien yhteydessä. Lisäksi monesti näkee roottorin ilmaistavan determinantin avulla

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Funktion ja nablän ristitulo on yleisesti käytetty symboli roottorille.

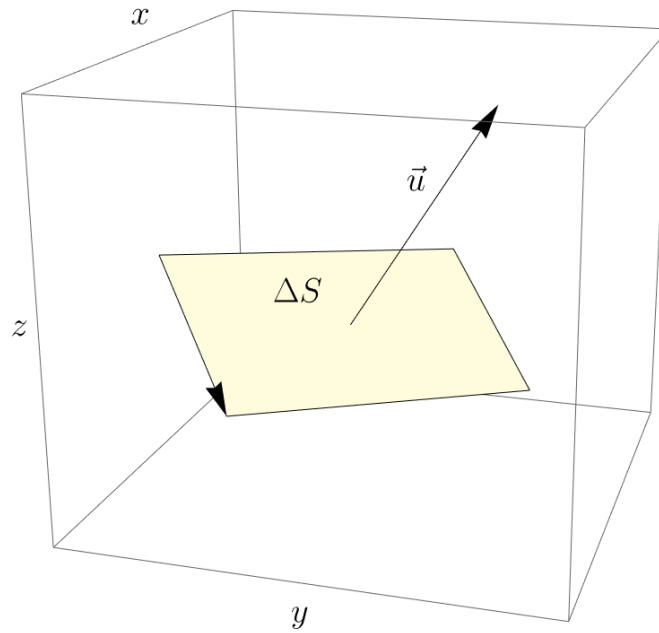
4 Yhteenveto

Vektorikentän pyörteisyyttä voidaan mitata kahdella tavalla. Mittaus voidaan suorittaa laskemalla käyräintegraaleja kuvitteellisen laatan reinan ympäri. Tähän vaaditaan kolmen käyräintegraalin laskemista joko laatan suunnan mukaisesti tai sen normaalin mukaan. Tasolle voidaan määrittää kaksi normaalia, joista oikean käden säännön mukaan voidaan valita oikea.

Toinen tapa pyörteisyyden määrittämiseen olisi äskettäin läpikäyty roottori. Roottori on siis matemaattinen apukeino määrittäessä moniulotteisempaa liikettä. Roottorilla voidaan ilmaista ilmiötä, jota olisi muuten hankalaa mallintaa. Roottori ilmaisee, kuinka paljon suurimmillaan kenttä vaikuttaa polkuun ja esimerkiksi homogeenisessä kentässä roottori on nolla, kun kaikkialla vaikutus on sama. Tällöin kenttä on siis pyörteetön.

Pyörteisyyttä määriteltessä tarkasteltiin kenttää $F = (-y, x, 0)$ origon läheisyydessä (kuvat 1, 2 ja 3). Näissä huomattiin, miten pyörteisyys esiintyi z -akseliin nähden kohtisuoralla tasolla, mutta ei x - tai y -akselien suhteen kohtisuorilla tasoilla. Kyseisen kentän roottori on $(0,0,2)$, josta voidaan tulkita, että kaikki kentän pyörteet kulkevat vain z -akselin ympäri.

Pyörteisyyden ei kuitenkaan tarvitse rajoittua koordinaattiakseleita kohtisuoriin pyörteisiin. Tarkastellaan kuvaa 4. Tässä on esitettyä laatta S ja sen normaalivektori u oikean käden säännön mukaisesti.



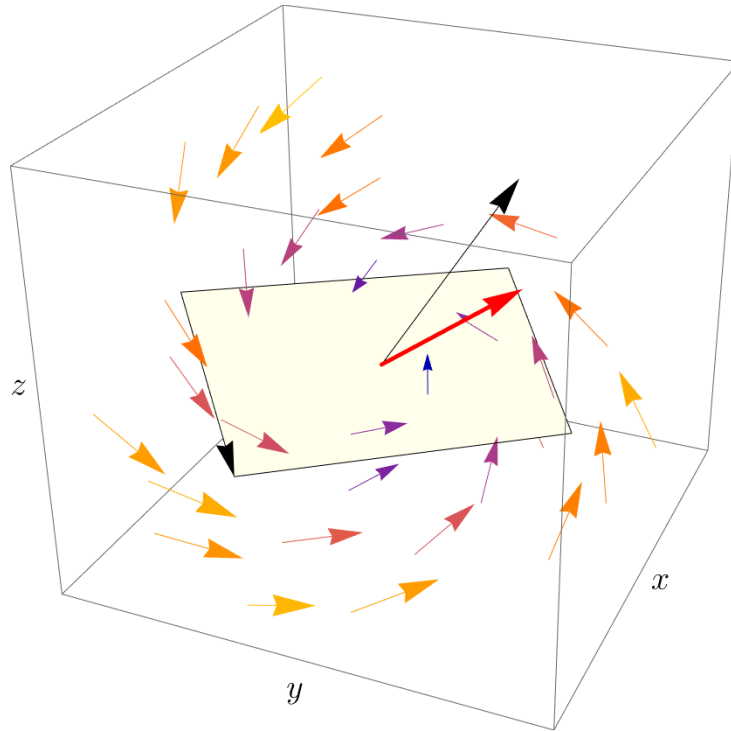
Kuva 4: Vino taso ja sen normaali

Toistamalla näille komponenteille aiemmin käydyt laskut saadaan kentän roottoriksi $\nabla \times F$ ja normaalin u pistetulona kerrottuna laatan pinta-alalla ΔS . Tarkemmin

$$(\nabla \times F) \cdot u = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \int F \cdot \hat{t} ds$$

Lisäämällä kuvaan vektorikentän F ja määrittämällä roottorin arvoksi $\nabla \times F = (1, 1, 1)$ saadaan kuvan 5 mukainen tilanne. Tästä voidaan huomata roottorin ja laatan normaalin olevan lähes yhdensuuntaisia, jolloin sisätuloksi saadaan

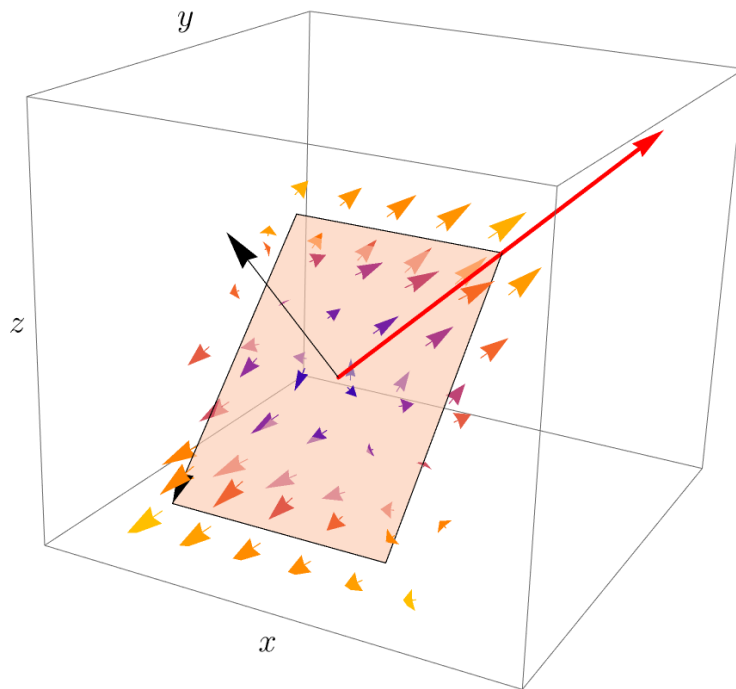
$$(\nabla \times F) \cdot u > 0.$$



Kuva 5: Koordinaattiakseleihin nähden vino kenttä

Pohditaan vielä tilannetta, jossa kenttä onkin laattaan nähden kohtisuorassa. Tämä on esitettyä kuvassa 6. Nyt käyräintegraali häviää, kun eri sivujen tuottamat integraalit kumoavat toisensa ja näin sisätuloksi saadaan

$$(\nabla \times F) \cdot u = 0.$$



Kuva 6: Kenttä kohtisuorassa

Kuten tässä tutkielmassa esiintyvistä kuvista voi päätellä, on roottorin kuvaaminen hankalaa kolmiulotteisessa avaruudessa. Jotta voidaan kuvata edes vähänkään selkeästi roottoria, on kuvista jouduttu karsimaan osa tasoista ja yksin kertaistamaan. Esimerkiksi, jos kuvassa olisi esitetty vektorikenttä mahdollisimman laajasti, ei siitä hahmottuisi yhtä selkeästi ja yksiselitteisesti sen luonne. Ideaali esitystapa näille olisikin liikuteltava kuva, jolloin lukija voisi tarkastella sitä, monesta näkökulmasta.

Viitteet

- [1] Schey, H. M. *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus*. New York: W. W. Norton, 1973. Print.
- [2] Spiegel, Murray R. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*. SI(metric) ed. London: McGraw-Hill, 1974. Print.