TURUN YLIOPISTO

Ympyräpeilaus ja Steinerin ketju

Marcus Rautsala

LuK-tutkielma
Marraskuu 2024

Ohjaaja:
Dos. Jyrki Lahtonen

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck-järjestelmällä

TURUN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Marcus Rautsala: Ympyräpeilaus ja Steinerin ketju
LuK-tutkielma, 17 s.
Matematiikka
Marraskuu 2024

Tässä tutkielmassa määritellään ympyräpeilaus eli inversio ja esitellään ympyräpeilauksen geometrisiä ominaisuuksia sekä niihin liittyviä lauseita ja todistuksia.

Tutkielman jälkimmäisessä osassa esitellään sveitsiläisen matemaatikon Jakob Steinerin määrittelemä Steiner ketju ja käydään läpi tähän liittyviä lauseita ja todistuksia.

Asiasanat: ympyräpeilaus, Steinerin ketju, Steinerin porismi

Sisällys

1 Johdanto

Tasogeometria eli kaksiulotteista avaruutta käsittelevä geometrian osa-alue tutkii pisteitä, pistejoukkoja, kulmia, etäisyyksiä ja alueita. Yksi tasogeometrian peruskäsite on ympyrä. Ympyräpeilauksessa eli inversiossa käytetään tasossa olevaa ympyrää kuvaamaan tason pisteet uusille sijainneille. Tässä työssä määritellään ympyräpeilaus ja käydään läpi ympyräpeilaukseen liittyviä ominaisuuksia todistuksineen.

Inversio liittyy oleellisesti Steinerin ketjuun sekä sitä kuvaavaan Steinerin porismiin. Nämä käsitteet määritteli sveitsiläinen matemaatikko Jakob Steiner (1796–1863), joka tutki pääosin geometriaa. Steinerin kontribuutio alalle on ollut merkittävä, ja häntä on pidetty yhtenä maailman merkittävimpänä puhtaana geometrikkona. Tässä työssä määritellään molemmat käsitteet sekä todistetaan niihin liittyviä tuloksia.

2 Ympyräpeilaus

Ympyräpeilaus eli inversio on kuvaus, joka vaihtaa ympyrän ulkopuolisen ja sisäpuolisen alueen keskenään.

Määritelmä 1. Olkoon ω annettu ympyrä, jolla on keskipiste O ja säde r, eli $\omega(O, r)$. Inversio $I = I_\omega$ kuvaa pisteen $P \neq O$ pisteeksi $I_\omega(P) = P'$ niin, että P' kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{OP}$ ja $OP \cdot OP' = r^2$.

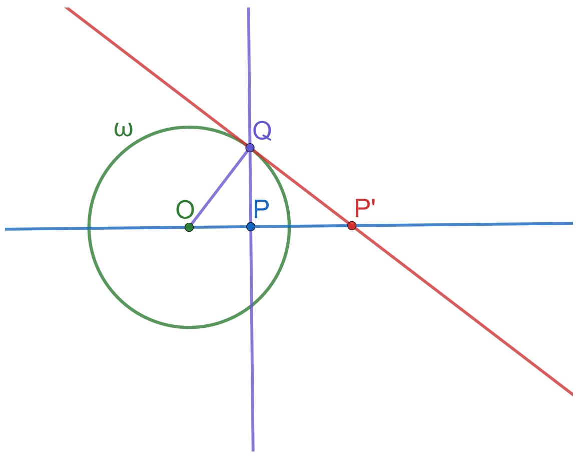
Inversio I_ω ei ole tason $\mathbb{E}$ transformaatio, sillä se ei ole määritelty pisteelle O, mutta I_ω on bijektio $\mathbb{E} \setminus \{O\} \to \mathbb{E} \setminus \{O\}$.

Inversiossa I_ω jokainen ympyrän ω kehäpiste kuvautuu itselleen. Voidaan myös ajatella, että pisteelle O on olemassa kuva äärettömyydessä – tähän ideaan palataan luvussa 2.3.

2.1 Invertoidun pisteen löytäminen

Määritellään valitun pisteen P kuva $I_\omega(P)$ geometrisellä konstruktiolla:

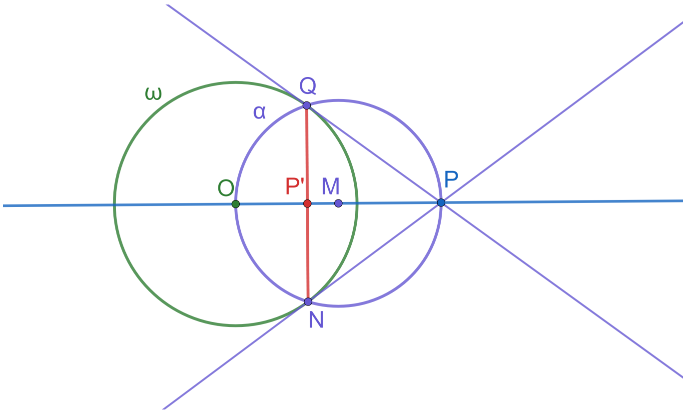
Oletetaan, että piste P on ympyrän ω sisällä. Piirretään suoralle $\ell(O, P)$ normaali pisteeseen P, jolloin sen ja ympyrän ω leikkauspisteeseen Q piirretty tangentti leikkaa suoran $\ell(O, P)$ inversiopisteessä P'.



Kuva 1: Havainnollistus inversiopisteen P' löytämisestä.

Havaitaan, että $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$, josta saadaan $OP/OQ = OQ/OP'$, josta edelleen saadaan $OP \cdot OP' = OQ^2 = r^2$.

Kun piste P on ympyrän ω ulkopuolella, kuvattu piste $I_\omega(P)$ löydetään käänteisessä järjestyksessä:
Löydetään pisteen P kautta kulkevat ympyrän ω tangentit ottamalla janan OP keskipiste M. Piirretään ympyrä α, jonka keskipiste on M ja säde on OM. Ympyrät ω ja α leikkaavat toisensa pisteissä Q ja N, jolloin suorat $\ell(P, Q)$ ja $\ell(P, N)$ ovat ympyrän ω tangentit. Nyt jana QN leikkaa suoran $\ell(O, P)$ inversiopisteessä P'.



Kuva 2: Havainnollistus inversiopisteen P' löytämisestä.

2.2 Inversion ominaisuuksia

Tässä luvussa esitellään inversion ominaisuuksia todistuksineen.

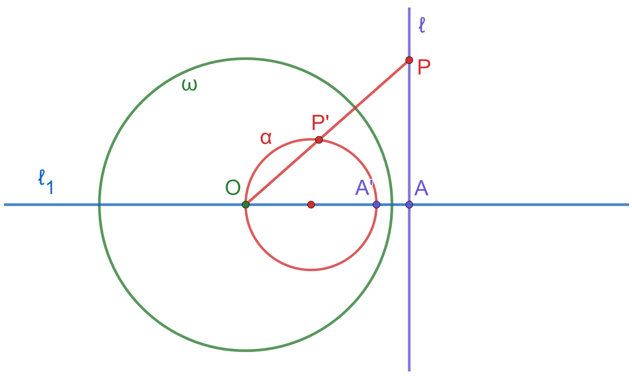
Lause 1. *Inversio jonkin annetun ympyrän ω suhteen on itsensä käänteiskuvaus, siis $I_\omega(I_\omega(P)) = P$ eli $I_\omega^{-1} = I_\omega$.*

Todistus. Olkoon ω annettu ympyrä $\omega(O, r)$. Olkoon P annettu piste ja sen kuva $I_\omega(P) = P'$. Inversion määritelmän mukaan $OP \cdot OP' = r^2$ ja $P' \in \overrightarrow{OP}$. Havaitaan, että $P \in \overrightarrow{OP'}$ ja $OP' \cdot OP = r^2$, joten $I_\omega(P') = P$. □

Sanotaan, että ℓ_O on O-suora, jos se saadaan suorasta ℓ, jossa $O \in \ell$, poistamalla siitä piste O. Vastaavasti O-ympyrä ω_O saadaan ympyrästä ω, jossa $O \in \omega$, poistamalla siitä piste O.

Lause 2. *Olkoon ω annettu ympyrä $\omega(O, r)$. Kun $O \notin \ell$, kuva $I_\omega(\ell)$ on O-ympyrä. Vastaavasti kun α on O-ympyrä, kuva $I_\omega(\alpha)$ on suora, jolle $O \notin I_\omega(\alpha)$.*

Todistus. Olkoon ℓ_1 sellainen suora, että $\ell_1 \perp \ell, O \in \ell_1$ ja $A = \ell_1 \cap \ell$. Kun $P \in \ell$, niin $\triangle OPA \sim \triangle OA'P'$, missä $A' = I_\omega(A)$ ja $P' = I_\omega(P)$. Täten jana OA' on ympyrän α halkaisija ja P' on tämän ympyrän kehällä. Vastaavasti, jos P on ympyrän α kehällä, niin $P' \in \ell$.

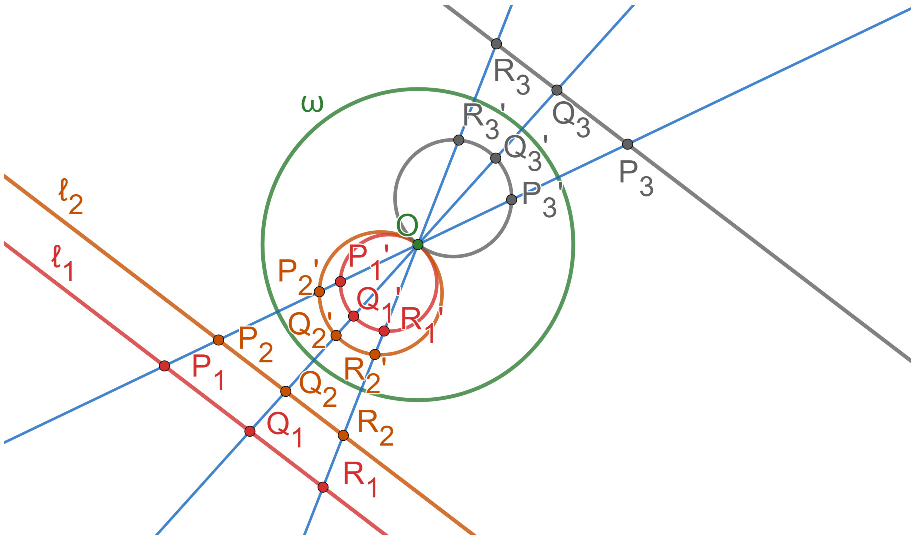


Kuva 3: Havainnollistus suoran ℓ ja O-ympyrän α inversiosta.

□

Lause 3. *Jos $\ell_1 \neq \ell_2$, $\ell_1 \parallel \ell_2$ ja $O \notin \ell_1, \ell_2$, niin suorat ℓ_1 ja ℓ_2 kuvautuvat inversiossa O-ympyröiksi, jotka sivuavat toisiaan pisteessä O.*

Todistus. Lauseesta 2 tiedetään, että suorat ℓ_1 ja ℓ_2 kuvautuvat O-ympyröiksi. Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset ja $\ell_1 \neq \ell_2$, joten niillä ei ole leikkauspistettä. Valitaan suorasta ℓ_1 mikä tahansa piste P_1. Suora $\ell(O, P_1)$ leikkaa myös suoran ℓ_2 pisteessä P_2. P_1 ja P_2 ovat erilliset pisteet, joten niiden kuvat P_1' ja P_2' ovat myös erilliset. Tämä voidaan todeta kaikille suoran ℓ_1 pisteelle, joten tämän perusteella mitkään suorilta valittujen pisteiden inversiot eivät kohtaa. Ympyrät sivuavat toisensa ainoastaan pisteessä O, jota lähestytään, kun suora jatkuu äärettömästi.

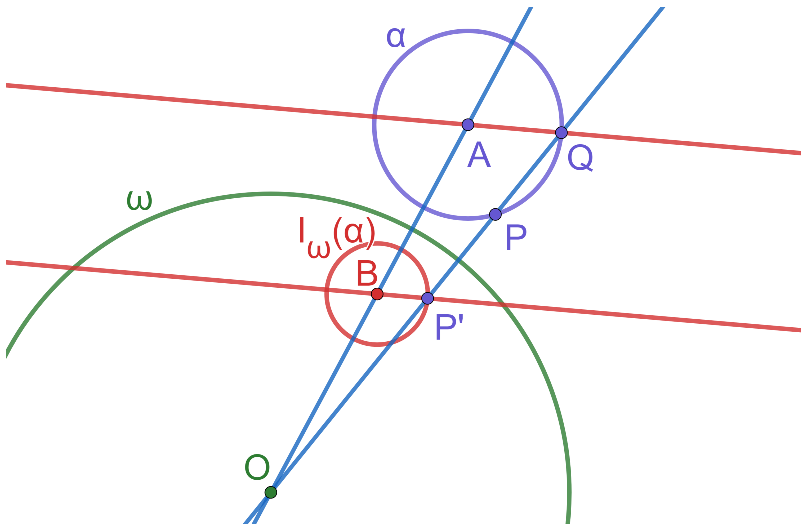


Kuva 4: Havainnollistus yhdensuuntaisten suorien inversiosta O-ympyröiksi.

□

Lause 4. *Olkoon α ympyrä, $O \notin \alpha$. Tällöin $I_\omega(\alpha)$ on ympyrä, $O \notin I_\omega(\alpha)$.*

Todistus. Olkoot A ympyrän α keskipiste, $P \in \alpha$ ympyrän kehäpiste ja
$Q \in \ell(O, P) \cap \alpha$ toinen kehäpiste. Piirretään pisteen P inversion P' kautta suoran $\ell(A, Q)$ kanssa yhdensuuntainen suora. Piste B on tämän suoran ja suoran $\ell(O, A)$ leikkauspiste. Nyt $OP \cdot OP' = r^2$ ja $\triangle OP'B \sim \triangle OQA$, eli $OP'/OQ = BP'/AQ$. Laskemalla todetaan, että $BP' = AQ \cdot r^2/(OP \cdot OQ)$, missä AQ on ympyrän α säde eli vakio, r^2 on ympyrän ω säteeseen perustuva vakio ja $OP \cdot OQ$ on pisteen potenssi eli pisteen P valinnasta riippumaton vakio. Täten BP' on pisteen P valinnasta riippumaton vakio eli ympyrän $I_\omega(\alpha)$ säde.

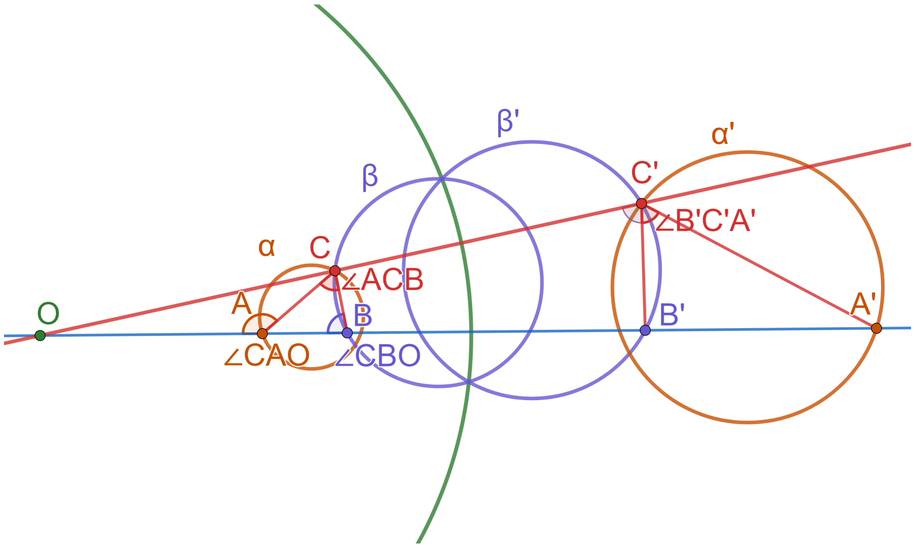


Kuva 5: Havainnollistus ympyrän α inversiosta ympyräksi.

$\square$

Lause 5. *Inversiossa kuvatut kulmat säilyttävät suuruutensa.*

Todistus. Olkoot α ja β ympyrät, jotka leikkaavat toisiaan pisteessä C. Valitaan piste P inversioympyrän ω kaarelta niin, että suora $\ell(O, P)$ leikkaa ympyrän α pisteessä A ja ympyrän β pisteessä B. Tiedetään, että $\triangle OAC \sim \triangle OC'A'$, joten $\angle CAO = \angle OC'A'$. Vastaavasti $\triangle OBC \sim \triangle OC'B'$, joten $\angle CBO = \angle OC'B'$. Kulma $\angle CAO$ on kolmion $\triangle ABC$ ulkokulma, joten $\angle CAO = \angle ACB + \angle CBA$. Laskemalla saadaan $\angle ACB = (\angle ACB + \angle CBA) - \angle CBO = \angle CAO - \angle CBO = \angle OC'A' - \angle OC'B' = \angle B'C'A'$.
Tämä todistus on voimassa myös suorien välisille kulmille sekä suorien ja ympyröiden välisille kulmille.



Kuva 6: Havainnollistus kulman suuruuden säilymisestä inversiossa.

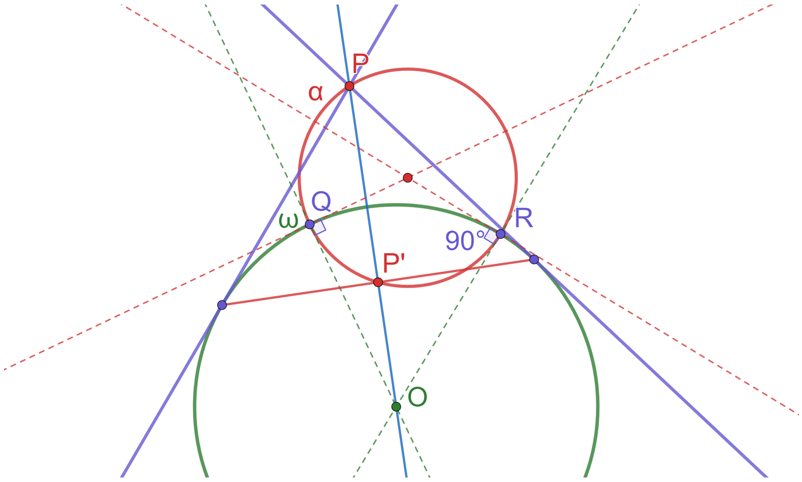
$\square$

Lause 6. *Inversioympyrä ω, inversiokeskuksen O kautta kulkevat suorat sekä ympyrät, jotka leikkaavat ympyrän ω kohtisuorasti kuvautuvat inversiossa I_ω itselleen.*

Todistus. Inversioympyrä ω kuvautuu selvästi itselleen, sillä kun $P \in \omega$, niin $OP = r$, joten $OP \cdot OP' = r^2 \implies OP' = r = OP \implies P' = P$.

Inversiokeskuksen O kautta kulkeva suora kuvatuu itselleen, sillä inversion määritelmän perusteella $I_\omega(P) = P' \implies P' \in \overrightarrow{OP}$. Lisäksi kun $OP \to \infty$ niin $OP' \to 0$ ja vastaavasti kun $OP \to 0$ niin $OP' \to \infty$, joten kuvatut pisteet $I_\omega(\ell(O,P))$ peittävät kaikki suoran $\ell(O,P)$ pisteet.

Ympyrä α kuvautuu itselleen, jos α ja inversioympyrä ω leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Olkoot Q ja R ympyröiden ω ja α leikkauspisteet. Inversiossa kuvatut kulmat säilyttävät suuruutensa, joten invertoitu ympyrä $I_\omega(\alpha)$ on ympyrä, joka leikkaa ympyrän ω kohtisuorasti pisteissä Q ja R. Leikkauspisteissä kohtisuorasti toisiaan leikkaavien ympyröiden keskipisteet ja säteet ovat toistensa tangenttien leikkauspisteet ja niiden etäisyydet ympyröiden leikkauspisteistä. Säde ja keskipiste määrittelevät ympyrän, joten kohtisuorasti samassa kahdessa pisteessä leikkaavat ympyrät ovat yksikästteiset eli kuvattu ympyrä $I_\omega(\alpha) = \alpha$.



Kuva 7: Piste P ja inversiopiste P' sijaitsevat ympyrän α kehältä.

□

Lauseen 6 viimeistä kohtaa voidaan täydentää:

Lause 7. *Ympyrä, joka kulkee pisteen P ja sen kuvan $I_\omega(P) = P'$ kautta, leikkaa inversioympyrän ω kohtisuorasti.*

Todistus. Olkoon α ympyrä, joka kulkee pisteiden P ja P' kautta sekä leikkaa inversioympyrän ω pisteissä Q ja R. Inversion määritelmän mukaan $OP \cdot OP' = r^2 = OQ^2 = OR^2$, eli kun piirretään suora $\ell(O,Q)$ tai suora $\ell(O,R)$ havaitaan, että suora sivuaa ympyrää α ja ympyrät leikkaavat toisiaan kohtisuorasti. □

Lauseiden 6 ja 7 perusteella voidaan todeta, että jokainen ympyrä, joka leikkaa inversioympyrän kohtisuorasti, kuvautuu itselleen, ja jokainen ympyrä, joka kulkee jonkin pisteen ja sen kuvan kautta, leikkaa inversioympyrän kohtisuorasti. Siis

$$I_\omega(\alpha) = \alpha \iff \omega \perp \alpha \iff P' \in \alpha \ \forall P \in \alpha, P' \notin \alpha \ \forall P \notin \alpha.$$

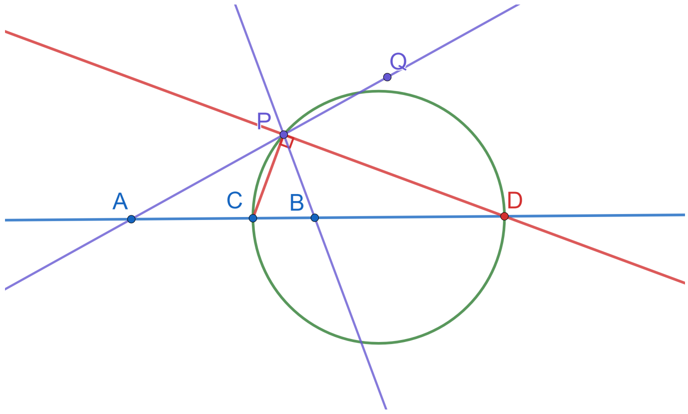
Lause 8. Ptolemaioksen lause: *Olkoot A, B, C ja D tason E pisteitä. Tällöin $AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD$. Lisäksi yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin, kun $ABCD$ on konsyklinen.*

Todistus. Olkoon ω r-säteinen ympyrä keskipisteellä A. Merkitään $X' = I_\omega(X)$ pisteille X. Tällöin $AC/AB = AB'/AC'$ ja siten $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$, eli $BC/AC = B'C'/AB'$, mistä saadaan, että $B'C' = BC \cdot \dfrac{r^2}{AB \cdot AC}$. Kolmioepäyhtälön mukaan $B'C' + C'D' \geq B'D'$, josta siirtymällä edelleen pisteisiin A, B, C ja D yhtälö saadaan muotoon $BC \cdot \dfrac{r^2}{AB \cdot AC} + CD \cdot \dfrac{r^2}{AC \cdot AD} \geq BD \cdot \dfrac{r^2}{AB \cdot AD}$. Yhtäsuuruus on voimassa vain jos $C' \in B'D'$. Jana $B'D'$ on kaaren BD kuva, joten $C' \in B'D'$ kun C on ympyrän $\alpha(A, B, D)$ kaarella BD joka on vastapäätä pistettä A. Kertomalla edellinen yhtälö puolittain luvulla $AB \cdot AC \cdot AD / r^2$ saadaan Ptolemaioksen tulos. □

2.3 Inversiotaso

Lause 9. *Apolloniuksen määritelmä ympyrälle on niiden pisteiden P ura, joiden etäisyydet kahdesta annetusta pisteestä A ja B ovat annetussa suhteessa r eli $BP = r \cdot AP$. Tämä ympyrä invertoi pisteen A pisteeksi B.*

Todistus. Valitaan piste C janalta AB niin, että Apolloniuksen määritelmä toteutuu eli $BC = r \cdot AC$. Valitaan myös jokin piste $P \notin \ell(A, B)$, jolle $BP = r \cdot AP$. Laskemalla saadaan $BC/AC = r = BP/AP$, mikä tarkoittaa, että suora $\ell(P, C)$ on kulman $\angle APB$ kulmanpuolittaja.
Valitaan piste D suoralta $\ell(A, B)$ niin, että $C \neq D$ ja $BD = r \cdot AD$ eli $BD/AD = r$. Olkoon Q suoralla $\ell(A, P)$. Nyt kulma $\angle APQ$ on 180°:n kulma. Suora $\ell(P, D)$ puolittaa kulman $\angle BPQ$, koska $BD/AD = r = BP/AP$. Nyt kulma $\angle CPD$ on suuruudeltaan puolet kulmien $\angle APB$ ja $\angle BPQ$ summasta. Koska $\angle APB + \angle BPQ = \angle APQ$, kulma $\angle CPD = 180°/2 = 90°$. Muodostunut kulma on siis aina suora, joten kaikki Apolloniuksen ehdon toteuttavat pisteet P muodostavat ympyrän, tarkalleen ottaen ympyrän ω, jolle pätee $I_\omega(A) = B$.



Kuva 8: Suoran kulman $\angle CPD$ muodostaminen pisteiden A, B, C, D ja P avulla.

$\square$

Kuten luvun 2 alussa todettiin, inversiossa ympyrän ω suhteen keskipiste O on erikoisasemassa, sillä $I_\omega(O)$ ei ole määritelty tasossa $\mathbb{E}$.

Laajennetaan tasoa $\mathbb{E}$ ideaalipisteellä O'. Merkitään $\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup O'$, ja määritellään $I_\omega(O) = O'$, $I_\omega(O') = O$. Inversiotulosten ja Apolloniuksen lauseen mukaisesti suoraa voidaan pitää ympyränä, jonka säde on äärettömän suuri ja keskipiste on O'. Kun tämä samaistus on tehty, laajennettua tasoa $\mathbb{E}_\infty$ kutsutaan inversiotasoksi, jossa suoraa voidaan pitää ympyränä.

Inversio I_ω on inversiotason $\mathbb{E}_\infty$ transformaatio.

Inversiotasossa $\mathbb{E}_\infty$ yhdensuuntaiset suorat vastaavat ympyröitä, jotka sivuavat pisteessä O', kun taas erisuuntaiset suorat vastaavat ympyröitä, jotka leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä, joista toinen on piste O'. Suora, joka kulkee pisteen O kautta, vastaa ympyrää, joka leikkaa inversioympyrän ω kohtisuorasti.

3 Steinerin ketju

Steinerin ketju on joukko toisiaan leikkaamattomia ympyröitä, jotka noudattavat tiettyjä sääntöjä. Ketjulla on mielenkiintoisia ominaisuuksia, jotka ilmenevät esimerkiksi kun ketjua invertoidaan.

Määritelmä 2. Olkoot α ja β kaksi ympyrää, jotka eivät sivua tai leikkaa toisiaan. Steinerin ketju on joukko, johon kuuluu n ympyrää. Steinerin ketjuun kuuluva ympyrä sivuaa ketjussa sitä edeltävää ja seuraavaa ympyrää sekä ympyrät α ja β, mutta ei leikkaa eikä sivua ketjun muita ympyröitä. Mikäli ketjun ensimmäinen ja viimeinen ympyrä sivuavat toisiaan, ketjun sanotaan olevan suljettu, muuten ketjun sanotaan olevan avoin.

3.1 Steinerin porismi

Osoitetaan ensin, että erikeskiset ympyrät α ja β voidaan kuvata samankeskisiksi ympyröiksi jollakin inversiolla.

Oikean inversioympyrän löytämiseksi etsitään ensin ympyröiden α ja β *radikaaliakseli* eli suora, jonka jokainen piste P sijaitsee ympyröiden α ja β tangenteilla yhtä kaukana kummankin ympyrän sivuamispisteestä. Toisin sanoen ympyrä, jonka keskipiste P on radikaaliakselilla, leikkaa kohtisuorasti joko molemmat ympyröistä α ja β tai ei kumpikaan.

Olkoot ympyröiden α ja β keskipisteiden A ja B koordinaatit (x_A, y_A) ja (x_B, y_B) vastaavasti. Piste P sijaitsee ympyröiden α ja β radikaaliakselilla jos ja vain jos $(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 - r_A^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 - r_B^2$, jossa r_A ja r_B ovat ympyröiden α ja β vastaavat säteet eli pisteen potenssin arvo kummallekin ympyrälle on sama. Yhtälöä voidaan avata hieman:

$$\begin{aligned}
(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 - r_A^2 &= (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 - r_B^2 \\
\Rightarrow x_P^2 - 2x_Px_A + x_A^2 + y_P^2 - 2y_Py_A + y_A^2 - r_A^2 &= x_P^2 - 2x_Px_B + x_B^2 + y_P^2 - 2y_Py_B + y_B^2 - r_B^2 \\
\Rightarrow -2x_Px_A + x_A^2 - 2y_Py_A + y_A^2 - r_A^2 &= -2x_Px_B + x_B^2 - 2y_Py_B + y_B^2 - r_B^2
\end{aligned}$$

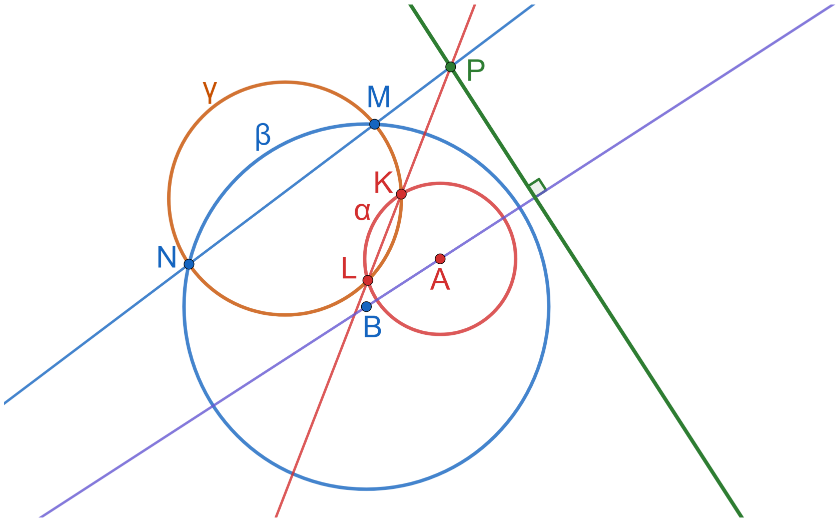
Toisen asteen termit x_P^2 ja y_P^2 häviävät yhtälöstä kokonaan, joten yhtälö kuvaa suoraa. Lisäksi voidaan todeta, että kyseinen suora on kohtisuorassa suoraa $\ell(A, B)$ vasten: Valitaan $y_A = y_B = 0$, eli A ja B sijaitsevat x-akselilla. Yhtälö saa muodon

$$\begin{aligned}
-2x_Px_A + x_A^2 - r_A^2 &= -2x_Px_B + x_B^2 - r_B^2 \\
\Rightarrow 2x_P(x_B - x_A) &= -x_A^2 + r_A^2 + x_B^2 - r_B^2 \\
\Rightarrow x_P &= \frac{-x_A^2 + r_A^2 + x_B^2 - r_B^2}{2(x_B - x_A)},
\end{aligned}$$

jossa yhtälön oikea puoli on vakiotermi, eli yhtälö kuvaa y-akselin suuntaista suoraa, mikä on x-akselin kanssa kohtisuorassa. Koska α ja β ovat erikeskiset, $(x_B - x_A) \neq 0$.

Radikaaliakseli voidaan löytää piirtämällä mikä tahansa ympyrä γ, joka leikkaa ympyrän α pisteissä K ja L sekä ympyrän β pisteissä M ja N. Suorien $\ell(K, L)$ ja $\ell(M, N)$ leikkauspiste P on radikaaliakselilla, ja tämä tiedetään pisteen potenssin takia: Ympyrästä γ tiedetään, että $PK \cdot PL = PM \cdot PN$. Koska nämä pisteet sijaitsevat myös vastaavasti ympyröillä α ja β, pisteen P potenssin arvo ympyröille α ja β on sama ja P sijaitsee ympyröiden α ja β radikaaliakselilla.

Ympyröiden α ja β radikaaliakseli on pisteestä P piirretty suora, joka on kohtisuorassa ympyröiden α ja β keskipisteiden kautta kulkevan suoran kanssa.

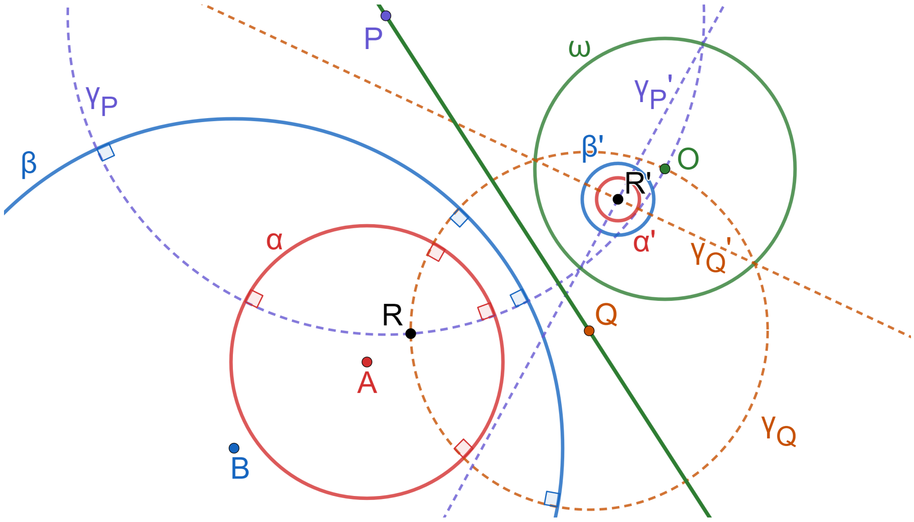


Kuva 9: Radikaaliakselin löytäminen.

Nyt kun radikaaliakseli on muodostettu, valitaan siitä kaksi eri pistettä P ja Q. Valitaan ympyrät γ_P ja γ_Q, joilla on keskipisteet P ja Q vastaavasti ja jotka leikkaavat ympyrät α ja β kohtisuorasti. Merkitään ympyröiden γ_P ja γ_Q leikkauspisteistä toinen pisteeksi O ja toinen pisteeksi R.

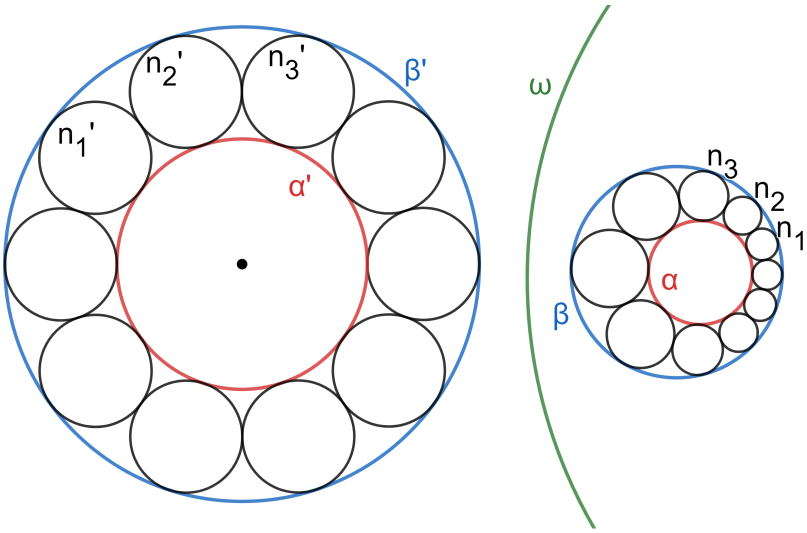
Mikä tahansa ympyrä ω jolla on keskipiste O tai R kuvaa ympyrät α ja β samankeskisiksi ympyröiksi α' ja β'.

Kuvien samankeskisyys voidaan osoittaa geometrisesti: Piirretään jokin inversioympyrä ω keskipisteellä O. Ympyrät γ_P ja γ_Q kulkevat pisteen O kautta, joten kuvat γ_P' ja γ_Q' ovat erisuuntaisia suoria. Ympyrät γ_P ja γ_Q leikkaavat pisteen O lisäksi myös pisteessä R, joten pisteen R kuva R' on suorien γ_P' ja γ_Q' leikkauspiste. Suorat γ_P' ja γ_Q' leikkaavat myös ympyröitä α' ja β' kohtisuorasti, eli molemmat suorat kulkevat kummankin ympyrän keskipisteen kautta. Ainoa piste, joka kuuluu molempiin suoriin, on niiden leikkauspiste R', joten kuvattujen ympyröiden α' ja β' keskipiste on R' eli ympyrät ovat samankeskiset.

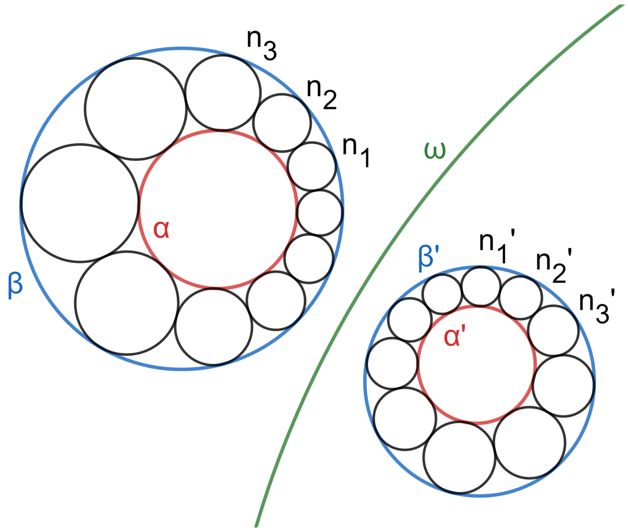


Kuva 10: Pisteiden O ja R löytäminen sekä kuvien α' ja β' muodostaminen.

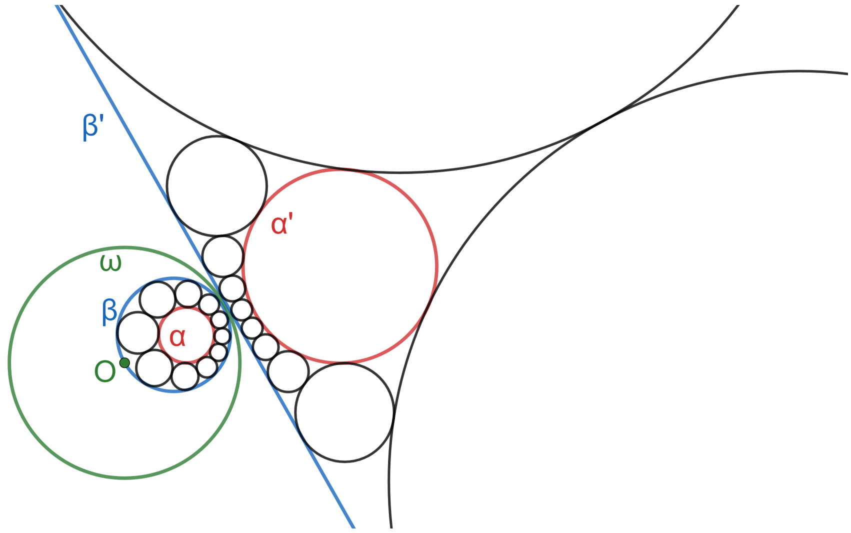
Nyt kun on osoitettu, että erikeskiset ympyrät voidaan kuvata jollakin inversiolla samankeskisiksi, todetaan että on riittävää osoittaa Steinerin ketjun ominaisuuksia samankeskisillä ympyröillä. Tiedetään, että ympyröiden ja suorien väliset sivuamiset, leikkauspisteet ja kulmat säilyvät inversiossa, joten minkä tahansa Steinerin ketjun ympyröiden kuvat säilyttävät sivuamisensa ja muodostavat näin toisen Steinerin ketjun.



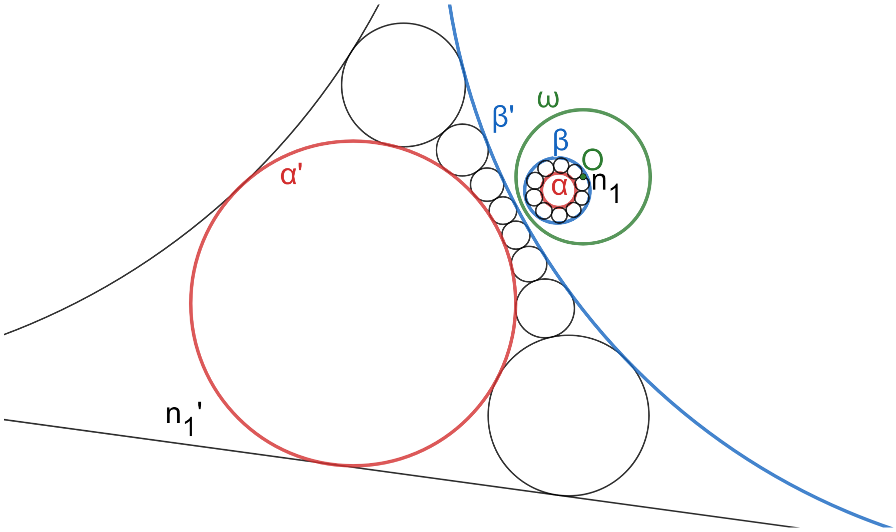
Kuva 11: Havainnollistus Steinerin ketjun inversiosta. Ympyrät α ja β ovat erikeskiset, mutta niiden kuvat α' ja β' ovat samankeskiset.



Kuva 12: Havainnollistus Steinerin ketjun inversiosta. Ympyrät α ja β sekä niiden kuvat α' ja β' ovat erikeskiset.



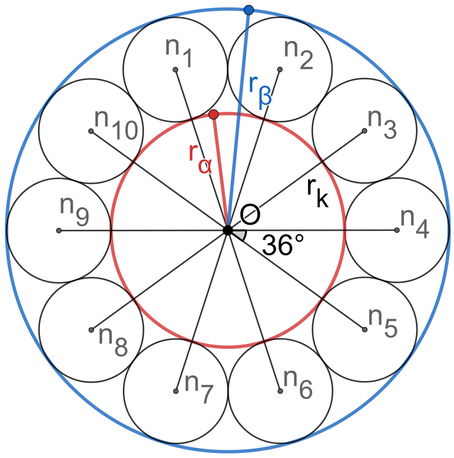
Kuva 13: Erikoistilanne, jossa inversiokeskus $O \in \beta$. Kuva β' on suora, mutta kuvien sivuamiset säilyvät. Kuvat muodostavat Steinerin ketjun inversiotasossa $\mathbb{E}_\infty$ jossa suoraa β' voidaan pitää ympyränä, jolla on ääretön säde ja keskipiste O'.



Kuva 14: Erikoistilanne, jossa inversiokeskus $O \in n_1$. Kuva n_1' on suora, mutta kuvien sivuamiset säilyvät. Kuvat muodostavat Steinerin ketjun inversiotasossa $\mathbb{E}_\infty$ jossa suoraa n_1' voidaan pitää ympyränä, jolla on ääretön säde ja keskipiste O'.

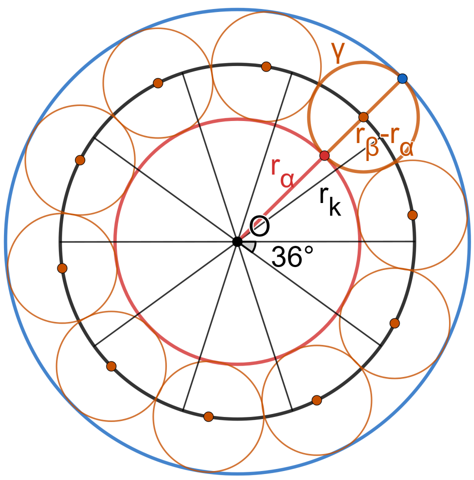
Lause 10. Steinerin porismi: *Mikäli kahdelle ympyrälle α ja β on olemassa suljettu Steinerin ketju, joka koostuu n ympyrästä, niin n ympyrän muodostamia suljettuja Steinerin ketjuja on ääretön määrä. Lisäksi jokainen ympyrä, joka sivuaa ympyröitä α ja β samalla tavalla (sisäisesti tai ulkoisesti) kuuluu tällaiseen ketjuun.*

Todistus. Olkoot α ja β samankeskiset ympyrät keskipisteellä O niin, että $r_\alpha < r_\beta$ ja niille on olemassa jokin n ympyrän muodostama suljettu Steinerin ketju. Nähdään, että ketjun ympyröiden keskipisteet ovat yhtä kaukana pisteestä O, tarkalleen ottaen etäisyydellä $r_k = r_\alpha + (r_\beta - r_\alpha)/2$. Piirretään jana pisteestä O jokaiselle ketjun ympyrän keskipisteelle. Janojen pituudet ovat kaikki r_k ja janojen väliset kulmat ovat kaikki $360°/n$. Janojen päätepisteet toimivat suljetun ketjun ympyröiden keskipisteinä niin kauan kun nämä kaksi ehtoa toteutuu, joten janojen muodostamaa kuviota voidaan "pyörittää". Havaitaan, että itse asiassa mikä tahansa piste etäisyydellä r_k pisteestä O voi toimia suljetun ketjun aloittavan ympyrän keskipisteenä, joten suljettuja ketjuja on yhtä monta kuin pisteitä ympyrän kehällä – ääretön määrä.



Kuva 15: Havainnollistus samankeskisten ympyröiden Steinerin ketjusta.

Olkoon γ jokin ympyrä, joka sivuaa ympyröitä α ja β kuten aiempi Steinerin ketjun ympyrä. Ympyrän γ halkaisijä on $r_\beta - r_\alpha$ ja keskipisteen etäisyys pisteestä O on $r_\alpha + (r_\beta - r_\alpha)/2 = r_k$, joten ympyrästä γ voidaan muodostaa jokin uusi suljettu Steinerin ketju.



Kuva 16: Uuden Steinerin ketjun muodostaminen piirtämällä ympyrä γ etäisyydelle r_k pisteestä O.

Tiedetään, että mikä tahansa Steinerin ketju erikeskisillä ympyröillä voidaan kuvata samankeskisiksi ja $I_\omega^{-1} = I_\omega$, joten mikä tahansa Steinerin ketju erikeskisillä ympyröillä voidaan saada invertoimalla jokin Steinerin ketju samankeskisillä ympyröillä. Inversiossa ympyröiden sivuamiset säilyvät, joten lause pätee myös erikeskisten ympyröiden suljetuille Steinerin ketjuille.

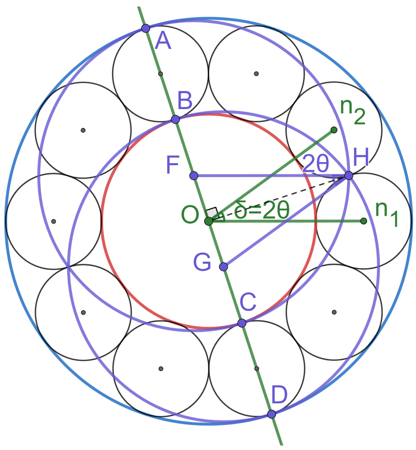
$\square$

3.2 Steinerin ketjun ominaisuuksia

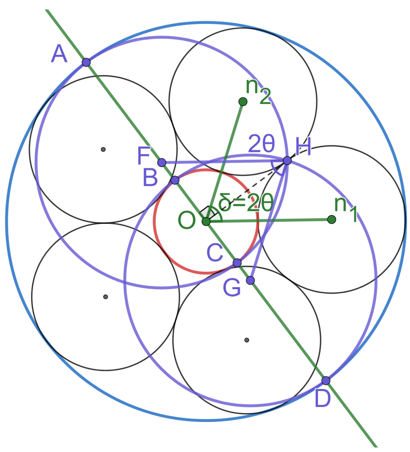
Tässä luvussa esitellään Steinerin ketjun ominaisuuksia todistuksineen.

Lause 11. *Kaksi ympyrää leikkaavat toisensa kulmassa $2\theta = 360°/n$, jos ne sivuavat suljetun Steinerin ketjun samankeskisiä ympyröitä α ja β sisäisesti ja niiden keskipisteet ovat kollineaariset pisteen O kanssa.*

Todistus. Olkoon kulma $\angle\delta = \angle n_1 O n_2 = 2\theta$, jossa n_1 ja n_2 ovat Steinerin ketjun vierekkäisten ympyröiden N_1 ja N_2 keskipisteet. Piirretään kulman $\angle\delta$ kulmanpuolittajan kanssa kohtisuorassa oleva suora pisteeseen O. Tämä suora leikkaa ympyrät α ja β neljässä pisteessä A, B, C ja D. Piirretään ympyrä γ_1, jolla on halkaisija AC ja keskipiste F sekä ympyrä γ_2, jolla on halkaisija BD ja keskipiste G niin, että nämä ympyrät sivuavat ympyröitä α ja β sisäisesti. Ympyrät γ_1 ja γ_2 leikkaavat toisensa ympyröiden N_1 ja N_2 sivuamispisteessä H. Ympyröiden γ_1 ja γ_2 säteiden muodostama kulma $\angle FHG$ on suurudeltaan 2θ.



Kuva 17: Ympyröiden γ_1 ja γ_2 muodostaminen sekä niiden välisen kulman löytäminen, kun $n = 10$.



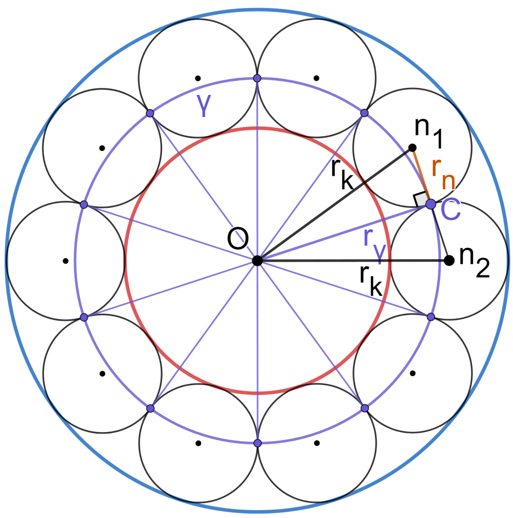
Kuva 18: Ympyröiden γ_1 ja γ_2 muodostaminen sekä niiden välisen kulman löytäminen, kun $n = 5$.

□

Lause 12. *Steinerin ketjun ympyröiden sivuamispisteet sijaitsevat ympyrällä.*

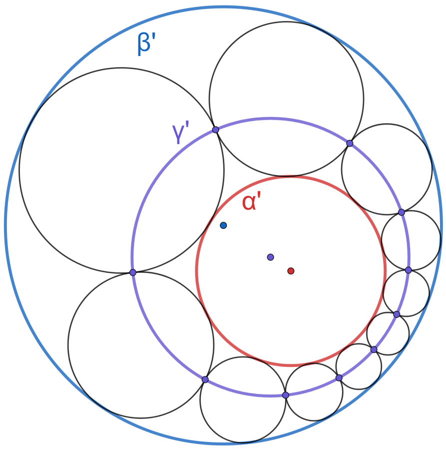
Todistus. Olkoot ympyrät α ja β samankeskiset ja niiden keskipiste O. Valitaan ketjusta kahden vierekkäisen ympyrän N_1 ja N_2 keskipisteet n_1 ja n_2. Piirretään jana n_1n_2, jonka pituus on $2r_n$ ja jonka puoliväli on ympyröiden N_1 ja N_2 sivuamispiste C. Tasakylkiselle kolmiolle $\triangle On_1n_2$ voidaan piirtää kulmanpuolittaja OC. Kulma $\angle n_1CO$ on suora, joten janan OC pituus on vakio $\sqrt{r_k^2 - r_n^2} = r_\gamma$.

Tämä voidaan todeta jokaiselle ketjun ympyröiden sivuamispisteelle, joten sivuamispisteet ovat kaikki etäisyydellä r_γ pisteestä O. Pisteet sijaitsevat siis ympyrällä γ, jolla on keskipiste O ja säde r_γ. Tämä pätee kaikille eri Steinerin ketjuille samankeskisille ympyröille α ja β.

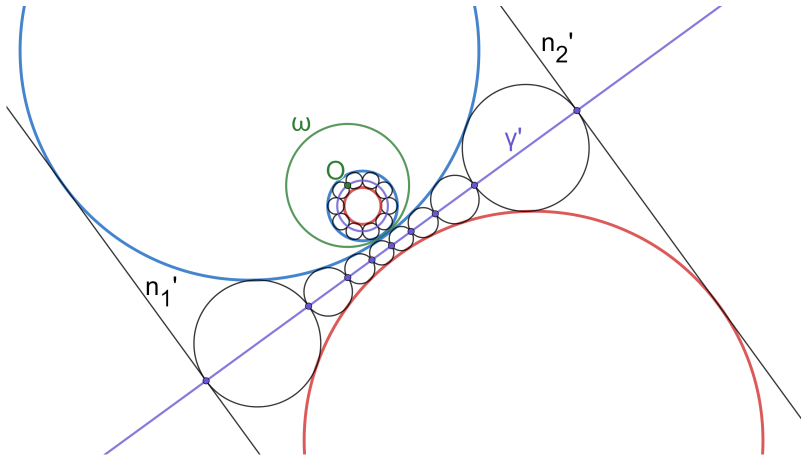


Kuva 19: Janan OC ja ympyrän γ muodostaminen.

Erikeskisille ympyröille on riittävää todeta, että samankeskisten ympyröiden ketjun ympyrä γ voidaan invertoida. Kuva γ' on ympyrä, joka kulkee ketjun ympyröiden kuvien sivuamispisteiden kautta, joten kuvatun ketjun ympyröiden sivuamispisteet sijaitsevat myös ympyrällä.



Kuva 20: Havainnollistus kuvauksesta γ' jossa kuvat α' ja β' ovat erikeskiset ympyrät.



Kuva 21: Erikoistilanne, jossa inversiokeskus O on ympyröiden n_1 ja n_2 sivuamispiste. Inversiotasossa $\mathbb{E}_\infty$ kuvat n_1' ja n_2' pidetään ympyröinä, jotka sivuavat toisensa ideaalipisteessä O' ja kuvaa γ' pidetään ympyränä, joka leikkaa kuvat n_1' ja n_2' näkyvien leikkauspisteiden lisäksi myös ideaalipisteessä O'.

□

Viitteet

[1] Harju, Tero. Geometria. 2016.

[2] Coxeter, Harold Scott MacDonald. Introduction to Geometry, 2nd edition. 1969.

[3] Pamfilos, Paris. Inversion.

[4] Mittal, Adi. Steiner's Porism and Incredible Inversions.

[5] Bogomolny, Alexander. https://www.cut-the-knot.org/