

Symplektisen integroinnin soveltaminen satelliittien
suhteellisten ratojen laskemiseen

Pro gradu -tutkielma
Turun yliopisto
Fysiikan laitos
Tähtitiede
2009
Fil. yo. Pauli Pihajoki
Tarkastajat:
Dos. Seppo Mikkola
Dos. Juha-Pekka Pellonpää

TURUN YLIOPISTO
Fysiikan ja tähtitieteen laitos

PIHAJOKI, PAULI Symplektisen integroinnin soveltaminen satelliittien suhteellisten ratojen laskemiseen

Pro gradu, 67 s., 24 liites.
Tähtitiede
Elokuu 2009

Maapalloa kiertävien satelliittien liikkeet toistensa suhteen eli satelliittien suhteelliset radat ovat keskeisessä asemassa satelliittimuodostelmien kannalta. Suhteellisten ratojen ratkaiseminen maapallon potentiaalikentässä on haastava ongelma, johon on kehitetty useita eri lähestymistapoja alkaen Hillin tekemästä matemaattisesta pohjatyöstä vuonna 1878.

Eri lähestymistavat voidaan jakaa analyyttisiin ja numeerisiin menetelmiin. Analyyttisissä menetelmissä suhteellisen liikkeen liikeyhtälöt ratkaistaan approksimaatioiden avulla ja saadusta ratkaisusta voidaan suoraan lukea suhteellisen radan kehitys jonkin sopivan ajanluonteisen parametrin funktiona. Numeerisissa menetelmissä ratkaistaan liikeyhtälöt numeerisesti eli sovelletaan ratojen numeerista integrointia.

Eräs moderni numeerinen menetelmä on soveltaa symplektisiä integrointimenetelmiä suhteellisen radan ratkaisemiseen. Tämän työn ensimmäisessä osassa kehitetään symplektisten integrointimenetelmien tarvitsema matemaattinen teoria lähtien differentiaali geometrian alkeista. Teorian soveltuksena saadaan Zassenhausin kaavan avulla johdettua symplektisten leapfrog-menetelmien lähtökohta.

Työn toisessa osassa keskitytään suhteellisten satelliittiratojen ongelmaan. Ensin käsitellään yksittäisen satelliitin liikettä ja suhteellisten ratojen esittämisessä käytetyt koordinaatistot. Sen jälkeen esitellään analyyttiset Hillin–Clohessyn–Wiltshiren, Tschaunerin–Hempelin ja Halsallin–Palmerin suhteelliset ratalaskumenetelmät.

Numeerisista menetelmistä tutkitaan S. Mikkolan kehittämää logaritmisen Hamiltonin funktion menetelmää. Työssä kehitetään algoritmi menetelmän soveltamiseen suhteellisiin ratalaskuihin.

Kehitettyä menetelmää verrataan analyyttisiin menetelmiin ja tarkkaan ellipsiratojen erotukseen saatuun suhteelliseen rataan. Vertailun tuloksena havaitaan logaritmisen Hamiltonin funktion menetelmä kehityskelpoiseksi ja huomattavasti analyyttisiä menetelmiä tarkemmaksi.

Asiasanat: satelliitit, taivaanmekaniikka, differentiaali geometria, numeeriset menetelmät.

Sisältö

Johdanto	1
I Symplektinen integrointi	4
1 Perusteet	5
1.1 Liiketyöiden numeerinen integrointi	5
2 Teoreettinen pohja	8
2.1 Hamiltonin mekaniikka	8
2.1.1 Symplektinen monisto ja symplektinen muoto	8
2.1.2 Hamiltonin vektorikenttä	12
2.1.3 Poissonin sulut	12
2.1.4 Laajennus tila-avaruuteen	13
2.1.5 Aikamuunnokset	17
2.2 Kanoniset muunnokset	18
2.2.1 Infinitesimaaliset muunnokset	19
2.3 Lie-ryhmien teoria	21
2.3.1 Lie-derivaatta	21
2.3.2 Lien muunnosryhmät	22
2.3.3 Eksponenttikuvaus	23
2.4 Yleisen faasiavaruuden sovellukset	23
2.4.1 Hamiltonin vektorikenttien Lien algebrat	24
2.4.2 Siirtojen yhdistäminen	25
3 Symplektiset integrointimenetelmät	27
3.1 Hamiltonin funktio	27
3.1.1 Logaritminen Hamiltonin funktio	28
3.2 Leapfrog	29
3.3 Kepler-liike	30
II Satelliittien suhteelliset radat	32
4 Satelliittiradat	33
4.1 Tasaisen Kepler-liikkeen perturbaatiot	33

4.1.1	Gravitaatiopotentiaali	33
4.1.2	Muut taivaankappaleet	34
4.1.3	Ilmakehän kitka	35
4.1.4	Auringon säteilypainne	35
4.2	Koordinaatistovalinnat	36
4.2.1	ECI-koordinaatisto	36
4.2.2	LVLH-koordinaatisto	36
5	Analyttiset menetelmät	37
5.1	Hillin-Clohessyn-Wiltshiren menetelmä	37
5.2	Tschaunerin–Hempelien menetelmä	39
5.3	Halsallin–Palmerin menetelmä	41
6	Numeeriset menetelmät	45
6.1	Logaritminen Hamiltonin funktio	45
6.2	Suhteellisen radan ratkaiseminen	47
7	Menetelmien vertailua	51
7.1	Alkuarvojen valinta	51
7.1.1	Ratakorkeuden valinta	51
7.1.2	Simulaation kesto	52
7.1.3	J_2 -termin vaikutukset	52
7.1.4	Seuraaajasatelliitin suhteellinen paikka	53
7.1.5	Lopulliset alkuarvot	53
7.2	Ohjelmakoodi	54
7.3	Tulokset	54
7.3.1	Vertailu ilman J_2 -vaikutusta	54
7.3.2	Vertailu J_2 -vaikutuksen kanssa	55
8	Johtopäätökset	64
8.1	Teorian kehittäminen	64
8.2	Menetelmien vertailu	64
8.3	Jatkokehitys	65
	Viitteet	66
A	Vakiot ja yksikköjärjestelmät	68
A.1	Vakiot	68
A.2	Geosentriset yksiköt	68

B	Taivaanmekaniikkaa	70
B.1	Liike keskeisvoimakentässä	70
B.2	Newtonin painovoimalaki	71
B.2.1	Keplerin lait	72
B.3	Keplerin yhtälö	73
B.4	Rataelementit	74
B.4.1	Klassiset rataelementit	74
B.4.2	Kanoniset elementit	74
B.5	Episykliesitys	75
B.6	Maapallon potentiaali	75
C	Koodilistaukset	77
C.1	E2f.m	77
C.2	M2E.m	77
C.3	a2body.m	77
C.4	docalcs.m	78
C.5	eci2lvlh.m	81
C.6	epi2oe.m	81
C.7	f2E.m	81
C.8	hcw.m	82
C.9	hp.m	82
C.10	loghlf.m	83
C.11	lvlh2eci.m	86
C.12	oe2epi.m	86
C.13	oe2rv.m	87
C.14	rv2oe.m	87
C.15	solvekep.m	88
C.16	t2E.m	88
C.17	t2f.m	88
C.18	th.m	89

Johdanto

Massiivisen keskuskappaleen gravitaatiopotentiaalissa kiertävien satelliittien suhteellisten ratojen dynamiikka on laaja-alainen ja kiinnostava astrodynamiikan ongelma. Mahdollisimman yleisillä lähtöoletuksilla tehtävä on matemaattisesti erittäin monimutkainen.

Suhteellisia ratoja laskettaessa verrataan yhden tai useamman seuraajasatelliitin paikkaa suhteessa pääsatelliitin tai toistensa paikkaan. Tässä pääsatelliitin paikka voi olla myös vain jokin sopivalla tavalla liikkuva tarkastelupiste, sillä suhteellisten ratojen dynamiikassa on lopulta kysymys varsinaisten satelliittien paikkavektoreiden erotusvektorin käytöksestä ajan funktiona.

Teoriassa voitaisiin laskea tunnettuja menetelmiä käyttäen satelliittien radat erikseen, ja muodostaa suhteelliset radat näiden ratojen erotuksista. Satelliittien keskinäiset välimatkat ovat kuitenkin useimmiten hyvin pieniä verrattuna etäisyyteen keskuskappaleen keskispisteestä. Siten suhteellisten ratojen laskeminen tällä tavoin altistaa numeerisille virheille, ja vaatii yleensä enemmän laskentatehoa kuin suhteelliset ratalaskumenetelmät [1]. Toisaalta satelliittimuodostelmat parametrisoidaan juuri suhteellisten paikkojen avulla, ja muodostelman elinaikana juuri satelliittien suhteelliset paikat ovat yleensä tärkempiä kuin sijannit maapallon suhteen [1].

On siis perusteltua mallintaa satelliittien suhteellista liikettä nimenomaan yhden satelliitin liikkeenä jonkin toisen satelliitin suhteen. Erilaisia menetelmiä ongelman ratkaisuksi on kehitelty lukuisia. On paikallaan käydä läpi muutamia keskeisiä menetelmiä, ja aiheeseen liittyvää historiaa yleensä.

Eräs lähestymistapa on suhteellisen liikkeen liikeyhtälöiden muodostaminen ja sopivien approksimaatioiden teko. Näin pyritään muodostamaan suhteelliselle liikkeelle sellaiset liikeyhtälöt, jotka pystytään ratkaisemaan suljetussa muodossa. Nämä *analyttiset menetelmät* saivat alkunsa G. Hillin vuonna 1878 julkaistussa artikkelissa [2], jossa Hill tutki Kuun liikettä suhteellisenä liikkeenä Maahan nähden kummankin taivaankappaleen kiertäessä samalla Auringon ympäri.

Varsinaisten keinotekoisien satelliittien suhteellisen liikkeen tutkiminen analyttisten menetelmien avulla alkoi käytännössä vasta 1960. Tällöin julkaistiin W. Clohessyn ja R. Wiltshiren artikkeli [3], jossa käytettiin Hillin esittelemää pääsatelliitin mukana pyörivää koordinaatistoa. Artikkelin tarkoituksena oli tutkia satelliittien muodostelmalennon ja telakoimisen problematiikkaa, ja artikkeli on tästä johtuen varsin insinööriteollinen. Artikkelissa esitelty menetelmä tunnetaan nykyään joko Hillin, Clohessyn–Wiltshiren tai jopa Hillin–Clohessyn–Wiltshiren yhtälöinä tai menetelmänä. Tässä työssä käytetään viimeisintä nimitystä ja käytännöllistä lyhennysmerkintää

HCW-menetelmä.

HCW-menetelmän rajoituksena on kuitenkin oletus siitä, että pääsatelliitti kiertää ympyräradalla. Kuten tässäkin työssä havaitaan, johtaa HCW-menetelmän käyttäminen eksentrisillä pääsatelliitin radoilla nopeasti hyvin virheelliseen tulokseen. Toisaalta monissa käytännön sovelluksissa, kuten esimerkiksi venäläisten Molniya-kommunikaatiosatelliittien tapauksessa [4], satelliitit kiertävät suuresti eksentrisillä radoilla.

Eksentrisille radoille soveltuvan HCW-yhtälöiden yleistyksen kehityksen aloittivat lentokonevalmistaja Junkersilla työskennelleet J. Tschauner ja P. Hempel vuonna 1965 julkaistussa artikkelissaan [5]. Sopivilla koordinaattien skaalauksilla ja käyttämällä vapaana muuttujana todellista anomaliaa ajan sijaan, he onnistuivat johtamaan HCW-liikkeyhtälöitä vastaavat liikkeyhtälöt mielivaltaiselle eksentrisyyden arvolle. Nämä yhtälöt on sittemmin saatu ratkaistua analyttisesti, ja näin saatua suhteellisen ratalaskun menetelmää nimitetään Tschaunerin-Hempelin menetelmäksi tai lyhyemmin TH-menetelmäksi. TH-liikkeyhtälöt ja niiden ratkaisut esitellään kappaleessa 5.

Sittemmin on kehitelty lukuisia erilaisia HCW- ja TH-yhtälöiden muunnelmia, joihin on esimerkiksi sisällytetty erilaisia häiriötermejä. Toisaalta on myös kehitetty kokonaan uusia lähestymistapoja satelliittimuodostelmien käsittelyyn. M. Halsall ja P. Palmer esittivät vuonna 2007 julkaistussa artikkelissaan [6] satelliittimuodostelman liikkeen jakamisen pääsatelliittia vastaavan tarkastelupisteen liikkeeseen, koko muodostelman liikkeeseen tarkastelupisteen suhteen ja yksittäisten satelliittien suhteelliseen liikkeeseen muodostelman sisällä. Lisäksi he sovelsivat käyräviivaista koordinaatistoa, jolla vältettiin HCW- ja TH-menetelmille ominainen linearisointivirhe. Tuloksena on varsin tarkka mutta monimutkainen moderni analyttinen suhteellinen ratalaskumenetelmä.

Analyttisten menetelmien etuna yleensä on mahdollisuus tarkastella ratkaisun matemaattisen muodon eli eksplisiittisten yhtälöiden avulla suhteellisen liikkeen rakennetta ja käytöstä ajan funktiona. Näitä menetelmiä voidaan täten käyttää hyvin suhteellisen liikkeen suunnitteluun ja kontrollointiin esimerkiksi kohtaamistilanteissa tai satelliittimuodostelmien geometriaa suunniteltaessa. Analyttisten menetelmien haittapuolena on kuitenkin verrattain huono tarkkuus ja suuri matemaattinen monimutkaisuus yksinkertaisillakin potentiaalimalleilla [1].

Toinen vaihtoehto on laskea suhteellista rataa käyttäen numeerisia integrointimenetelmiä eli liikkeyhtälöiden numeerista ratkaisua. Tällaisista menetelmistä käytetään työssä nimitystä *numeeriset menetelmät*. Erityisesti tarkastellaan niin sanottuja symplektisiä integrointimenetelmiä, jotka pohjaavat vahvasti klassisen mekaniikan differentiaaligeometriseen esitykseen, ja niiden soveltamista suhteellisten ratojen laskemiseen.

Newton pohjusti klassisen mekaniikan vuonna 1686 julkaistussa teoksessaan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [7]. Klassista mekaniikkaa käsiteltiin vuosisatoja soveltaen differentiaali- ja integraalilaskennan perustuloksia ja avaruuden \mathbb{R}^n ominaisuuksia. Differentiaaligeometrian 1800-luvun lopulla alkanut kehitys kuitenkin mahdollisti klassisen mekaniikan muotoilemisen differentiaaligeometrian avulla. Tällöin keskeiseksi käsitteeksi nousee juuri symplektisyys, sillä klassisen mekaniikan faasiavaruudella on luonnollinen symplektisen moniston rakenne [8].

Symplektisten integrointimenetelmien kehityksen alkuvaiheita oli Wisdomin vuonna 1982 käytämä kuvausmenetelmä (engl. mapping method) [9]. Tätä seurasi vuonna 1991 julkaisu [10], jos-

sa esiteltiin symplektiset kuvaukset (engl. symplectic maps). Symplektisten integrointimenetelmien havaittiin soveltuvan erityisesti pitkien aikavälien laskuihin. Menetelmien kehittyminen jatkui vilkkaana ja johti esimerkiksi S. Mikkolan artikkelissa [11] esiteltyyn laajennettuun faasiavaruuteen ja aikamuunnoksiin sekä logaritmisien Hamiltonin funktion teoriaan [12, 13].

Symplektisten integrointimenetelmien soveltaminen suhteellisten satelliittiratojen laskemiseen on kuitenkin verraten uusi ala. E. Imren väitöskirjan [1] julkaisemisen aikaan vuonna 2006 tällaisia oli vain Mikkolan artikkeliin [14] perustuva julkaisematon menetelmä.

Lisäksi on huomattava, että vaikka symplektiset integrointimenetelmät nojaavat olennaisesti differentiaaligeometriaan ja Lien ryhmien teoriaan, ei alan artikkeleissa ja muissa julkaisuissa tämä matemaattinen yhteys ole kuitenkaan yleensä esillä. Yhteys varsinaiseen matemaattiseen rakenteeseen on enimmäkseen juuri nimitysten muodossa kuten juuri termissä *symplektiset* integrointimenetelmät.

Edeltävän nojalla tässä työssä tarkastellaan erityisesti symplektisten integrointimenetelmien pohjana toimivaa matemaattista rakennetta. Lisäksi tarkastellaan symplektisten integrointimenetelmien soveltamista suhteellisiin ratalaskuihin, ja verrataan tuloksia analyttisiin menetelmiin.

Työn alussa kehitellään symplektisiin integrointimenetelmiin vaadittava matemaattinen teoria lähtien peruskäsitteistä. Teorian kehittäminen etenee johdonmukaisesti kohti implementointivalmiita algoritmeja. Seuraavaksi esitellään klassinen satelliittiliikkeen teoria. Erityistä huomiota kiinnitetään maapallon läheisyydessä kiertävän satelliitin liikkeen mallintamisen käytännön ongelmiin ja virhelähteisiin. Yksittäisen satelliitin radan teorian lisäksi esitellään suhteellisissa ratalaskuissa tarvittavat käsitteet.

Teorian kehittelyn jälkeen esitellään erilaisia suhteellisiä ratalaskumenetelmiä. Aikaisemmin mainittujen analyttisten menetelmien lisäksi työn huipennuksena esitellään uusi Mikkolan et al. esittelemään logaritmisien Hamiltonin menetelmään [12] perustuva suhteellinen ratalaskumenetelmä. Lopuksi menetelmät toteutetaan ohjelmakoodina ja niiden antamia numeerisia tuloksia verrataan keskenään. Näin todetaan työssä kehitetty menetelmä kehityskelpoiseksi.

Osa I

Symplektinen integrointi

1 Perusteet

1.1 Liikkeyhtälöiden numeerinen integrointi

Fysikaalisen systeemin käyttäytymistä voidaan kuvata *liikkeyhtälöllä*. Liikkeyhtälöt ovat yleensä differentiaaliyhtälöitä (DY) tai osittaisdifferentiaaliyhtälöitä (ODY). Erityisesti tavallisten differentiaaliyhtälöiden numeerisesta ratkaisemisesta käytetään nimitystä *numeerinen integrointi*. Yleisesti tällaiset differentiaaliyhtälöt ovat muotoa

$$F(t, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \dots, \mathbf{y}^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

missä F on jokin reaaliarvoinen funktio, $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ on vektoriarvoinen funktio, joka kuvaa systeemin tilaa ajan t funktiona, ja $\mathbf{y}^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ funktion \mathbf{y} n :s tavallinen (Frechet'n) derivaatta.

Lisäksi tarvitaan systeemin alkutila hetkellä t_0 muodossa

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}'(t_0) = \mathbf{y}'_0, \quad \mathbf{y}''(t_0) = \mathbf{y}''_0, \quad \dots, \quad \mathbf{y}^{(n)}(t_0) = \mathbf{y}_0^{(n)}. \quad (1.2)$$

Nyt F ja alkutila muodostavat yhdessä *alkuarvottehtävän*.

Käsiteltävä differentiaaliyhtälö on n :ttä astetta, mutta määrittelemällä $\mathbf{y}_n = \mathbf{y}^{(n-1)}$ se voidaan muuntaa näiden uusien muuttujien suhteen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiksi, joita saadaan yhteensä n kappaletta.

Mikäli nyt nämä ensimmäisen kertaluvun alkuarvottehtävät toteuttavat Picardin–Lindelöfin-teoreeman ehdot, on niillä olemassa yksikäsitteiset ratkaisut [15]. Tässä työssä tarkasteltavat funktiot ovat sileitä (eli niillä on kaikkien kertalukujen derivaatat olemassa), ja siten ne toteuttavat mainitut ehdot. Jatkossa ei siten tarvitse eksplisiittisesti tarkastella ratkaisujen olemassaoloa tai yksikäsitteisyyttä.

Perinteiset ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y' = f(t, y)$ numeeriset ratkaisumenetelmät perustuvat ratkaistavan yhtälön approksimointiin differenssiyhtälöllä [16]. Tämä differenssiyhtälö saadaan joko käyttämällä funktion y Taylorin sarjaa (Taylorin menetelmät), funktion f Taylorin sarjaa (Runge–Kutta-menetelmät) tai integraalin $\int f(t, y(t))$ interpolaatiopolynomia (useamman askeleen menetelmät) [16].

Mikäli differenssiyhtälöllä approksimoidaan differentiaaliyhtälöä ajassa tasavälisesti voidaan kirjoittaa $t_i = t_0 + i \cdot h$, missä t_i on i :s tarkasteluhetki, ja h *aika-askel*. Sanotaan, että käytet-

ty differenssiyhtälö suppenee mikäli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |w_i - y(t_i)| = 0, \quad (1.3)$$

missä N on aika-askelten määrä ja w_i on differenssiyhtälöstä saatu approksimaatio $y(t_i)$:lle [16]. Lisäksi suppenemisen tahdille käytetään merkintää $\mathcal{O}(h^n)$, joka määritellään yhtälöllä

$$w_i = y(t_i) + \mathcal{O}(h^n) \Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq N} |w_i - y(t_i)| \leq Kh^n, \quad (1.4)$$

missä K on jokin vakio [16].

Hyvin määritellylle ongelmalle saadaan siis periaatteessa ratkaisu, jonka virheelle saadaan käytetystä ratkaisumenetelmästä riippuva raja $\mathcal{O}(h^n)$. Tietokoneella tehtävissä käytännön laskuissa aika-askelta h ei voida kuitenkaan pienentää loputtomiin kahdesta syystä: Mikäli h on tarpeeksi pieni, ovat rajallisesta numeerisesta tarkkuudesta johtuvat pyöristysvirheet samaa kertaluokkaa käytetyn menetelmän virheen kanssa. Toisaalta aika-askelta pienennettäessä kasvaa tarvittavien laskutoimitusten määrä, kun ratkaistavan aikavälin pituutta pidetään vakiona. Tällöin käytössä olevasta laskentatehosta riippuen laskutoimituksen vaatima aika saattaa osoittautua liian pitkäksi.

Fysikaalisten liikeyhtälöiden tapauksessa on huomattava, että virheraja $\mathcal{O}(h^n)$ on virhe juuri aika-askelen suhteen. Jos aika-askelta pidetään vakiona, mutta kasvatetaan integroitavaa aikaväliä (t_0, t_1) , on virheraja ajan suhteen esimerkiksi tarkkuuden $\mathcal{O}(h^2)$ Eulerin menetelmälle muotoa

$$|w_i - y(t_i)| \leq Kh[e^{L(t_1-t_0)} - 1], \quad (1.5)$$

missä K ja L ovat vakioita [16]. Virhe ajan suhteen voi täten pahimmillaan olla monotonista. Lisäksi perinteiset differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmät eivät huomioi millään tavalla systeemin fysikaalisia erityispiirteitä kuten esimerkiksi mahdollisia liikevakioita. Tällöin numeerisesta approksimaatiosta lasketut liikevakiot eivät pysy vakiona. Erityisesti systeemin energian virhe voi kasvaa monotonisestikin.

Esimerkki 1.1.1. Käytännön esimerkkinä tavanomaisten menetelmien virheestä voidaan käyttää alkeismekaanista tapausta kappaleesta homogeenisessä gravitaatiokentässä. Oletetaan, että kentän voimakkuus (eli putoamiskiihtyvyyden) on g , kappaleen massa $m = 1$ ja että kappale lähtee levosta origosta. Tällöin systeemin liikeyhtälö on

$$\ddot{x} = g, \quad x(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad (1.6)$$

missä nyt x -akseli on valittu gravitaatiokentän suuntaiseksi.

Toista astetta oleva liikeyhtälö voidaan muuntaa kahdeksi ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöksi ottamalla käyttöön uudet muuttujat x ja v siten että

$$\dot{v} = g \quad v(0) = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{x} = v \quad x(0) = 0. \quad (1.8)$$

Tätä differentiaaliyhtälöä approksimoiva differenssiyhtälö voidaan nyt muodostaa yksinkertaisimmin esimerkiksi Eulerin menetelmällä [16]. Tuloksena saadaan

$$v_{i+i} = v_i + hg \qquad v_0 = 0 \qquad (1.9)$$

$$x_{i+1} = x_i + hv_i \qquad x_0 = 0, \qquad (1.10)$$

missä h on aika-askel, ja x_i vastaa jatkuvan suureen arvoa $x(ih)$.

Tälle esimerkkitapaukselle saadaan differenssiyhtälölle helposti analyttinen ratkaisu

$$v_n = nhg \qquad (1.11)$$

$$x_n = h \sum_{i=0}^{n-1} ihg = h^2g \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}h^2gn(n-1). \qquad (1.12)$$

Tästä saadaan differenssiyhtälöstä lasketuksi systeemin kokonaisenergiaksi

$$E_n = \frac{1}{2}v_n^2 - gx_n = \frac{1}{2}n^2h^2g^2 - \frac{1}{2}h^2g^2n(n-1) = \frac{1}{2}nh^2g^2, \qquad (1.13)$$

joka ei ole vakio. Oikea arvo on

$$E(t) = E(0) = 0. \qquad (1.14)$$

Tämä esimerkkitapaus osoittaa, että numeerisissa laskuissa voi numeerisen epätarkkuuden lisäksi esiintyä myös puhtaasti menetelmästä johtuvaa virhettä.

Käyttämällä hyväksi systeemin Hamiltonin funktion ja kanonisten muunnosten ominaisuuksia voidaan kuitenkin konstruoida sellaisia numeerisia integrointimenetelmiä, joissa systeemin liikevaikoiden ja erityisesti energian virheen käyttäytyminen on luonteeltaan monotonisen sijasta oskilloivaa eli *sekulaarista virhettä* ei esiinny. Tämä lähestymistapa johtaa *symplektisen integroinnin* käsitteeseen.

2 Teoreettinen pohja

2.1 Hamiltonin mekaniikka

Tässä kappaleessa sovelletaan monistojen teoriaa klassisen Hamiltonin mekaniikan esittämiseen. Esityksen pitämiseksi suppeana ja vapaana liiallisen pitkistä matemaattisista sivujuonteista tehdään joitain koko kappaletta 2.1 koskevia oletuksia. Ensimmäkin oletetaan, että kaikki käsiteltävät monistot ovat Hausdorffin monistoja eli kaikille moniston eri pisteille löytyy *erilliset* ympäristöt. Lisäksi oletetaan, että monistot ovat *sileitä*.¹ Samoin oletetaan, että kaikki käsiteltävät kuvaukset ovat sileitä. Lisäksi oletetaan kaikkien tarvittavien Jacobin matriisien determinanttien olevan nolosta poikkeavia.

Seuraavissa kappaleissa käytettävä differentiaaligeometrian esitystapa nojaa vahvasti Juha-Pekka Pellonpään luentomonisteessa ”Teoreettinen Mekaniikka” ja Kari Ylisen luentomonisteessa ”Differentiaaligeometria” sovellettuun matemaattiseen formalismiin. Enin osa materiaalista on käsitelty luentomonisteita vastaavilla kursseilla ja oletetaan ennalta käsin tutuksi, joten seuraavassa esitetään vain myöhemmin tarvittavia pääkohtia.

2.1.1 Symplektinen monisto ja symplektinen muoto

Symplektisten integrointimenetelmien johtamisessa voidaan lähteä Hamiltonin mekaniikan differentiaaligeometrisesta tarkastelusta. Kun fysikaalisen systeemin dimensio on n , pidetään faasiavaruutena $2n$ -ulotteista monistoa S , jolla on määritelty *symplektinen muoto* $\Omega \in \mathcal{T}_2^0(S)$ (eli asteen $(0,2)$ tensorikenttä).² Tällaista monistoa S kutsutaan *symplektiseksi monistoksi* ja merkitään (S, Ω) tai vain S , kun Ω ymmärretään implisiittisesti. Faasiavaruutta tulkittuna näin kutsutaan *yleiseksi faasiavaruudeksi*.

¹ Monisto M on sileä mikäli kaikki sen karttojen $\phi_i : M \supset U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ määrittelemät funktiot

$$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_i \cap U_j)} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

ovat sileitä eli C^∞ -kuvauksia.

² Merkintä $\mathcal{T}_n^m(S)$ tarkoittaa S :llä määriteltyjen (sileiden) asteen (m, n) tensorikenttien joukkoa. Joukon alkio on kuvaus $S \rightarrow T_n^m S = \{(s, T) | s \in S, T \in T_n^m S_s\}$, missä $T_n^m S_s$ on tyypin (m, n) tensorien muodostama tensoriavaruus moniston pisteessä $s \in S$. Joukkoa $T_n^m S$ kutsutaan *tensorikimpuksi*, ja voidaan osoittaa, että sillä on moniston rakenne. Joskus merkitään $\mathcal{T}_0^1(S) = T(S) = TS$.

Lokaalisti yleistetyn faasiavaruuden S jokaisen pisteen $m \in S$ ympäristössä $U \ni m$ on olemassa *kanoninen kartta* $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, jonka avulla esitettyinä

$$\Omega = \sum_{i=1}^n d\xi^{i+n} \wedge d\xi^i = \sum_{i=1}^n (d\xi^{i+n} \otimes d\xi^i - d\xi^i \otimes d\xi^{i+n}), \quad (2.1)$$

missä $d\xi^i$ on funktion $\xi^i \equiv \text{pr}^i \circ \xi : U \rightarrow \mathbb{R}$ *ulkoinen derivaatta*, \wedge *kiilatulotulo* ja \otimes *tensoritulotulo*. Funktioita $\xi^i = \text{pr}^i \circ \xi$ kutsutaan *koordinaattifunktioiksi* ja karttaa ξ nimitetään *kanoniseksi* tai *Hamiltonin kartaksi*. Ehto moniston symplektisyydelle on itseasiassa kartan ξ olemassaolo joka pisteen ympäristössä siten, että yhtälö (2.1) pätee. Yhtälö (2.1) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \Omega_{ij} d\xi^i \otimes d\xi^j, \quad (2.2)$$

missä Ω on $2n \times 2n$ -matriisi

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Jos merkitään

$$\xi^i = q^i \quad \text{ja} \quad \xi^{i+n} = p^i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

saadaan

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i. \quad (2.5)$$

On siis mahdollista samaistaa n -ulotteisen moniston M kotangenttikimppu TM^* yleisen faasiavaruuden kanssa.³ Näin voidaan perustellusti kutsua koordinaattifunktioita q^i *yleistetyiksi koordinaateiksi* ja koordinaattifunktioita p^i *yleistetyiksi liikemääriksi*. Yhdessä näistä käytetään nimitystä *kanoniset koordinaatit*. On kuitenkin olemassa sellaisia symplektisiä monistoja, kuten pallon S^2 pinta, jotka eivät ole minkään moniston kotangenttikimppuja, joten käsittely symplektisen moniston (S, Ω) avulla on yleisempi.

Nyt Ω määrittelee bilineaarikuvauksen $\Omega : \mathcal{T}_0^1(S) \times \mathcal{T}_0^1(S) \rightarrow C^\infty(S)$, mutta tällainen kuvaus voidaan tulkita myös lineaarikuvaukseksi

$$\mathcal{T}_0^1(S) \ni v \mapsto \Omega(v, \cdot) \in \mathcal{T}_1^0(S). \quad (2.6)$$

³ Tällöin jokaisen pisteen $m \in TM^*$ ympäristössä U määritelty kanoninen kartta on muotoa

$$(m, \sum_{i=1}^n p_i dq^i|_m) \mapsto (q^1(m), \dots, q^n(m), p_1, \dots, p_n).$$

Analogisesti yleisen faasiavaruuden tapauksen kanssa, symplektinen muoto on tässä kartassa lokaalisti $\Omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. Näin saadaan monisto (TM^*, Ω) , jota voidaan käsitellä tavallisena symplektisenä monistona.

Tämän tulkinnan avulla mielivaltaiselle kanonisessa kartassa esitetyle vektorikentälle

$$X : S \rightarrow T(S), \quad X = \sum_{i=1}^n \left(V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right), \quad (2.7)$$

missä V^i ja F^i ovat kuvauksia $S \rightarrow \mathbb{R}$, saadaan

$$\begin{aligned} \Omega(X) &= \sum_{i=1}^n (dp^i \otimes dq^i - dq^i \otimes dp^i) \left(\sum_{i=1}^n \left(V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (F^i dq^i - V^i dp^i). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Symplektisestä muodosta johdetulle lineaarikuvaukselle saadaan myös luonnollisella tavalla käänteiskuvaus $\Omega^{-1} : \mathcal{T}_1^0(S) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(S)$, joka mielivaltaiselle 1-muodolle $\sum_{i=1}^n (f^i dq^i + v^i dp^i)$ on vastavasti

$$\Omega^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (f^i dq^i + v^i dp^i) \right) = \sum_{i=1}^n \left(-v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + f^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right). \quad (2.9)$$

Määritelmän mukaan moniston S vektorikentän $X : S \rightarrow T(S)$ integraalikäyrä $\lambda : \mathbb{R} \supset I \rightarrow S$ toteuttaa yhtälön

$$\lambda' = X \circ \lambda, \quad (2.10)$$

missä λ' on nosto tai prolongaatio (engl. *lift*, *prolongation*) eli kuvaus $I \rightarrow T(S)$

$$\lambda'(u) = \left(\lambda(u), \frac{d\lambda(u)}{du} \right), \quad \frac{d\lambda(u)}{du} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{d\lambda^i(u)}{du} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Big|_{\lambda(u)}. \quad (2.11)$$

Nosto vastaa periaatteessa sileän kuvauksen derivaattaa. Vektorikentän integraalikäyrää voidaan ajatella sinä käyränä, jonka derivaatta (nosto) jokaisessa käyrän pisteessä on vektorikentän arvo samassa pisteessä. Yhtälö (2.10) kuvaa juuri tätä. Integraalikäyrää λ kutsutaan myös systeemin *liikkeeksi*.

Kanonisessa kartassa esitettynä $\lambda(u)$ voidaan esittää muodossa

$$\lambda(u) \mapsto (q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)), \quad u \in I, \quad (2.12)$$

missä merkitään lyhyesti $q^i(u) = q^i(\lambda(u))$ ja $p^i(u) = p^i(\lambda(u))$. Sekaannuksen vaaraa ei ole, kun muistetaan, että $u \in I \subset \mathbb{R}$ ja koordinaattifunktiot q^i ja p^i ovat kuvauksia $S \supset U \rightarrow \mathbb{R}$. Näillä merkinnöillä saadaan integraalikäyrän λ nostoksi siten

$$\lambda'(u) \mapsto \left(\lambda(u); \frac{dq^1(u)}{du}, \dots, \frac{dq^n(u)}{du}, \frac{dp^1(u)}{du}, \dots, \frac{dp^n(u)}{du} \right), \quad u \in I. \quad (2.13)$$

Yhtälön (2.10) oikealle puolelle saadaan kanonisessa kartassa puolestaan

$$(X \circ \lambda)(u) = (V^1(\lambda(u)), \dots, V^n(\lambda(u)), F^1(\lambda(u)), \dots, F^n(\lambda(u))), \quad u \in I. \quad (2.14)$$

Lokaalisti yhtälöstä (2.10) saadaan siis yhtälöt

$$q^i(u) = q^i(u), \quad p^i(u) = p^i(u) \quad (2.15a)$$

$$\frac{dq^i(u)}{du} = V^i(q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)) \quad (2.15b)$$

$$\frac{dp^i(u)}{du} = F^i(q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)), \quad (2.15c)$$

joista pari (2.15a) on triviaali.

Nähdään, että symplektisen muodon avulla voidaan generoida mielivaltainen vektorikenttä X 1-muodon ω avulla, sillä jos

$$X = \sum_{i=1}^n \left(V^i \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right), \quad (2.16)$$

niin valitsemalla

$$\omega = \sum_{i=1}^n (F^i dq^i - V^i dp^i) \quad (2.17)$$

saadaan

$$\Omega^{-1}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(-(-V^i) \frac{\partial}{\partial q^i} + F^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right) = X. \quad (2.18)$$

Yhtälö (2.10) voidaan siis kirjoittaa myös muodossa

$$\lambda' = \Omega^{-1}(\omega) \circ \lambda. \quad (2.19)$$

Nyt jos $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ on sileä funktio, voidaan sen ulkoisen derivaatan avulla määritellä kanonisessa kartassa (lokaalisti) 1-muoto

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} dp^i \right). \quad (2.20)$$

Kun tähän 1-muotoon operoidaan kuvauksella (2.9) saadaan vektorikenttä

$$X_f = \Omega^{-1}(df) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right) \quad (2.21)$$

Saadun vektorikentän integraalikäyrälle voidaan nyt käyttää lokaalia esitystä kanonisessa kartassa yhtälöiden (2.15) mukaan, jolloin saadaan

$$\frac{dq^i(u)}{du} = -\frac{\partial f}{\partial p^i}(q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)) \quad (2.22a)$$

$$\frac{dp^i(u)}{du} = \frac{\partial f}{\partial q^i}(q^1(u), \dots, q^n(u), p^1(u), \dots, p^n(u)). \quad (2.22b)$$

Tällöin sanotaan, että integraalikäyrä on *funktion f generoima*.

2.1.2 Hamiltonin vektorikenttä

Valitsemalla yhtälössä (2.21) funktioksi f Hamiltonin funktion vastaluku $-H$ ja parametriksi u aika t saadaan yhtälöstä *Hamiltonin vektorikenttä*, jolle käytetään merkintää

$$X_H = \Omega^{-1}(-dH) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right). \quad (2.23)$$

Yhtälöistä (2.22) saadaan nyt *Hamiltonin yhtälöt*,

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i}(q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \quad (2.24a)$$

$$\dot{p}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t)), \quad (2.24b)$$

missä merkintä \dot{q}^i tarkoittaa q^i :n derivaattaa ajan suhteen. Hamiltonin vektorikentän generoimat liikkeet siis toteuttavat klassiset Hamiltonin yhtälöt, joten Hamiltonin funktio generoi systeemin liikkeen faasiavaruudessa S .

2.1.3 Poissonin sulut

Käyttämällä kartalle ξ merkintöjä (2.4) voidaan määritellä funktioiden $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ *Poissonin sulut*

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \Omega^{-1}(df, dg) = \Omega^{-1}(df)g = X_f(g) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} \right) \\ &= -X_g(f) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Suoraan laskemalla nähdään Poissonin sulkujen toteuttavan useita tärkeitä ehtoja. Erityisesti Poissonin sulut on kuvauksena $S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ bilineaarinen ja antisymmetrinen. Lisäksi mielivaltaisille funktioille $f, g, h : S \rightarrow \mathbb{R}$ pätevät *Jacobin identiteetti*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (2.26)$$

ja (*Leibnizin derivaattaehto*)

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad (2.27)$$

tulon gh suhteen.

Lisäksi kanonisille muuttujille $q^i = \xi^i$, $p^i = \xi^{i+n}$ saadaan lokaalisti yhtälöt $\forall i, j = 1, \dots, n$

$$\{q^i, p^j\} = \delta^{ij} \quad (2.28)$$

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad (2.29)$$

$$\{p^i, p^j\} = 0, \quad (2.30)$$

missä δ^{ij} on *Kroneckerin delta*, jolle $\delta^{ii} = 1$ kaikilla $i = 1, \dots, n$ ja $\delta^{ij} = 0$ kaikilla $i \neq j$.

Jos nyt lasketaan mielivaltaisen sileän funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ aikaderivaatta Hamiltonin funktion H määräämää rataa pitkin, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \frac{dq^i(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \frac{dp^i(t)}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \frac{\partial H}{\partial p^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) + \frac{\partial f}{\partial p^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) (-1) \frac{\partial H}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \right) \quad (2.31) \\ &= (X_H f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (\Omega^{-1}(-dH)f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) \\ &= \{f, H\}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \end{aligned}$$

missä nähdään eksplisiittisesti yhteys yleisellä faasiavaruudella määriteltyjen funktioiden aikakehityksen, vektorikenttien, symplektisen muodon ja Poissonin sulkujen välillä.⁴

2.1.4 Laajennus tila-avaruuteen

Laajennus yleisestä faasiavaruudesta (S, Ω) tila-avaruuteen $\mathcal{S} = S \times \mathbb{R}$ voidaan tehdä tarkastelemalla funktioiden joukkoa $\mathcal{F} = \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sileä}\}$. Näitä funktioita kutsutaan (*klassisiksi*) *suureiksi*.

Valitsemalla suureeksi Hamiltonin funktio $H \in \mathcal{F}$ saadaan yhtälöiden (2.22) perusteella jälleen Hamiltonin kanoniset likeyhtälöt, jotka kappaleen 2.1.1 merkinnöillä ovat

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i}(q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t), t) \quad (2.32a)$$

$$\dot{p}^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t), t). \quad (2.32b)$$

Näitä yhtälöitä ja lyhennysmerkintää $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t))$ käyttämällä

⁴ Käsitellään merkintätapa $X(f)$ täsmällisemmin. Olkoon $V \subset S$ avoin joukko tulkittuna sileän moniston S avoimeksi alimonistoksi ja $X : S \rightarrow T(S)$ sileä vektorikenttä. Olkoon $C^\infty(V)$ kaikkien sileiden funktioiden $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ joukko. Tällöin jos $\phi : V \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on moniston V kartta pisteessä $x \in V$, niin voidaan osoittaa, että lokaalisti jokaista $f \in C^\infty(V)$ vastaa yksikäsitteisesti määrätty $g \in C^\infty(V)$, jolle

$$g(x) = D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))X_c(\phi(x)),$$

missä D on tavallinen \mathbb{R}^n :n derivaattaoperaattori (*Frechet'n derivaatta*) ja $X_c : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ on vektorikentän lokaali esitys. Lokaali esitys X_c voidaan antaa vektorimuodossa \mathbb{R}^n :n luonnollisen kannan suhteen ja saadaan

$$X_c(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x))^T$$

kaikilla $x \in \phi(U)$. Vastaavasti

$$D(f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) = \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^1}(\phi(x)), \dots, \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^n}(\phi(x)) \right),$$

missä nyt $\text{pr}^i(\mathbf{x}) = x^i$ on projektiokuvaus ja funktiot $x^i = \text{pr}^i \circ \phi$ ovat koordinaattifunktioita. Saadaan siis

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x))X^i(\phi(x)).$$

Näin määriteltiin kuvaus $X : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$, jota merkitään $C^\infty(V) \ni f \mapsto X(f) \in C^\infty(V)$.

saadaan suureen f aikaderivaatalle

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} (-1) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \left[\left(\{ \cdot, H \} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f \right] (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = (\tilde{X}_H f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tässä nyt

$$\tilde{X}_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} = X_H + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.34)$$

on *tila-avaruuteen laajennettu Hamiltonin vektorikenttä*, joka generoi liikkeen tila-avaruudessa.

Formulointi symplektisen muodon avulla ei tässä tila-avaruuden käsittelyssä onnistu kuten kappaleessa 2.1.1. Nyt aika on otettu karteesisen tulon avulla yleisen faasiavaruuden ulkopuolelta klassisena universaaliaikana, jolloin Hamiltonin vektorikentän generoiminen symplektisen muodon avulla jouduttaisiin käsittelemään muodossa

$$\tilde{X}_H = \Omega^{-1}(-dH) + \frac{\partial}{\partial t} = X_H + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Menettely on varsin kankea varsinkin aikariippuvien Hamiltonin yhtälöiden ja aikamuunnosten käsittelemisessä. Seuraavassa kappaleessa tutkitaan yleisempää tapaa käsitellä aikaparametriä.

Laajennettu faasiavaruus tila-avaruutena

Tila-avaruuden muodostaminen voidaan käsitellä toisinkin. Aikaparametri voidaan ottaa yhdeksi kanonisista koordinaateista merkitsemällä $q^0 = t$ jolloin vastaava kanoninen konjugaatti on p^0 , jonka merkitystä tarkastellaan edempänä. Tässä työssä tullaan käyttämään yleisen käytännön mukaisesti paikoitellen merkintää t myös laajennetun faasiavaruuden tapauksissa, kun erehtymisen vaaraa ei ole.

Näin tila-avaruus voidaan käsitellä $(2n+2)$ -ulotteisena laajennettuna faasiavaruutena (S', Ω') kappaleiden 2.1.1 ja 2.1.1 formalismilla. Myöhemmin havaitaan, että tällä menettelyllä on selviä etuja ajasta riippuvien Hamiltonin funktioiden, sekä aikamuunnosten käsittelemisessä. Jatkossa erotellaan tarvittaessa laajennettuun faasiavaruuteen liittyvät symplektinen muoto ja Hamiltonin funktio heittomerkillä $(H'$ ja $\Omega')$, ja tila-avaruuteen liittyvät aaltoviivalla $(\tilde{H}$ ja $\tilde{\Omega})$.

Nyt symplektinen muoto on lokaalisti

$$\Omega' = \sum_{i=0}^n (dp^i \wedge dq^i). \quad (2.36)$$

Vastaavasti Hamiltonin funktioksi otetaan

$$H'(t, q^1, \dots, q^n, p^0, p^1, \dots, p^n) = H(t, q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n) + p^0, \quad (2.37)$$

missä p^0 -riippuvuus on annettu eksplisiittisesti. Valintaa ei perustella *a priori*, mutta sen nähdään olevan käytännöllinen Hamiltonin funktion mahdollista aikariippuvuutta (eli riippuvuutta yleisestytystä koordinaatista q^0) tarkasteltaessa. Myöhemmin päätellään, että alkuarvo $p^0(t_0)$ voidaan valita vapaasti, ja nähdään, että vain p^0 :n aikakehitys on määrätty.

Ottamalla nyt ulkoinen derivaatta Hamiltonin funktiosta H' , saadaan

$$\begin{aligned} dH' &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial H'}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H'}{\partial p^i} dp^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial(H+p^0)}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial(H+p^0)}{\partial p^i} dp^i \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^0} dq^0 + dp^0 + dH. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Operoimalla tähän kanonisen muodon Ω' käänteiskuvauksella yhtälön (2.21) mukaisesti saadaan

$$\begin{aligned} X_{H'} &= \Omega'^{-1}(-dH') = \Omega^{-1}(-dH) + \frac{\partial}{\partial q^0} - \frac{\partial H}{\partial q^0} \frac{\partial}{\partial p^0} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right) + \frac{\partial}{\partial q^0} - \frac{\partial H}{\partial q^0} \frac{\partial}{\partial p^0} \\ &= X_H + \frac{\partial}{\partial q^0} - \frac{\partial H}{\partial q^0} \frac{\partial}{\partial p^0}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Missä nyt $X_{H'}$ on *Hamiltonin vektorikenttä laajennetussa faasiavaruudessa* (vertaa yhtälö (2.34)).

Systeemin liike $\xi : \mathbb{R} \supset I \rightarrow S'$ on nyt lokaalisti muotoa

$$\xi(t) \mapsto (t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^0(t), p^1(t), \dots, p^n(t)), \tag{2.40}$$

ja sen nosto $\xi' : I \rightarrow T(S')$ on

$$\xi'(t) \mapsto (\xi(t); 1, \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t), \dot{p}^0(t), \dot{p}^1(t), \dots, \dot{p}^n(t)). \tag{2.41}$$

Liikeyhtälöt ovat jälleen muotoa $\xi' = X_{H'} \circ \xi$, mistä lokaalisti kanonisessa kartassa saadaan

$$1 = 1 \quad \left(\Leftrightarrow \quad \dot{t} = \frac{\partial H'}{\partial p^0} = 1 \right) \tag{2.42a}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^0(t) &= -\frac{\partial H'}{\partial q^0}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^0(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial t}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \end{aligned} \tag{2.42b}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^i(t) &= \frac{\partial H'}{\partial p^i}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^0(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \\ &= \frac{\partial H}{\partial p^i}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \end{aligned} \tag{2.42c}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}^i(t) &= -\frac{\partial H'}{\partial q^i}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^0(t), p^1(t), \dots, p^n(t)) \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}(t, q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots, p^n(t)), \end{aligned} \tag{2.42d}$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tuloksena saatiin siis tavalliset Hamiltonin kanoniset likeyhtälöt, sekä lisäksi yhtälö (2.42b), joka sisältää Hamiltonin funktion eksplisiittisen aikariippuvuuden vaikutuksen.

Yhtälön (2.42b) hyödyllisyys paljastuu tutkimalla Hamiltonin funktion H' aikaderivaattaa yhtälöiden (2.42) määräämällä radalla. Vastaavalla laskulla ja lyhennysmerkinnöillä kuin yhtälössä (2.39) saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dH'}{dt}(t, \mathbf{q}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t)) &= \frac{dH}{dt}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) + \dot{p}^0(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \Big|_{(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))} \frac{dq^i(t)}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p^i} \Big|_{(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))} \frac{dp^i(t)}{dt} \right) \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) + \dot{p}^0(t) \\
&= \{H, H\}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) + \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) + \dot{p}^0(t) \\
&= \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) - \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Siis H' on vakio $X_{H'}$:n määräämällä radalla.

Nyt on syytä tarkastella konjugoidun momentin p^0 fysikaalista merkitystä. Siinä tapauksessa, että Hamiltonin funktio ei riipu ajasta, voidaan se identifioida systeemin kokonaisenergian kanssa [17]. Siis p^0 on energianluonteinen suure, mikä on järkevää, sillä suhteellisuusteoriassa p^0 olisi neli-impulssin aikaa vastaava komponentti ja sen merkitys siten selvä. Kuitenkin klassinen systeemi on täysin määrätty alkuehdoista $(t_0, \mathbf{q}(t_0), \mathbf{p}(t_0))$ eli kun paikka ja liikemäärä (tai nopeus) tunnetaan jollakin hetkellä. Alkuarvo $p^0(t_0)$ vastaisi siten energian arvoa tällä hetkellä, mutta se ei anna klassisessa tapauksessa mitään lisäinformaatiota. Erityisesti alkuarvo $p^0(t_0)$ voidaan valita mielivaltaisesti, ja tätä vapautta tullaan tarvitsemaan myöhemmin.

Koska nyt alkuarvo $p^0(t_0)$ voidaan valita siten, että

$$p^0(t_0) = -H(t_0, q^1(t_0), \dots, q^n(t_0), p^1(t_0), \dots, p^n(t_0)), \tag{2.44}$$

on myös $H' \equiv 0$ radalla, jonka $X_{H'}$ generoi. Lisäksi

$$\frac{dH}{dt}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = -\dot{p}^0(t) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \tag{2.45}$$

mistä nähdään, että mikäli H ei riipu eksplisiittisesti ajasta, se on vakio X_H :n määräämällä radalla. Siis yleisestikin ajasta riippumattomat Hamiltonin funktiot ovat vakioita määrämillään radoilla. Edellisen kappaleen formalismilla asia oltaisiin nähty yhtälöä (2.34) tarkastelemalla. Itse asiassa aikariippumattomassa tapauksessa Hamiltonin funktion vakioisuuteen päädyttäisiin jo käyttämällä yhtälöä (2.23), jonka perusteella $X_H(H) = 0$.

Toisin kuin aikaisemmassa tila-avaruuden määrittelyssä, nyt liikkeen Hamiltonin funktion H' määräämällä radalla saadaan suureiden $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$ aikakehitys faasiavaruuden yhtälön (2.31) tapaan muodossa

$$\frac{df}{dt}(t, \mathbf{q}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t)) = (X_{H'} f)(t, \mathbf{q}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t)) = (\{f, H'\})(t, \mathbf{q}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t)). \tag{2.46}$$

2.1.5 Aikamuunnokset

Aina ei haluta esimerkiksi numeeristen vaikeuksien vuoksi käyttää systeemin evoluution parametrisointiin tavallista koordinaattiaikaa t (eli q^0). Tällöin voidaan tehdä *aikamuunnos*, jolle yleinen esitysmuoto on edellisen kappaleen merkinnöin

$$\frac{dt(s)}{ds} = G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))), \quad (2.47)$$

missä $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on sileä funktio. Differentiaaliyhtälöstä (2.47) aika $t = t(s)$ määräytyy implisiittisesti lukuunottamatta mielivaltaista vakiota. Voitaisiin tarkastella myös yleisempiä aikamuunnoksia muotoa

$$G = G(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'', \dots, \mathbf{q}^{(n)}, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{p}'', \dots, \mathbf{p}^{(n)}), \quad (2.48)$$

mutta tässä työssä tarvitaan vain muotoa (2.47) olevia muunnoksia.

Uuden parametrin avulla laskettuna saadaan yhtälöiden (2.47) ja (2.42) avulla

$$\begin{aligned} \frac{dq^i(t(s))}{ds} &= \frac{dq(t(s))}{dt} \frac{dt(s)}{ds} \\ &= \frac{\partial H'}{\partial p^i}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \cdot G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \end{aligned} \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^i(t(s))}{ds} &= \frac{dp(t(s))}{dt} \frac{dt(s)}{ds} \\ &= -\frac{\partial H'}{\partial q^i}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \cdot G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))). \end{aligned} \quad (2.49b)$$

Liikkeyhtälöt uuden parametrin s suhteen eivät ole enää kanonisia. Vertaamalla yhtälöihin (2.39) ja (2.42) nähdään, että uudet yhtälöt ovat vektorikentän $GX_{H'}$ generoimia.

Yhtälöiden muoto voidaan siten palauttaa kanoniseksi ottamalla uudeksi Hamiltonin funktioksi

$$\Gamma(s, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = G(t(s), \mathbf{q}, \mathbf{p}) \cdot H'(t(s), \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}), \quad (2.50)$$

ja valitsemalla alkuehdoksi

$$p^0(t(s_0)) = -H'(t(s_0)) \quad (2.51)$$

jolloin *rataa pitkin* pätee $H' = 0$. Nyt ulkoinen derivaatta

$$d\Gamma = H'dG + GdH', \quad (2.52)$$

josta

$$X_\Gamma = \Omega'^{-1}(d\Gamma) = \Omega'^{-1}(H'dG + GdH') = H'\Omega'^{-1}(dG) + G\Omega'^{-1}(dH') = H'X_G + GX_{H'}. \quad (2.53)$$

Kun nyt yhtälöön (2.53) sijoitetaan systeemin rata $(t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s)))$ alkuehdolla (2.51), on $H'(t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \equiv 0$ ja siten

$$X_\Gamma = GX_{H'}. \quad (2.54)$$

Yhtälöiden (2.49) ja (2.54) perusteella uuden parametrin s avulla lausuttuna liikeyhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\frac{dq^0(s)}{ds} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial p^0}(s, \mathbf{q}(s), p^0(s), \mathbf{p}(s)) \\ &= \frac{\partial G(H + p^0)}{\partial p^0}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \\ &= G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \quad (\text{aikamuunnosyhtälö})\end{aligned}\tag{2.55a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp^0(s)}{ds} &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial q^0}(s, \mathbf{q}(s), p^0(s), \mathbf{p}(s)) \\ &= -\frac{\partial G(H + p^0)}{\partial q^0}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \\ &= -\frac{\partial G}{\partial q^0}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) H'(t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \\ &\quad - G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \frac{\partial H}{\partial q^0}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \\ &= -G(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s))) \frac{\partial H}{\partial q^0}(t(s), \mathbf{q}(t(s)), \mathbf{p}(t(s)))\end{aligned}\tag{2.55b}$$

$$\frac{dq^i(s)}{ds} = \frac{\partial \Gamma}{\partial p^i}(s, \mathbf{q}(s), p^0(s), \mathbf{p}(s))\tag{2.55c}$$

$$\frac{dp^i(s)}{ds} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial q^i}(s, \mathbf{q}(s), p^0(s), \mathbf{p}(s))\tag{2.55d}$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Täten käyttämällä Hamiltonin funktiota Γ liikeyhtälöt ovat kanonista muotoa.

2.2 Kanoniset muunnokset

Olkoon (S, Ω) symplektinen monisto, ja ξ sekä $\tilde{\xi}$ kaksi kanonista karttaa, joiden määrittelyalueiden leikkaus D on epätyhjä. Karttojen lokaalit esitykset ovat $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ja $\tilde{\xi} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Tällöin kanonisen muodon matriisi Ω on sama kummassakin kartassa eli

$$\Omega = \sum_{i=1}^n d\xi^{i+n} \wedge d\xi^i = \sum_{i=1}^n d\tilde{\xi}^{i+n} \wedge d\tilde{\xi}^i.\tag{2.56}$$

Symplektisen muodon säilymisestä saadaan siten kanoniselle kartanvaihdon matriisille yleinen muoto. Todetaan ensin, että

$$d\tilde{\xi}^i = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} d\xi^j,\tag{2.57}$$

missä $\left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}\right) = A_{ij}$ on kartanvaihdon Jacobin matriisi jossain pisteessä $p \in D$. Nyt saadaan suoralla laskulla

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{i=1}^n d\xi^{i+n} \wedge d\xi^i \\ &= \sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_{ij} d\xi^i \otimes d\xi^j = \sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_{ij} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^k} d\xi^k \otimes \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{\xi}^j}{\partial \xi^l} d\xi^l \\ &= \sum_{k,l=1}^{2n} \left(\sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^k} \Omega_{ij} \frac{\partial \tilde{\xi}^j}{\partial \xi^l} \right) d\xi^k \otimes d\xi^l = \sum_{k,l=1}^{2n} \left(\sum_{i,j=1}^{2n} A_{ki}^T \Omega_{ij} A_{jl} \right) d\xi^k \otimes d\xi^l.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Siten ehto sille, että muunnos säilyttää kanonisen muodon on, että muunnoksen Jacobin matriisi A toteuttaa ehdon

$$A^T \Omega A = \Omega.\tag{2.59}$$

Erityisesti kanoninen muunnos tarkoittaa, että Hamiltonin kanoniset liikeyhtälöt ovat kummasakin kartassa samanmuotoiset [8]. Siis kartassa ξ lokaalisti on

$$\frac{d\mathbf{q}(u)}{du} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}(u), \mathbf{p}(u)), \quad \frac{d\mathbf{p}(u)}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(u), \mathbf{p}(u))\tag{2.60}$$

ja kartassa $\tilde{\xi}$ vastaavasti

$$\frac{d\mathbf{Q}(u)}{du} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{Q}(u), \mathbf{P}(u)), \quad \frac{d\mathbf{P}(u)}{du} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}(u), \mathbf{P}(u)).\tag{2.61}$$

Myös kanonisten muunnosten tapauksessa on huomioitava ero *aktiivisen* ja *passiivisen* muunnoksen tulkinnan välillä. Passiivinen koordinaattimuunnos tulkitaan vaikuttavaksi vain koordinaattistoon, jolloin ainoastaan vektorin tai fysikaalisen suureen esitys muuttuu. Aktiivisen muunnoksen ymmärretään vaikuttavan suoraan vektoriin tai suureeseen [18]. Erityisesti muunnos $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ voidaan ymmärtää aktiivisena muunnoksena $S \rightarrow S$ eli muunnoksena saman moniston eri alkioksi. Olennaisesti siten myös siirto jostain radan pisteestä toiseen radan pisteeseen saadaan kanonisena muunnoksena.

2.2.1 Infinitesimaaliset muunnokset

Infinitesimaaliset kanoniset muunnokset ovat yhdestä parametrasta ϵ riippuvia ϵ :in suhteen differentioituvia muunnoksia. Yksittäinen muunnos g_ϵ on ekvivalenssiluokka, jonka edustajat ovat ekvivalentteja, mikäli rajalla $\epsilon \rightarrow 0$ niiden antamien muunnosten ero on vähintään toista kertaluokkaa eli $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ [8].

Muunnos voidaan johtaa lähtemällä tyyppin F_2 generoivasta funktiosta $F(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^n q^i P^i$, joka antaa identiteettimuunnoksen

$$Q^i = \frac{\partial}{\partial P^i} \left(\sum_{i=1}^n q^i P^i \right) = q^i, \quad p^i = \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\sum_{i=1}^n q^i P^i \right) = P^i,\tag{2.62}$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$, missä n on systeemin dimensioiden määrä. Tässä ja seuraavassa oletetaan, että Jacobin determinantti

$$\left| \frac{\partial(P^1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \dots, P^n(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{\partial(p^1, \dots, p^n)} \right| \neq 0 \quad (2.63)$$

lokaalisti, jotta funktio $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ ylipäättään on määritelty.

Tutkitaan siis tyyppin F_2 generoivaa funktiota

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) = \sum_{i=1}^n q^i P^i + \epsilon S(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon), \quad (2.64)$$

joka riippuu nyt muunnosparametrissa ϵ . Tämän generoivan funktion antamat muunnoskaavat ovat

$$Q^i = \frac{\partial F}{\partial P^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) = q^i + \epsilon \frac{\partial S}{\partial P^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) \quad (2.65a)$$

$$p^i = \frac{\partial F}{\partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) = P^i + \epsilon \frac{\partial S}{\partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon), \quad (2.65b)$$

mistä uudelleen järjestämällä saadaan

$$Q^i = q^i + \epsilon \frac{\partial S}{\partial P^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) \quad (2.66a)$$

$$P^i = p^i - \epsilon \frac{\partial S}{\partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon). \quad (2.66b)$$

Nyt uusi kartta (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) riippuu parametrissa ϵ , ja rajalla $\epsilon \rightarrow 0$ saadaan identiteettimuunnos (2.62). Derivoimalla puolittain parametrin suhteen saadaan

$$\frac{\partial Q^i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial S}{\partial P^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) + \epsilon \frac{\partial^2 S}{\partial \epsilon \partial P^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) \quad (2.67a)$$

$$\frac{\partial P^i}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial S}{\partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon) - \epsilon \frac{\partial^2 S}{\partial \epsilon \partial q^i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}; \epsilon). \quad (2.67b)$$

Rajalla $\epsilon \rightarrow 0$ yhtälöiden (2.62) perusteella $q^i \rightarrow Q^i$, joten yhtälöistä (2.67) saadaan siten

$$\left. \frac{\partial Q^i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial G}{\partial P^i}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (2.68a)$$

$$\left. \frac{\partial P^i}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\frac{\partial G}{\partial Q^i}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \quad (2.68b)$$

missä on merkitty $S(\mathbf{Q}, \mathbf{P}; 0) = G(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Funktiota G nimitetään infinitesimaalisen kanonisen muunnoksen g_ϵ generoivaksi funktioksi.

Nyt huomataan erityisesti, että mikäli generoivaksi funktioksi valitaan Hamiltonin funktio, ja parametriksi ϵ aika, saadaan yhtälöistä (2.68) Hamiltonin kanoniset liikeyhtälöt. Siis Hamiltonin funktio generoi infinitesimaalisen kanonisen muunnoksen ajassa kyseisen Hamiltonin funktion määräämää rataa pitkin [19]. Tulos on luonnollinen, sillä kappaleissa 2.1.3 ja 2.1.4 nähtiin Hamiltonin vektorikentän generoivan mielivaltaisen sileän funktion aikakehityksen.

2.3 Lie-ryhmien teoria

Lopullisena tavoitteena on numeerinen integrointimenetelmä, jossa systeemin aikakehitys lasketaan pieni aika-askel kerrallaan Hamiltonin kanonisten liikeyhtälöiden avulla. Tämä on suoraviivaista, mikäli liikeyhtälöt osataan integroida aika-askeleen yli, jolloin tuloksena olisi kanoninen muunnos ajassa. Integrointi ainakaan suljetussa muodossa ei välttämättä onnistu, jolloin ongelmaa pitää lähestyä jotenkin toisin. Lähestymistavasta riippumatta kanonisuuuden säilyminen on tärkeää, jotta integroitavat liikeyhtälöt pysyvät samoina, kuten kappaleessa 2.2 nähtiin.

Eräs mahdollinen keino ongelman ratkaisemiseksi on todeta, että koska aika-askel on pieni, voidaan vastaava kanoninen muunnos approksimoida infinitesimaaliseksi, ja yrittää sitä kautta yksinkertaistaa tilannetta. Erityisesti voidaan tutkia mahdollisuutta jakaa Hamiltonin funktio sellaisiin osiin, joiden generoima liike osataan integroida. Kutakin osaa voidaan sitten käyttää käyttäen vuorollaan infinitesimaalisen kanonisen muunnoksen generaattorina, jolloin saatu tulos mahdollisesti vastaa alkuperäisen Hamiltonin funktion antamaa rataa.

Tällainen approksimointi kuitenkin vaatii tiedon siitä, että usea infinitesimaalinen kanoninen muunnos peräjälkeen antaa tavallisen kanonisen muunnoksen. Lisäksi ei ole selvää, voiko Hamiltonin funktiota jakaa osiin niin, että osien soveltaminen vuorollaan vastaa tai ainakin approksimoi alkuperäisen Hamiltonin funktion käyttämistä. *A priori* ei ole edes selvää, että miten Hamiltonin funktion funktionaalisen muodon osittaminen tulisi tehdä.

Näiden ongelmien matemaattiseen tarkasteluun tarvitaan teoriaa *Lien ryhmistä* ja *Lien algebroidista*. Lie-ryhmien teorian avulla voidaan käsitellä matemaattisten rakenteiden – erityisesti sileiden monistojen – *jatkuvia symmetrioita*.

2.3.1 Lie-derivaatta

Aikaisemmin todettiin vektorikentän operoinnin funktioon olevan lokaalisti kuvaus $X : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$, jota merkitään $C^\infty(V) \ni f \mapsto X(f) \in C^\infty(V)$, missä X on vektorikenttä ja $V \subset S$ on moniston S avoin alimonisto. Voidaan osoittaa, että tämä kuvaus on lineaarinen vektoriarvuudessa $C^\infty(V)$. Lisäksi kun $f, g \in C^\infty(V)$ on

$$X(fg) = fX(g) + gX(f). \quad (2.69)$$

Tätä vektorikentän antamaa kuvausta kutsutaan *derivaataksi* avaruudessa $C^\infty(V)$, ja yhteys tavalliseen derivaattakuvaukseen on ilmeinen. Määritellään sitten vektorikentille X ja Y *Lien sulut* $[X, Y]$ kaavalla

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.70)$$

kaikilla $f \in C^\infty(S)$. Lien sulkua kutsutaan myös *Lien (haka)tuloksi*. Nyt voidaan määritellä mielivaltaisen tensorikentän *Lien derivaatta* \mathcal{L}_X vektorikentän X suhteen. Kun sileä funktio $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ja sileä vektorikenttä Y samaistetaan asteiden $(0,0)$ ja $(1,0)$ tensorikenttien kanssa, saadaan

Lien derivaatan ominaisuuksiksi kaikilla f , Y ja mielivaltaisen asteen tensorikentillä S ja T [20]

$$\mathcal{L}_X f = X(f) \quad (2.71a)$$

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] \quad (2.71b)$$

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T) \quad (2.71c)$$

$$\mathcal{L}_{aX+bY} T = a\mathcal{L}_X T + b\mathcal{L}_Y T \quad (2.71d)$$

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} T = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y T) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X T). \quad (2.71e)$$

Intuitiivisesti ajateltuna Lien derivaatta kertoo jotain mielivaltaisen tensorikentän muuntumisesta tietyn vektorikentän määräämällä integraalikäyrällä eli se voidaan ymmärtää *suunnattuna derivaattana*.⁵

2.3.2 Lien muunnosryhmät

Seuraavassa tarvitaan joitakin vähemmän yleisiä käsitteitä, jotka käytännöllisyyden vuoksi esitellään tässä. Monistolla M määritellyn sileän vektorikentän X kaikkien pisteestä $m \in M$ alkavien integraalikäyrien γ (eli $\gamma(0) = m$) määrittelyalueiden unioni on \mathbb{R} :n avoin väli, joka sisältää arvon 0 [20]. Tällä avoimella välillä määriteltyä vektorikenttää sanotaan X :n *maksimaaliseksi* vektorikentäksi [20]. Jos kaikkien pisteiden $m \in M$ kautta kulkevien X :n maksimaalisten vektorikenttien määrittelyalue on koko \mathbb{R} sanotaan, että X on *täydellinen* [20].

Oletuksen mukaisesti kaikki käsiteltävät vektorikentät ovat sileitä. Nyt vaaditaan lisäksi, että ne ovat *täydellisiä*. Oletus on hyvä, sillä tulevassa tullaan tarkastelemaan vuorovaikuttamattomia klassisia kahden kappaleen systeemejä, joiden tiedetään olevan määriteltyjä melkein kaikille tavallisen koordinaattiajan t arvoille. Ongelmia syntyy ainoastaan törmäystapauksissa joille välttämätön ehto on kiertoimpulssin häviäminen. Tilanne ei ole satelliitteja tutkittaessa mieleäkäs, ja vastaava konfiguraatioavaruuden osajoukkokin on nollamittainen, joten näitä tapauksia ei käsitellä lainkaan.

Olkoon nyt V on monistolla M määriteltyjen sileiden maksimaalisten vektorikenttien muodostama epätriviaali äärellisulotteinen *Lien algebra*. Tällöin *Palaisin teoreeman* nojalla on olemassa sellainen yhtenäinen *Lien ryhmä* G , joka operoi *efektiivisesti* monistoon M *Lien muunnosryhmänä*, ja että tähän operaatioon liittyvä Lien algebra $R(G, M) = V$, jolle $\dim R(G, M) \leq G$ [20]. Tällöin sanotaan, että M on G -avaruus. Muunnosryhmä operoi kuvauksen $\phi : G \times M \rightarrow M$ kautta. Kuvaus ϕ toteuttaa ehdot [20]

$$(i) \quad \forall g \in G, m \in M \text{ funktio } \phi_g : M \rightarrow M, \phi_g(m) = \phi(g, m) \text{ on } M\text{:n sileä diffeomorfismi}$$

$$(ii) \quad \forall g, h \in G, \phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}.$$

⁵ Lien derivaatan määritelmän perusteella voidaan esimerkiksi yhtälössä (2.31) kirjoittaa

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (X_H f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = (\mathcal{L}_{X_H} f)(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)).$$

Selvästi jos $e \in G$ on identiteettialkio, on ϕ_e välttämättä identiteettikuvaus monistolla M . Efektiiisyyden voidaan nyt määrittellä tarkoittavan, että e on ainoa muunnosryhmän G alkio, joka generoi identiteettikuvauksen monistolla M .

Muunnosryhmään liittyy myös kuvaus $f : T_e G \rightarrow R(G, M)$, joka säilyttää Lien algebran rakenteen. Voidaan osoittaa, että f on itse asiassa oikealta invarianttien vektorikenttien Lien algebran RG ja Lien algebran $R(G, M)$ välinen isomorfia [20].⁶

Infinitesimaalinen muunnosryhmä

Aikaisemmin mainituista vaatimuksista vektorikenttien täydellisyydestä voidaan myös luopua. Tällöin voidaan määrittellä *infinitesimaalinen monistoon M vaikuttava muunnosryhmä G* Lien algebran rakenteen säilyttävänä lineaarikuvauksena Lien algebralta RG moniston M sileiden vektorikenttien muodostamalle Lien algebralle [20]. Tässä tapauksessa kuvaus on juuri aikaisemmin määritelty kuvaus f . Erityisesti voidaan osoittaa, että jos X on moniston M sileä vektorikenttä, niin X määrittelee *lokaalin* muunnosryhmän $(I, +)$, $I \supset \mathbb{R}$, joka on koko monistolla määritelty muunnosryhmä $G = (\mathbb{R}, +)$, jos X on täydellinen [20]. Lokaalissa tapauksessa kuvausta f kutsutaan muunnoksen *generaattoriksi*. Analogia kappaleen 2.2.1 kanssa on selvä.

2.3.3 Eksponenttikuvaus

Olkoon G Lien ryhmä, $T_e G$ tangenttiavaruus G identiteettialkion e kohdalla, $\mathbf{v} \in T_e G$, X vasemmalta invariantti vektorikenttä Lien ryhmällä G siten että $X(e) = \mathbf{v}$ ja γ X :n maksimaalinen pisteestä e alkava integraalikäyrä. Lien ryhmän G eksponenttikuvaus $\exp : T_e G \rightarrow G$ määritellään kuvaukseksi [20]

$$\exp \mathbf{v} = \gamma(1). \quad (2.72)$$

Eksponenttikuvauksen nimi perustuu sen ominaisuuteen

$$\exp[(\alpha + \beta)\mathbf{v}] = \exp(\alpha\mathbf{v}) \exp(\beta\mathbf{v}), \quad (2.73)$$

kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kuvaus on tärkeä siksi, että sen avulla voidaan generoida Lien ryhmän G alkioita Lien algebran $T_e G$ alkioista.

2.4 Yleisen faasiavaruuden sovellukset

Edellä esiteltyjen matemaattisten menetelmien avulla saadaan nyt ratkaisuja kohdan 2.3 ongelmiin. Havaitaan ensin, että yhtälön (2.31) antaman derivaattakuvauksen avulla voidaan muodostaa funktion $f \circ \gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ Taylorin sarja, kun yhdistetty funktio oletetaan analyttiseksi.

⁶ Kirjain R viittaa siihen, että tämän Lien algebran rakenne on saatu tarkastelemalla juuri G :n *oikealta* invariantteja vektorikenttiä. Vastaavasti saadaan Lien algebran rakenne LG tarkastelemalla *vasemmalta* invariantteja vektorikenttiä. Rakenteet ovat analogiset, ja Lien algebroiden LG ja RG Lien tulot eroavat vain merkin suhteen [20]. Erityisesti faasiavaruuden tapauksessa valinnalla LG :n ja RG :n välillä ei ole merkitystä [20].

Jatkossa näin oletetaan aina. Lisäksi oletetaan, että liikutaan vektorikentän X_H määräämällä radalla γ , jolloin voidaan merkitä lyhyemmin $f(t) \equiv (f \circ \gamma)(t)$. Näin saadaan f :n Taylorin sarjaksi pisteessä $t + h$

$$f(t + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} [\mathcal{L}_{X_H}^n f](t), \quad (2.74)$$

missä luonnollisesti merkintä $\mathcal{L}_{X_H}^n$ tarkoittaa Lien derivaatan soveltamista n kertaa peräkkäin. Yhtälön (2.74) sarja voidaan muodollisesti kirjoittaa

$$f(t + h) = \exp(h\mathcal{L}_{X_H})f(t) = \exp(hX_H)f(t). \quad (2.75)$$

Nähdään, että intuitiivisesti $\exp(hX_H)$ toimii operaattorina, joka siirtää systeemiä X_H :n määräämällä radalla eteenpäin parametrin arvon h verran. Erityisesti on huomattava, että funktioksi f voidaan valita jokin koordinaattifunktioista q^i tai p^i jolloin saadaan integraalikäyrän γ lokaali esitys. Tälle tulokinnalle voidaan nyt antaa matemaattinen perustelu Lien muunnosryhmien avulla.

2.4.1 Hamiltonin vektorikenttien Lien algebrat

Ensin todetaan, että tietyn Hamiltonin funktion H määräämän vektorikentän X_H generoima vektorikenttien joukko $\{aX_H | a \in \mathbb{R}\}$ on yksiulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Varustamalla tämä joukko lisäksi Lien suluilla yhtälön (2.70) mukaisesti saadaan aikaan (triviaali) yksiulotteisen Lien algebran rakenne, missä kaikki Lien sulut ovat identtisesti nollia [20].

Jotta saataisiin aikaan epätriviaali rakenne, on ensin selvitettävä, miten Hamiltonin funktio voitaisiin jakaa osiin. Koska Hamiltonin funktio generoi vektorikentän yhtälön (2.23) mukaisesti lineaarisen kuvauksen avulla, tapahtuu osittelu luonnollisimmin additiivisesti. Yksinkertaisimmassa tapauksessa saadaan siten

$$H(m) = H_1(m) + H_2(m), \quad m \in S, \quad (2.76)$$

missä Hamiltonin funktioiden yhteenlasku on luonnollisesti määritelty pisteittäin. Tästä osittelusta seuraa

$$X_H|_m = X_{H_1}|_m + X_{H_2}|_m, \quad m \in S, \quad (2.77)$$

myös pisteittäin määriteltynä. Tulos nähdään järkeväksi myös yhtälön (2.75) ja Lien derivaatan ominaisuuden (2.71d) valossa. Oletetaan siis, että Hamiltonin funktio voidaan jakaa korkeintaan *äärellisen* moneen osaan, ja voidaan kirjoittaa

$$H(m) = \sum_{i=1}^n H_i(m), \quad m \in S, n \in \mathbb{N}, \quad (2.78)$$

sekä

$$X_H|_m = \sum_{i=1}^n X_{H_i}|_m, \quad m \in S. \quad (2.79)$$

Nyt on vielä oletettava, että vektorikentät X_{H_i} generoivat *äärellisulotteisen* Lien algebran Ξ_H . Syntyvä rakenne ei ole triviaali, sillä $[X_{H_i}, X_{H_j}] = 0$ vain jos $i = j$ tai X_{H_i} ja X_{H_j} kommutoivat. Yleisesti näin ei ole, ja voidaan siten käyttää edellä esiteltyä Palaisin teoreemaa.

Kantamonisto on nyt faasiavaruus S ja tarkasteltava vektorikenttien Lien algebra Ξ_H . Palaisin teoreema antaa nyt Lien muunnosryhmän G monistolla S , ja muunnosryhmään liittyvän Lien algebran $R(G, S)$ joka yhtyy Lien algebraan Ξ_H . Teoreema kertoo myös, että $\dim \Xi_H \leq G$, mutta tässä työssä emme tarvitse muunnosryhmän ominaisuuksia, vaan muunnosryhmän Lien algebra riittää.

2.4.2 Siirtojen yhdistäminen

Eksponenttikuvausta hyödyntämällä saadaan nyt Lien algebran alkioita $X \in \Xi_H$ vastaava Lien muunnosryhmän alkio $\exp(X)$. Toisaalta voidaan osoittaa, että mikä tahansa yhtenäisen Lien algebran G alkio $g \in G$ voidaan esittää *äärellisen* monen G :n alkion tulona, jossa kaikki tekijät saadaan vastaavista G :n Lien algebran alkioista eksponenttikuvauksen avulla [20]. Aikaisempien merkintöjen avulla tämä tarkoittaa, että

$$\phi_s(m) = \phi_{s_1}(\phi_{s_2}(\dots \phi_{s_k}(m) \dots)) = \phi_{\exp \mathbf{v}_1}(\phi_{\exp \mathbf{v}_2}(\dots \phi_{\exp \mathbf{v}_k}(m) \dots)), \quad (2.80)$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja kukin $\mathbf{v}_i \in T_e G \cong \Xi_H$ kaikilla $i = 1, \dots, k$. Vaihtoehtoisesti tämä voidaan muotoilla yhtälön (2.75) kaltaiseen muotoon kuvaukselle $f : S \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(s+t) = \exp(s_1 X_1) \exp(s_2 X_2) \dots \exp(s_k X_k) f(t), \quad (2.81)$$

missä $s_i \in \mathbb{R}$, $X_i \in \Xi_H$ kaikilla $i = 1, \dots, k$. Voidaan siis todeta, että äärellisen monen lokaalin (infinitesimaalisen) muunnoksen avulla saadaan kanoninen aikamuunnos mille tahansa ajan siirrolle $s \in \mathbb{R}$. Koska erityisesti numeerisessa symplektisessä integroinnissa kukin muunnos on korkeintaan likimääräisesti infinitesimaalinen, on selvää, että tekemällä useita tällaisia muunnoksia peräkkäin saadaan makroskooppinen (ei-infinitesimaalinen) aikamuunnos.

Kuitenkaan eksponenttikuvauksella ei ole yleisesti ominaisuutta $\exp(\mathbf{v}) = \exp(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$, kun $T_e G \ni \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, jos Lien algebra $T_e G$ ei ole yksiulotteinen ja siten kommutatiivinen. Nyt käsiteltävän Lien algebran generoivat vektorikentät X_{H_i} , $i = 1, \dots, n$ yhdessä, joten kyseessä on yleisesti Lien tulon suhteen epäkommutatiivinen Lien algebra (paitsi siinä erityistapauksessa, että kaikki X_{H_i} :t kommutoivat). Ongelma ratkeaa *Bakerin–Campbellin–Hausdorffin kaavalla*

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp(C(X, Y)), \quad (2.82)$$

missä X ja Y kuuluvat johonkin Lien algebraan LG , ja $C(X, Y)$ on jokin yksikäsitteinen funktio $LG \rightarrow LG$ [21]. Funktio C on muotoa

$$C(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(X, Y). \quad (2.83)$$

Kehitelmän ensimmäiset termit ovat

$$C_1(X,Y) = X + Y \quad (2.84)$$

$$C_2(X,Y) = \frac{1}{2} [X,Y] \quad (2.85)$$

$$C_3(X,Y) = \frac{1}{12} [[X,Y],Y] - \frac{1}{12} [[X,Y],X], \quad (2.86)$$

ja tiedetään, että loputkin $C_i(X,Y)$ ovat muodoltaan lineaarikombinaatioita sisäkkäisistä X :n ja Y :n Lien suluista [21]. Yhtälö voidaan myös kääntää, jolloin saadaan *Zassenhausin kaava*

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y) \prod_{i=2}^{\infty} \exp(C_i(X,Y)), \quad (2.87)$$

missä nyt funktiot $C_i : LG \rightarrow LG$ ovat jälleen sisäkkäisten X :n ja Y :n kommutaattoreiden lineaarikombinaatioita [22]. Ensimmäiset C_i -funktiot ovat muotoa [22]

$$C_2(X,Y) = \frac{1}{2} [Y,X] \quad (2.88)$$

$$C_3(X,Y) = \frac{1}{3} [[Y,X],Y] + \frac{1}{6} [[Y,X],X]. \quad (2.89)$$

Zassenhausin kaavan avulla saadaan siten vektorikenttien X_{H_1} ja X_{H_2} generoimassa Lien algebrassa tulos

$$\exp(hX_H) = \exp[h(X_{H_1} + X_{H_2})] = \exp(hX_{H_1}) \exp(hX_{H_2}) \exp\left(-\frac{h^2}{2} [X_{H_1}, X_{H_2}]\right) \cdots \quad (2.90)$$

Zassenhausin kaavasta nähdään, että rajalla $h \rightarrow 0$ systeemin siirtäminen vuoron perään kahdella eri Hamiltonin funktion additiivisella osalla on kommutatiivista, ja että kun h on pieni saadaan hyvä approksimaatio tälle käytökselle. Yllä kuvattu menettely yleistyy suoraviivaisesti myös Hamiltonin funktion jaotteluille muotoa $H = \sum_i H_i$, missä summaus on äärellinen, mutta tämän työn puitteissa riittää jako kahteen osaan.

Kohdassa 2.3 mainittuihin ongelmiin saatiin siis ratkaisut, jotka voidaan koota yhteen seuraavasti:

- (i) Infinitesimaaliset kanoniset aikamuunnokset tuottavat kanonisen aikamuunnoksen.
- (ii) Hamiltonin funktio on luonnollista jakaa *additiivisiin osiin*.
- (iii) Osien generoimien vektorikenttien antamien eksponenttikuvausten soveltaminen peräjälkeen (melkein) infinitesimaalisina kanonisina muunnoksina approksimoi yhtälön (2.90) mukaisesti alkuperäisen Hamiltonin funktion antamaa rataa.

Seuraavaksi esiteltävät symplektiset integrointimenetelmät ovat siis matemaattisesti vakaalla pohjalla ja perusteltuja.

3 Symplektiset integrointimenetelmät

Edellisessä kappaleessa kehitellyn teorian pohjalta voidaan nyt johtaa joitakin yleisesti käytettyjä symplektisiä integrointimenetelmiä. Ensimmäiseksi on määriteltävä tarkemmin Hamiltonin funktio ja suoritettava sen jaottelu integroituviin osiin.

3.1 Hamiltonin funktio

Olkoon S tila-avaruudeksi laajennettu yleinen faasiavaruus, $\dim S = 2n+2$, ja $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ systeemin Hamiltonin funktio. Lokaalisti H on kanonisessa kartassa tavallista muotoa $H(t, \mathbf{q}(t), p^0(t), \mathbf{p}(t))$, missä jälleen t -riippuvuus ymmärretään syntyväksi vektorikentän X_H generoimasta liikkeestä $\gamma(t)$, missä $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$.

Monissa tapauksissa, ja erityisesti keskuskappaletta kiertävän satelliitin tapauksessa, Hamiltonin funktio on mahdollista jakaa *kineettiseen osaan* T ja *potentiaaliosaan* V siten, että

$$H(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + p^0 + V(q^0, \mathbf{q}) \rightarrow H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q}), \quad (3.1)$$

missä oikealla on käytetty käsittelyä helpottavaa merkintää, jossa \mathbf{q} ja \mathbf{p} on laajennettu sisältämään q^0 - ja p^0 -riippuvuudet. Mahdollinen potentiaaliosan eksplisiittinen aikariippuvuus tulee siten käsitellyksi kappaleessa 2.1.4 esitetyllä tavalla.

Nyt voidaan tulkita, että tällöin kanonisen kartan koordinaattifunktiot q^i vastaavat tavallisia \mathbb{R}^n :n paikkakoordinaatteja. Vastaavasti koordinaattifunktiot p^i vastaavat tällöin tavanomaisen klassisen liikemäärän komponentteja. Edelleen funktio T voidaan ymmärtää kineettisenä energiana, ja funktio V potentiaalienergiana, jolloin Hamiltonin funktio kuvaa systeemin kokonaisenergiaa. Koska eri osat riippuvat vain joko yleistetyistä koordinaateista tai yleistetyistä liikemääristä, ovat kunkin osan generoimassa liikkeessä riippumattomat koordinaatit vakioita. Tämä nähdään jo yhtälöstä (2.21), jonka perusteella koordinaatit q^i generoivat koordinaattien p^i siirrot ja päinvastoin.

Nyt voidaan muodostaa Hamiltonin kanoniset liikeyhtälöt vektorikenttien X_T ja X_V määrää-

mille radoille. Käyttämällä Hamiltonin funktion kineettistä osaa T saadaan

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial T}{\partial p^i}(\mathbf{p}(t)) \quad (3.2a)$$

$$\dot{p}^i(t) = -\frac{\partial T}{\partial q^i}(\mathbf{p}(t)) = 0, \quad (3.2b)$$

kaikille $i = 0, \dots, n$. Potentiaaliosalle V saadaan

$$\dot{q}^i(t) = \frac{\partial V}{\partial p^i}(\mathbf{q}(t)) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\dot{p}^i(t) = -\frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t)), \quad (3.3b)$$

kaikille $i = 0, \dots, n$. Kumminkin osat voidaan integroida suoraan parametrin t suhteen, sillä kummassakin tapauksessa integroitava funktio riippuu niistä kanonisista koordinaateista, jotka ovat radalla vakioita. Lisäksi integrointivakiot voidaan jättää huomiotta kirjoittamalla kineettiselle osalle

$$q^i(t+h) = q^i(t) + \frac{\partial T}{\partial p^i}(\mathbf{p}(t))h = [\exp(hX_T)q^i](t) \quad (3.4a)$$

$$p^i(t+h) = p^i(t) = [\exp(hX_T)p^i](t), \quad (3.4b)$$

missä on käytetty yhtälön (2.75) mukaisesti eksponenttikuvausta rataa pitkin tapahtuvan siirron esittämiseen. Vastaavasti potentiaaliosalle saadaan

$$q^i(t+h) = q^i(t) = [\exp(hX_V)q^i](t) \quad (3.5a)$$

$$p^i(t+h) = p^i(t) - \frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}(t))h = [\exp(hX_V)p^i](t). \quad (3.5b)$$

3.1.1 Logaritminen Hamiltonin funktio

Hamiltonin funktion ollessa yhtälön (3.1) mukaista muotoa, voidaan soveltaa *logaritmiseksi Hamiltonin funktioksi* kutsuttua menetelmää (logH-menetelmä) [12]. Seuraavassa merkitään q^0 ja p^0 eksplisiittisesti näkyviin.

Ensin valitaan yhtälön (2.47) mukaiseksi aikamuunnosfunktioiksi

$$G(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{-V(t, \mathbf{q})} \quad (3.6)$$

Funktion G nähdään rataa pitkin olevan ekvivalentti funktion $1/(T(\mathbf{p}) + p^0)$ kanssa [12]. Jotta aikamuunnos olisi määritelty, pitää rataa pitkin olla $V(t, \mathbf{q}) < 0$ tai vaihtoehtoisesti $T(\mathbf{p}) + p^0 > 0$. Tämä työ käsittelee vain liikettä maapallon potentiaalitentässä, jolloin näin on triviaalisti aina.

Aikamuunnoksen avulla saadaan Hamiltonin funktio muotoon

$$\Gamma(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = -\frac{T(\mathbf{p}) + p^0 + V(t, \mathbf{q})}{V(t, \mathbf{q})}. \quad (3.7)$$

Kun valitaan kappaleen 2.1.4 mukaisesti alkuarvoksi $p^0(t_0) = -T(\mathbf{p}(t_0)) - V(t_0, \mathbf{q}(t_0))$, on rataa pitkin $\Gamma \equiv 0$, jolloin on mahdollista käyttää Hamiltonin funktiona funktiota

$$\Lambda(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \log [1 + \Gamma(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p})], \quad (3.8)$$

missä \log on luonnollinen logaritmfunktio. Hamiltonin kanonisista liikeyhtälöistä (2.49) saadaan

$$\left. \frac{dq^i}{ds} \right|_{\gamma(s)} = \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial p^i} \right|_{\gamma(s)} = \frac{1}{1 + \Gamma} \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial p^i} \right|_{\gamma(s)} \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{dp^i}{ds} \right|_{\gamma(s)} = - \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} \right|_{\gamma(s)} = - \frac{1}{1 + \Gamma} \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial q^i} \right|_{\gamma(s)}, \quad (3.10)$$

jotka selvästi ovat *rataa* $\gamma(s) \mapsto (t(s), \mathbf{q}(t(s)), p^0(t(s)), \mathbf{p}(t(s)))$ *pitkin* oikeat kanoniset liikeyhtälöt [12].

Toisaalta nähdään, että

$$1 + \Gamma(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = - \frac{T(\mathbf{p}) + p^0}{V(q^0, \mathbf{q})}, \quad (3.11)$$

joten yhtälöstä (3.8) saadaan

$$\Lambda(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \log [T(\mathbf{p}) + p^0] - \log [-V(q^0, \mathbf{q})], \quad (3.12)$$

joka on jälleen yhtälön (3.1) mukaista separoitunutta muotoa.

Voidaan osoittaa, että logaritmfunktion lisäksi voitaisiin soveltaa mitä tahansa sellaista funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka derivaatta f' on aina positiivinen jollain soveltuvalla välillä, kuten esimerkiksi välillä $(0, \infty)$ kuten edellä [13]. Tällöin käytettävä Hamiltonin funktio olisi muotoa [12]

$$\Lambda(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = f(T(\mathbf{p}) + p^0) - f(-V(q^0, \mathbf{q})), \quad (3.13)$$

ja aikamuunnosfunktioiksi saataisiin [12]

$$G(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = f'(T(\mathbf{p}) + p^0), \quad (3.14)$$

joka jälleen rataa pitkin on ekvivalentti muodon $f'(-V(q^0, \mathbf{q}))$ kanssa [12]. Menettelyn hyötynä nähdään olevan mahdollisuus tehdä aikamuunnoksia ja säilyttää silti Hamiltonin funktion separoitu muoto (3.1). Lisäksi logaritmistä Hamiltonin funktiota käytettäessä Keplerin liikkeen (liite B) tapauksessa saadaan aikasiirtymää lukuunottamatta *eksakti* ratkaisu alla kuvattua leapfrog-menetttelyä käyttäen.

3.2 Leapfrog

Hamiltonin funktion eri osien määräämät eksponenttikuvaukset voidaan yhdistää Zassenhausin kaavan (2.87) määräämällä tavalla. Tavoitteena on löytää sellainen yhdistelmä

$$\prod_{i=0}^k \exp(\alpha_i h X_T) \exp(\beta_i h X_V),$$

että

$$\exp(h X_H) = \exp[h(X_T + X_V)] = \prod_{i=1}^k \exp(\alpha_i h X_T) \exp(\beta_i h X_V) + \mathcal{O}(h^{n+1}), \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \quad (3.15)$$

jolloin saatava numeerinen integrointimenetelmä on n :ttä astetta [13]. Tätä menettelyä voitaisiin käyttää missä tahansa tilanteessa, missä Hamiltonin funktio on jaettu kahteen osaan. Mikäli kuitenkin Hamiltonin funktio on yhtälön (3.1) mukaista muotoa, on yhtälön (3.15) määräämä differenssiyhtälöryhmä erityisen yksinkertaista muotoa [13]

$$q_{m+1}^i = q_m^i + h\alpha_m \frac{\partial T}{\partial p^i}(\mathbf{p}_m) \quad (3.16a)$$

$$p_{m+1}^i = p_m^i - h\beta_m \frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}_m), \quad (3.16b)$$

kaikille $i = 0, \dots, n$, ja $m = 1, \dots, k$, missä $(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{p}_{k+1}) = (\mathbf{q}(t + kh), \mathbf{p}(t + kh))$ ja $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$.

Eräs yleisesti käytetty valinta on $k = 2$ ja $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ [13]. Tällöin saadaan niin sanottu toisen asteen *leapfrog-menetelmä*, jota kutsutaan myös *yleistetyksi leapfrog-menetelmäksi* tai *Verlet'n menetelmäksi* [13, 23]. Yhtälöiden (3.16) avulla auki kirjoitettuna menetelmästä saadaan yhden aika-askeleen yli

$$q_{n+\frac{1}{2}}^i = q_n^i + \frac{h}{2} \frac{\partial T}{\partial p^i}(\mathbf{p}_n) \quad (3.17a)$$

$$p_{n+1}^i = p_n^i - h \frac{\partial V}{\partial q^i}(\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}) \quad (3.17b)$$

$$q_{n+1}^i = q_{n+\frac{1}{2}}^i + \frac{h}{2} \frac{\partial T}{\partial p^i}(\mathbf{p}_{n+1}) \quad (3.17c)$$

kaikille $i = 0, \dots, n$, missä on merkitty $q_n^i = q^i(nh)$ ja $p_n^i = p^i(nh)$.

Havaitaan, että yhtälöt (3.17) ovat *reversiibelit ajan suhteen*. Tämä voidaan kirjoittaa symbolisessa muodossa $M_h T M_h = T$, missä M_h kuvaa menetelmän (3.17) antamaa aikasiirtoa askeleen h verran eteenpäin ja T on ajankääntöoperaattori [13]. Symplektisillä ja reversiibileillä menetelmillä on samankaltaisia geometrisia ominaisuuksia faasiavaruuden kannalta [13].

3.3 Kepler-liike

Kun logaritmisen Hamiltonin funktion avulla saatua leapfrog-integraattoria sovelletaan häiritsemättömän kahden kappaleen liikkeeseen (liite B), saadaan eksakti tulos lukuunottamatta aikavirhetä. Artikkeleissa [13, 23] on johdettu aikavirheelle analyyttinen esitys, jota tässä työssä käytetään.

Tutkitaan aikamuunnettua logaritmista Hamiltonin yhtälöä ja merkitään uutta aikaparametriä s :llä. Häiritsemättömän Kepler-liikkeen logaritminen Hamiltonin funktio on muotoa

$$\Lambda(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \log \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + p^0 \right) - \log \left(\frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|} \right) \quad (3.18)$$

johon voidaan soveltaa yhtälöjä (3.17).

Nyt kuitenkin parametri h yhtälöissä (3.17) ei ole parametrin s todellisen askeleen pituus. Olkoon leapfrog-askeleen alussa muuttujien arvot \mathbf{q}_a , \mathbf{p}_a ja t_a , jolloin todellinen parametrin askel-

pituus h_s ja leapfrogin parametri h riippuvat toisistaan yhtälöllä [23]

$$h = \frac{m}{\sqrt{p^0/2}} \tan\left(\frac{h_s}{m} \sqrt{\frac{p^0}{2}}\right) = \frac{m}{\sqrt{p^0/2}} \tan\left(\frac{\Delta E}{2}\right), \quad (3.19)$$

missä muuttujan

$$m = \|\mathbf{q}_a\| \left(\frac{\mathbf{p}_a^2}{2} + p^0\right) \quad (3.20)$$

voidaan tulkita olevan efektiivinen massa [23]. Nähdään siten, että vaikka leapfrog-algoritmista käytettävää askelpituutta h kasvatetaan kohti äärettömyyttä, on eksentrisen anomalian muutos ΔE aina korkeintaan π . Siten maksimaalinen Kepler-liikkeen siirto logaritmisella Hamiltonin funktiolla on puolikkaan ratakierroksen verran eksentrisen anomalian suhteen.

Arvoa h_s ei kuitenkaan tarvita algoritmin aikakorjaukseen. Aikakorjaus saadaan merkitsemällä

$$\zeta = \frac{h_s^2 p^0}{2m^2}, \quad (3.21)$$

ja

$$\tau = -\frac{h_s^3}{4m^2} \frac{\tan(\sqrt{\zeta}) - \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}^3}, \quad (3.22)$$

jolloin aikakorjaus voidaan sisällyttää logaritmiseen Hamiltonin funktioon kirjoittamalla yhtälö (3.18) muotoon

$$\Lambda(q^0, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \log\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + p^0\right) - \log\left(\frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|}\right) + \int_0^{p^0} \frac{\tau}{h} dp^0. \quad (3.23)$$

Osa II

Satelliittien suhteelliset radat

4 Satelliittiradat

Yksittäisen satelliitin rataa voidaan käsitellä kahden kappaleen ongelmana, jossa toisena osapuolena on massiivinen *keskuskappale*. Tässä työssä keskuskappaleena on aina maapallo. Satelliitin massa voidaan olettaa niin pieneksi, että satelliitin maapalloon aiheuttama voima voidaan jättää huomiotta.

Olkoon maapallon massa M_{\oplus} , satelliitin massa m ja

$$\mathcal{M} = G(M_{\oplus} + m) \approx GM_{\oplus}, \quad (4.1)$$

missä G on gravitaatiovakio. Nyt jos satelliitin paikkavektori keskuskappaleen painopisteen suhteen on \mathbf{r} , pätee liitteen B.2 mukaisesti

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathcal{M} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.2)$$

Yhtälöstä (4.2) ei voida ratkaista paikkaa \mathbf{r} suoraan ajan t funktiona, mutta ratkaisu voidaan esittää esimerkiksi rataelementtien (B.35) avulla [24].

4.1 Tasaisen Kepler-liikkeen perturbaatiot

Ideaalitulanteessa satelliitti kiertää keskuskappaletta tasaisesti kahden kappaleen ongelman analyttisen ratkaisun mukaisesti, kuten liitteessä B.2 on selvitetty. Maapalloa kiertävän satelliitin tapauksessa ratkaisussa joudutaan kuitenkin ottamaan huomioon useista eri lähteistä rataan aiheutuvia häiriöitä eli *perturbaatioita*.

4.1.1 Gravitaatiopotentiaali

Koska maapallo ei ole muodoltaan täydellisen pallomainen, täytyy varsinkin matalalla kiertävien LEO (Low Earth Orbit) -satelliittien ratoja laskettaessa ottaa maapallon muoto huomioon gravitaatiopotentiaalissa [1].

Maapallon gravitaatiopotentiaalilin kolmiulotteinen muoto voidaan esittää palloharmonisten funktioiden avulla liitteen B.6 yhtälön (B.47) mukaisesti muodossa

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^n P_{nm}(\cos \theta) (C_n^m \cos(m\psi) + S_n^m \sin(m\psi)). \quad (4.3)$$

Tässä työssä otetaan huomioon kuitenkin vain vähäisin poikkeama pallonmuodosta, jolloin potentiaali supistuu yhtälön (B.49) mukaiseen muotoon

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_{\oplus}}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right]. \quad (4.4)$$

Potentiaalin muodon voidaan osoittaa vastaavan pistemäistä kappaletta, jota kiertää massarengas tasossa $\theta = 0$.

Keskeisin häiriötermin J_2 vaikutus on perisentrin argumentin ω ja nousevan solmun pituuden Ω sekulaarinen muuttuminen. Näiden elementtien derivaatoille voidaan johtaa lausekkeet

$$\dot{\Omega} = -\frac{3J_2 R_{\oplus}^3 \sqrt{a\mathcal{M}} \cos i}{2a^4(1-e^2)^2} \quad (4.5)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3J_2 R_{\oplus}^3 \sqrt{a\mathcal{M}} [3 + 5 \cos(2i)]}{8a^4(1-e^2)^2}, \quad (4.6)$$

missä R_{\oplus} on maapallon säde.

Inkliinoituneet radat kiertyvät z -akselin ($\theta = 0$ -akselin) ympäri samalla kun perisentrin argumentti kiertyy ratatasoa pitkin. Lisäksi yhtälöstä (4.6) nähdään, että perisentrin argumentti on vakio inkliinaation arvolla $i = \sin^{-1}(2/\sqrt{5})$.

4.1.2 Muut taivaankappaleet

Satelliitin rataan vaikuttavat myös muiden, kaukaisempien taivaankappaleiden gravitaationaaliset perturbaatiot. Maan tapauksessa kyseeseen tulevat erityisesti kuun ja auringon aiheuttamat häiriöt. Näiden häiriöiden analyttinen mallintaminen on hyvin vaikeaa, sillä yleiseen $n:n$ kappaleen ongelmaan ei ole olemassa pätevää analyttistä ratkaisua [1].

Näitä häiriöitä voidaan kuitenkin mallintaa numeerisesti. Jos merkitään satelliitin paikkaa suhteessa keskuskappaleen keskipisteeseen vektorilla \mathbf{r} ja k :nnen huomioitavan muun taivaankappaleen paikkaa \mathbf{r}_k :lla ja massaa m_k :lla, saadaan häiritseväksi kiihtyvyydeksi

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} = \sum_k m_k \left(\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \right). \quad (4.7)$$

Sulkulausekkeen ensimmäinen termi on häiritsevän taivaankappaleen aiheuttama kiihtyvyys satelliittiin, ja toinen termi on taivaankappaleen aiheuttama kiihtyvyys maapalloon. Näiden erotuksena saadaan satelliittiin aiheutuva suhteellinen häiritsevä kiihtyvyys.

Havaitsemalla, että

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}|^3} \quad (4.8)$$

ja

$$\nabla \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_k}{r_k^3} = \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} \quad (4.9)$$

voidaan todeta, että taivaankappaleiden häiritsevä potentiaali on muotoa

$$\delta V = \sum_k m_k \left(\frac{-1}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\|} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_k}{r_k^3} \right). \quad (4.10)$$

Matalalla kiertäville satelliiteille auringon ja kuun aiheuttamat häiriöt ovat useita kertaluokkia pienempiä kuin J_2 -termin tai ilmakehän kitkan aiheuttamat häiriöt, ja ne voidaan siksi usein jättää huomiotta. Häiritsevä vaikutus on kuitenkin lähes riippumaton satelliitin radan korkeudesta, ja geosynkronisille satelliiteille se on enää kertaluokkaa J_2 -termin vaikutusta pienempi [1].

4.1.3 Ilmakehän kitka

Ilman kitkan vaikutus satelliittiin voidaan kuvata kitkavoiman yhtälöllä

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2} C_D A \rho |\dot{\mathbf{r}}| \dot{\mathbf{r}}, \quad (4.11)$$

missä C_D on ilmanvastuserroin ja A satelliitin poikkipinta-ala nopeusvektorin suunnan suhteen.

Ilmakehän kitka on merkittävä ainoastaan lähellä maata kiertäville satelliiteille, sillä ilmakehän tiheys laskee likimäärin eksponentiaalisesti yhtälön

$$\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_0) \quad (4.12)$$

mukaan, missä h on korkeus merenpinnan tasosta, ρ_0 on keskimääräinen tiheys merenpinnan tasolla ja h_0 ilmakehän skaalakorkeus. Tämän yhtälön avulla voidaan johtaa yksinkertainen malli rataelementtien muutokselle ilmakehän vaikutuksesta. Todellisuudessa ilmakehän vaikutus on huomattavasti monimutkaisempi, ja rataelementtien muutosten ennustaminen vaikeaa [1].

Ilmakehän keskimääräinen vaikutus satelliittiin voidaan kvalitatiivisesti päätellä toteamalla, että Kepler-liikkeessä oleva satelliitti liikkuu nopeimmin ollessaan lähellä perisentriä, jolloin yhtälön (4.11) mukaan myös hidastava voima on suurimmillaan. Seurauksena on aposentrin siirtyminen lähemmäs keskuskappaletta ja siten eksentrisyyden väheneminen sekä isoakselin puolikkaan lyheneminen. Erityisesti isoakselin puolikkaan lyheneminen on keskimäärin lineaarista, ja siten helposti mallinnettavissa [1].

4.1.4 Auringon säteilypain

Auringon säteilypaineen vaikutus satelliittiin vaihtelee riippuen auringon säteilyvuosta, satelliitin heijastavuudesta ja sen orientaatiosta aurinkoon nähden sekä siitä kuinka suuri osa auringosta on näkyvissä. Vaikutus voidaan likimääräisesti esittää häiritsevän kiihtyvyyden yhtälöllä

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} = -\eta \epsilon_{\odot} \frac{\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|^3}, \quad (4.13)$$

missä $\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}$ auringon sijainti satelliitista nähtynä, ϵ_{\odot} satelliitista riippuva vakio ja η funktio, jolla otetaan huomioon auringon mahdollinen varjostuminen.

Käytännön seuraukset auringon säteilypaineen aiheuttamasta häiriöstä ovat oskillaatiot kaikissa rataelementeissä. Näiden oskillaatioiden jaksot voivat olla aina vuosien pituisia [1].

4.2 Koordinaatistovalinnat

Satelliittien suhteellista liikettä voitaisiin periaattessa tutkia suoraan inertiaalikoordinaatistossa käyttämällä kiihtyvyyksien erotusta, mutta käytännössä monissa menetelmissä käytetään muunlaisia koordinaatistoja.

Useasti käytetään kahta koordinaatistoa, joista toinen on keskuskappaleen mukana liikkuva inertiaalinen koordinaatisto, ja toinen on pääsatelliitin paikkaan kiinnitetty epäinertiaalinen koordinaatisto. Ensinmainitussa koordinaatistossa lasketaan pääsatelliitin liike, ja jälkimmäisessä ratkaistaan varsinainen satelliittien suhteellinen liike.

4.2.1 ECI-koordinaatisto

Maapallon satelliittien tapauksessa inertiaalisesta koordinaatistosta käytetään nimitystä maapalokeskeinen inertiaalikoordinaatisto eli ECI-koordinaatisto (sanoista Earth-centered inertial). Merkitään ECI-koordinaatistoa kirjaimella \mathcal{N} , jolloin voidaan määritellä se ortonormaalien kannan $\mathcal{B}_{\mathcal{N}} = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ avulla. Tässä \mathbf{e}_x on kevättasauspisteeseen osoittava vektori ja \mathbf{e}_z osoittaa kohti taivaanpallon pohjoisnapaa. Kantavektori \mathbf{e}_y on siten ekvaattoritason suuntainen [25].

4.2.2 LVLH-koordinaatisto

Pääsatelliitin paikkaan kiinnitetty koordinaatisto on nimeltään paikallisesti pysty- ja vaakasuuntainen koordinaatisto eli LVLH-koordinaatisto (Local Vertical Local Horizontal). Merkitään LVLH-koordinaatistoa kirjaimella \mathcal{L} , ja määritellään se ortonormaalien kannan $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_h\}$ avulla. Vektori \mathbf{e}_r on maata ja pääsatelliittia yhdistävän janan suuntainen ja osoittaa maasta pois päin. Vektori \mathbf{e}_h on yhdensuuntainen pääsatelliitin ratatason normaalin kanssa, ja siten \mathbf{e}_θ on pääsatelliitin ratatason suuntainen osoittaen kohti kiertosuuntaa. LVLH-koordinaatisto kiertyy pääsatelliitin liikkeen mukana, ja tätä pyörimistä voidaan merkitä vektorilla [25]

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\theta \mathbf{e}_\theta + \omega_h \mathbf{e}_h. \quad (4.14)$$

Kun seuraajasatelliitin paikka ilmaistaan LVLH-koordinaatistossa vektorilla

$$\boldsymbol{\rho} = \xi \mathbf{e}_r + \vartheta \mathbf{e}_\theta + \zeta \mathbf{e}_h, \quad (4.15)$$

saadaan yhtälön (4.14) avulla suhteellisen liikkeen yleiseksi liikeyhtälöksi

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}_D - \mathbf{f} + \mathbf{u}. \quad (4.16)$$

Yhtälössä \mathbf{f} on pääsatelliittiin vaikuttava voima, \mathbf{f}_D on seuraajasatelliittiin vaikuttava voima ja \mathbf{u} ulkoinen kontrolli. Tässä tapauksessa ulkoinen kontrolli tarkoittaa seuraajasatelliitin suorittamaa kiihdytystä [25].

5 Analyttiset menetelmät

Satelliittien suhteellisten ratojen määrittäminen analyttisesti perustuu koordinaatistojen ja rataelementtien valitsemiseen siten, että satelliittien suhteellisille paikoille saadaan sopivaa muotoa olevat yhtälöt. Yhtälöiden on siis oltava sellaisia, että niistä on mahdollista ratkaista satelliitin suhteellinen paikka ajan tai sitä vastaavan suureen funktiona eksplisiittisesti. Tällöin alkuehtoja käyttämällä voidaan satelliitin tilasta hetkellä t_0 suoraan ratkaista tila millä tahansa halutulla hetkellä t .

Analyttisten menetelmien ongelmana on erityisesti kappaleessa 4.1 mainitut eroavaisuudet tasaisesta Kepler-liikkeestä. Näiden vaikutusten analyttinen mallintaminen johtaa vaikeasti ratkaistaviin yhtälöihin, eikä yleistä eksplisiittistä ratkaisua ole vielä kehitetty.

5.1 Hillin-Clohessyn-Wiltshiren menetelmä

Yksinkertainen tapa analyttisen approksimaation kehittämiseksi kahden satelliitin suhteelliselle liikkeelle johtaa ns. Hill-Clohessy-Wiltshire-yhtälöihin (HCW-yhtälöt), joista käytetään myös nimityksiä *Hillin menetelmä* tai *Clohessyn-Wiltshiren menetelmä*. Menetelmässä oletetaan, että pääsatelliitti liikkuu ympyräradalla, jolloin $\omega_r = \omega_\theta = 0$. Lisäksi tällöin r ja $\dot{\theta}$ ovat vakioita [3].

LVLH-koordinaateissa on pääsatelliittiin vaikuttava gravitaatiopotentiaali $V = -\mathcal{M}/|\mathbf{r}|$, joten koska $\mathbf{r}_D = (r + \xi)\mathbf{e}_r + \vartheta\mathbf{e}_\theta + \zeta\mathbf{e}_h$, voidaan seuraajasatelliittiin vaikuttava gravitaatiopotentiaali V_D kirjoittaa muodossa [25]

$$V_D = -\frac{\mathcal{M}}{|\mathbf{r}_D|} = -\frac{\mathcal{M}}{r} \left(1 + \frac{\varrho^2}{r^2} + 2\frac{\xi}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.1)$$

Tämä lauseke voidaan kehittää auki Legendren polynomien avulla, jolloin saadaan

$$V_D = -\frac{\mathcal{M}}{r} \left[1 - \frac{\xi}{r} + \frac{2\xi^2 - \vartheta^2 - \zeta^2}{r^2}\right] + \tilde{V}, \quad (5.2)$$

kun määritellään

$$\tilde{V} = -\frac{\mathcal{M}}{r} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n P_n(\xi/\varrho), \quad (5.3)$$

missä P_n on n :s Legendren polynomi. Komponenttimuodossa saadaan yhtälön (4.16) avulla suhteellisen liikkeen likeyhtälöt [25]

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\theta}\dot{\vartheta} - \left(\dot{\theta}^2 + 2\frac{\mathcal{M}}{r^3}\right)\xi - \ddot{\theta}\vartheta = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\xi} \quad (5.4a)$$

$$\ddot{\vartheta} + 2\dot{\theta}\dot{\xi} - \left(\dot{\theta}^2 - \frac{\mathcal{M}}{r^3}\right)\vartheta + \ddot{\theta}\xi = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\vartheta} \quad (5.4b)$$

$$\ddot{\zeta} + \frac{\mathcal{M}}{r^3}\zeta = -\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\zeta}. \quad (5.4c)$$

Kun nyt oletetaan pääsatelliitin liikkuvan ympyräradalla, jolloin $r = a$, ja linearisoidaan differentiaalinen gravitaatiopotentiaali eli asetetaan $\tilde{V} = 0$ saadaan HCW-yhtälöt [25, 3]

$$\ddot{\xi} - 2n\dot{\vartheta} - 3n^2\xi = 0 \quad (5.5)$$

$$\ddot{\vartheta} + 2n\dot{\xi} = 0 \quad (5.6)$$

$$\ddot{\zeta} + n^2\zeta = 0, \quad (5.7)$$

missä $n = \sqrt{\mathcal{M}/a^3}$. Huomattavaa HCW-yhtälöissä on, että viimeisin yhtälö ei ole kytketty aikaisempiin, ja siten liike \mathbf{e}_n -suuntaan on tavallista harmonista värähtelyä. HCW-yhtälöt voidaan ratkaista suljetussa muodossa, jolloin saadaan [1, 3]

$$\xi(t) = \frac{\dot{\xi}_0}{n} \sin(nt) - \left(3\xi_0 + 2\frac{\dot{\vartheta}_0}{n}\right) \cos(nt) + 4\xi_0 + 2\frac{\dot{\vartheta}_0}{n} \quad (5.8a)$$

$$\vartheta(t) = \left(6\xi_0 + 4\frac{\dot{\vartheta}_0}{n}\right) \sin(nt) + 2\frac{\dot{\xi}_0}{n} \cos(nt) - \left(6n\xi_0 + 3\frac{\dot{\vartheta}_0}{n}\right)t + \vartheta_0 - 2\frac{\dot{\xi}_0}{n} \quad (5.8b)$$

$$\zeta(t) = \zeta_0 \cos(nt) + \frac{\dot{\zeta}_0}{n} \sin(nt) \quad (5.8c)$$

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_0 \cos(nt) + (3n\xi_0 + 2\dot{\vartheta}_0) \sin(nt) \quad (5.9a)$$

$$\dot{\vartheta}(t) = (6n\xi_0 + 4\dot{\vartheta}_0) \cos(nt) - 2\dot{\xi}_0 \sin(nt) - 6n\xi_0 - 3\dot{\vartheta}_0 \quad (5.9b)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\zeta_0 n \sin(nt) + \dot{\zeta}_0 \cos(nt). \quad (5.9c)$$

Ratkaisu on jaksollinen lukuunottamatta \mathbf{e}_θ -suuntaa, sillä ϑ muuttuu sekulaarisesti ajan funktiona. Yhtälön muodosta havaitaan, että tämä johtuu joko seuraajasatelliitin suuremmasta etäisyydestä tai suhteellisesta alkunopeudesta pääsatelliitin kiertosuunnan suhteen.

HCW-yhtälöiden $\vartheta(t)$ -ratkaisun sekulaarinen termi voidaan eliminoida valitsemalla alkuarvot siten että

$$6n\xi_0 = -3\dot{\vartheta}_0. \quad (5.10)$$

Tällöin satelliitit eivät Hillin approksimaatiolla ajaudu erilleen. Todellisuudessa tilanne on monimutkaisempi.

5.2 Tschaunerin–Hempelien menetelmä

HCW-yhtälöt pätevät ainoastaan mikäli pääsatelliitti on ympyräradalla. Mikäli halutaan tutkia suhteellista liikettä elliptisellä radalla, pitää lähtökohtana pitää epälineaarisia yhtälöitä (5.4). Näistä saadaan analyttinen Tschaunerin–Hempelien menetelmä (TH-menetelmä) vaihtamalla riippumattomaksi muuttujaksi todellinen anomalia, skaalamalla LVLH-koordinaatit sopivasti ja lopuksi linearisoimalla yhtälöt [5].

Muuttujanvaihdosta $t = t(f)$ seuraa

$$\frac{d}{dt} = \dot{f} \frac{d}{df} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos f)^2 \frac{d}{df} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \dot{f}^2 \frac{d^2}{df^2} + \ddot{f} \frac{d}{df} \\ &= \frac{\mu}{p^3} (1 + e \cos f)^3 \left[(1 + e \cos f) \frac{d^2}{df^2} - 2e \sin f \frac{d}{df} \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Merkitään derivaattaa f :n suhteen heittomerkillä $'$.

Seuraavaksi skaalataan seuraajasatelliitin paikkavektori $\boldsymbol{\rho}$ pääsatelliitin paikkavektorin pituudella, jolloin saadaan seuraajasatelliitin skaalatulle paikalle

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{r} = x\mathbf{e}_i + y\mathbf{e}_\theta + z\mathbf{e}_h, \quad (5.13)$$

missä

$$x = \xi/r, \quad y = \vartheta/r, \quad z = \zeta/r. \quad (5.14)$$

Paikan derivaatoiksi todellisen anomalian suhteen saadaan [25]

$$\boldsymbol{\rho}' = (1 + e \cos f) \frac{\boldsymbol{\rho}'}{p} - e \sin f \frac{\boldsymbol{\rho}}{p} \quad (5.15)$$

$$\boldsymbol{\rho}'' = (1 + e \cos f) \frac{\boldsymbol{\rho}''}{p} - 2e \sin f \frac{\boldsymbol{\rho}'}{p} - e \cos f \frac{\boldsymbol{\rho}}{p}. \quad (5.16)$$

Muuttujanvaihdon ja skaalauksen jälkeen saadaan yhtälöt (5.4) muotoon

$$x'' - 2y' = \frac{1+x}{1+e \cos f} \left(1 - \frac{1}{d^3} \right) \quad (5.17a)$$

$$y'' + 2x' = \frac{y}{1+e \cos f} \left(1 - \frac{1}{d^3} \right) \quad (5.17b)$$

$$z'' = -\frac{z}{1+e \cos f} \left(e \cos f + \frac{1}{d^3} \right), \quad (5.17c)$$

missä seuraajasatelliitin etäisyys origosta $d = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}$ [5]. Jos tämä etäisyys on pieni, voidaan yhtälöissä (5.17) esiintyvä termi d^{-3} kirjoittaa sarjakehitelmänä Legendren polynomien avulla. Kun lopputuloksesta jätetään pois kaikki korkeampaa kuin ensimmäistä astetta olevat ter-

mit, saadaan tuloksena Tschauner–Hempel-liikeyhtälöt: [25]

$$x'' - 2y'' - \frac{3x}{1 + e \cos f} = 0 \quad (5.18a)$$

$$y'' + 2x' = 0 \quad (5.18b)$$

$$z'' + z = 0. \quad (5.18c)$$

Yhtälöille (5.18) on olemassa analyttinen ratkaisu muotoa [25]

$$x(f) = \frac{d_1}{e} \cos(f)(1 + e \cos f) + d_2 \sin(f)(1 + e \cos f) + d_3 \sin(f)(1 + e \cos f)I(f) \quad (5.19a)$$

$$y(f) = -\frac{d_1}{e} \sin(f)(2 + e \cos f) + \frac{d_2}{e}(1 + e \cos f)^2 + \frac{d_3}{e}[(1 + e \cos f)^2 I(f) + \cot f] + d_4 \quad (5.19b)$$

$$z(f) = d_5 \cos f + d_6 \sin f, \quad (5.19c)$$

missä funktio $I(f)$ voidaan esittää integraalimuodossa [25]

$$I(f) = \int_{f_0}^f \frac{df}{\sin^2(f)(1 + e \cos f)^2}. \quad (5.20)$$

Ratkaisusta on heti nähtävissä, että myös TH-mallissa liike z -suunnassa on periodista. Toisaalta x ja y kasvavat sekulaarisesti johtuen termeistä, joissa esiintyy kasvava funktio $I(f)$. Ratkaisut (5.19) ovat ongelmallisia sikäli, että yhtälön (5.20) integrandi ei ole määritelty todellisen anomalian arvoilla $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ongelma voidaan kiertää kirjoittamalla funktio $I(f)$ Keplerin funktion $K(f)$ avulla. Merkitsemällä

$$K(f) = \int_{f_0}^f \frac{\eta^3}{(1 + e \cos f)^2} df = E - e \sin E = M = n\Delta t, \quad (5.21)$$

missä $\eta = \sqrt{1 - e^2}$, saadaan yhtälöt (5.18) muotoon

$$x(f) = c_1 \cos(f)(1 + e \cos f) + c_2 \sin(f)(1 + e \cos f) + \frac{2c_3}{\eta^2} \left[1 - \frac{3e}{2\eta^3} \sin(f)(1 + e \cos f)K(f) \right] \quad (5.22a)$$

$$y(f) = -c_1 \sin(f)(2 + e \cos f) + c_2 \cos(f)(2 + e \cos f) - \frac{3c_3}{\eta^5} (1 + e \cos f)^2 K(f) + c_4 \quad (5.22b)$$

$$z(f) = c_5 \cos f + c_6 \sin f \quad (5.22c)$$

$$x'(f) = -c_1(\sin f + e \sin 2f) + c_2(\cos f + e \cos 2f) - \frac{3ec_3}{\eta^2} \left[\frac{\sin f}{(1 + e \cos f)} + \frac{1}{\eta^3}(\cos f + e \cos 2f)K(f) \right] \quad (5.23a)$$

$$y'(f) = -c_1(2 \cos f + e \cos 2f) - c_2(2 \sin f + e \sin 2f) - \frac{3c_3}{\eta^2} \left[1 - \frac{e}{\eta^3}(2 \sin f + e \sin 2f)K(f) \right] \quad (5.23b)$$

$$z'(f) = -c_5 \sin f + c_6 \cos f. \quad (5.23c)$$

5.3 Halsallin–Palmerin menetelmä

Eräs moderni analyttinen menetelmä suhteellisten satelliittiratojen laskemiseen on Halsallin ja Palmerin kehittämä käyräviivaisiin episyklisiin koordinaatteihin ja satelliittien liikkeen ositteluun perustuva keino. Menetelmä soveltuu sellaisille radoille, joiden eksentrisyys on pieni [6].

Lähtemällä yhtälöistä (B.41) ja lisäämällä perturbaatioiden vaikutus, saadaan yksittäisen satelliitin liikkeelle yhtälöt

$$r = a(1 + \rho) - ae \cos(\alpha - \alpha_P) + a\chi \sin[(1 + \kappa)\alpha] + \Delta r \frac{1}{2} \cos[2(1 + \kappa)\alpha] \quad (5.24a)$$

$$\lambda = (1 + \kappa)\alpha + 2e[\sin(\alpha - \alpha_P) + \sin \alpha_P] - 2\chi\{1 - \cos[(1 + \kappa)\alpha]\} + \Delta \lambda \frac{1}{2} \sin[2(1 + \kappa)\alpha] \quad (5.24b)$$

$$I = I_0 + \Delta I \frac{1}{2}(1 - \cos[2(1 + \kappa)\alpha]) \quad (5.24c)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \theta\alpha + \Delta \Omega \frac{1}{2} \sin[2(1 + \kappa)\alpha]. \quad (5.24d)$$

Yhtälöissä sekulaariset muutokset esitetään muuttujilla ρ , κ ja θ . Pitkäjaksoiset variaatiot saadaan χ -termeistä, ja lyhytjaksoiset muutokset $\Delta \frac{1}{2}$ -termeistä [6].

Suhteellisia ratoja tutkittaessa lähdetään oletuksesta, että tutkittavilla satelliiteilla on lähes samat orbitaalelementit. Tällöin satelliittien liike voidaan jakaa tarkastelupisteen liikkeeseen, ja satelliittien liikkeeseen sen ympäri. Halsall ja Palmer ovat käyttäneet tarkastelupisteen kiertoratana ympyrärataa, jonka ratataso kiertyy taivaanpallon akselin ympäri maapallon potentiaalin parillisten J -termien vaikutuksesta. Näin voidaan poistaa suhteellisista radoista sekulaariset J -termien aiheuttamat muutokset [6].

Episykliesityksessä saadaan tarkastelupisteen liikkeen yhtälöiksi

$$r_c = a_c(1 + \rho_c) \quad (5.25)$$

$$\lambda_c = \alpha_c(1 + \kappa_c) \equiv \tau \quad (5.26)$$

$$I_c = I_{c0} \quad (5.27)$$

$$\Omega_c = \Omega_{c0} + \theta_c \alpha_c \quad (5.28)$$

$$\alpha_c = n_c(t - t_{ec}), \quad (5.29)$$

missä alaindeksi c viittaa tarkastelupisteeseen (guiding centre) [6].

Sekulaaristen muutosten termit saadaan maapallon potentiaalin J -termien (yhtälö (B.48)) avulla muotoihin [6]

$$\rho = \sum_{l=1}^{\infty} (2l-1) J_{2l} \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos I_0) \quad (5.30)$$

$$\theta = \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l} \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}^1(\cos I_0) \quad (5.31)$$

$$\kappa + \theta \cos I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} (4l-1) J_{2l} \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^{2l} P_{2l}(0) P_{2l}(\cos I_0), \quad (5.32)$$

missä funktiot P_{2l} ovat Legendren polynomeja ja funktiot P_{2l}^1 assosioituja Legendren polynomeja. Tässä työssä tarkastellaan vain J_2 -termin vaikutusta, jolloin edeltävistä yhtälöistä saadaan suoraan

$$\rho = -\frac{1}{4} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^2 (3 \cos I_0 - 1) \quad (5.33)$$

$$\theta = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^2 \cos(I_0) \sqrt{1 - \cos^2 I_0} \quad (5.34)$$

$$\kappa = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a_c} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (3 \cos I_0 - 1) - \cos^2(I_0) \sqrt{1 - \cos^2 I_0} \right]. \quad (5.35)$$

Tarkastelupisteen liikkeen lisäksi pitää selvittää yksittäisen satelliitin liike suhteessa tarkastelupisteeseen. Mikäli määritellään k :nnen satelliitin suhteelliset episykliset koordinaatit yhtälöillä

$$\hat{r}_k = r_k - r_c \quad (5.36)$$

$$\hat{\lambda}_k = \lambda_k - \lambda_c \quad (5.37)$$

$$\hat{I}_k = I_k - I_c \quad (5.38)$$

$$\hat{\Omega}_k = \Omega_k - \Omega_c, \quad (5.39)$$

saadaan niille lopulta muodot [6]

$$\hat{r}_k = \hat{a}_k + a_c \hat{\rho}_k - a_c e_k \cos[(1 - \kappa)\tau - \alpha_{Pk}] + a_c \chi \sin \tau + \Delta r_2^1 \cos(2\tau) \quad (5.40a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_k = & -\alpha_e (1 + \kappa_c) + \tau \left(\hat{\kappa}_k - \frac{3\hat{a}_k}{2a_c} \right) + 2e_k \{ \sin[(1 - \kappa)\tau - \alpha_{Pk}] + \sin \alpha_{Pk} \} \\ & - 2\chi (1 - \cos \tau) + \Delta \lambda_2^1 \sin(2\tau) \end{aligned} \quad (5.40b)$$

$$\hat{I}_k = \hat{I}_{k0} + \Delta I_2^1 [1 - \cos(2\tau)] \quad (5.40c)$$

$$\hat{\Omega}_k = \hat{\Omega}_{k0} + \hat{\theta}_k \tau + \Delta \Omega_2^1 \sin(2\tau). \quad (5.40d)$$

Varsinainen suhteellinen paikka suhteessa tarkastelupisteeseen voidaan nyt esittää erityisessä käyräviivaisessa koordinaatistossa suhteellisten episyklisten koordinaattien avulla. Ensin todetaan, että suhteellinen inkliinaatio \tilde{I} tarkastelupisteen ja satelliitin ratatasojen välillä saadaan yhtälöstä [6]

$$\cos \tilde{I} = \cos I_c \cos I_k + \sin I_c \sin I_k \cos \hat{\Omega}_k. \quad (5.41)$$

Seuraavaksi saadaan tarkastelupisteen ja satelliitin ratatasojen leikkauspisteen kulmaetäisyys ratatasojen nousevista solmuista eli kulmat \mathcal{O}_c ja \mathcal{O}_k . Suhteellisen inkliinaation avulla saadaan [6]

$$\cos \mathcal{O}_c = \frac{\cos \tilde{I} \cos I_c - \cos I_k}{\sin \tilde{I} \sin I_c} \quad (5.42)$$

$$\cos \mathcal{O}_k = \frac{\cos I_c - \cos \tilde{I} \cos I_k}{\sin \tilde{I} \sin I_k}. \quad (5.43)$$

Nyt tarkastelupisteen ja satelliitin kulmaetäisyydet l_c ja l_k ratatasojen leikkauspisteestä saadaan episyklisten koordinaattien avulla seuraavasti:

$$l_c = \lambda_c - \mathcal{O}_c \quad (5.44)$$

$$l_k = \lambda_k - \mathcal{O}_k. \quad (5.45)$$

Tämä kuva on poistettu tekijänoikeudellisista syistä
This image has been removed due to copyright reasons

Kuva 5.1: Koordinaattien ν ja χ asema taivaanpallolla [6].

Halsallin ja Palmerin käyttämä käyräviivainen koordinaatisto satelliitin suhteellisen paikan esittämiseksi määritellään nyt koordinaateilla (ϖ, ν, ζ) . Tässä $\varpi = \hat{r}_k$ on suora välimatka säteen suunnassa, ja ν ja ζ kulmaetäisyyksiä taivaanpallolla kuten kuvassa 5.1 on esitetty. Edellä laskettujen suureiden avulla saadaan nyt [6]

$$\tan \nu = \frac{\cos \tilde{I} \tan l_k - \tan l_c}{1 + \cos \tilde{I} \tan l_c \tan l_k} \quad (5.46)$$

$$\sin \zeta = \sin \tilde{I} \sin l_k. \quad (5.47)$$

Kun nämä yhtälöt kehitetään auki toiseen asteeseen vakio- ja sekulaaritermeissä, ja ensimmäiseen

asteeseen muuten, ja sijoitetaan tulokseen yhtälöt (5.40a) saadaan aikariippuvat yhtälöt [6]

$$\varpi = \hat{a}_k + a\hat{\rho}_k - a [e_k \cos[(1 - \kappa)\tau - \alpha_{Pk}] + \chi \sin \tau + \Delta r_2^1 \cos(2\tau)] \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \nu = & -\alpha_e(1 + \kappa) - 2\chi + 2e_k \sin(\alpha_{Pk} - \alpha_e) + \hat{\Omega}_{k0} \cos I - \frac{1}{2}\hat{I}_{k0}\hat{\Omega}_{k0} \sin I \\ & + 2e_k \sin[(1 - \kappa)\tau - \alpha_{Pk}] + 2\chi \cos \tau + (\Delta\lambda_2^1 + \cos I \Delta\Omega_2^1) \sin(2\tau) \\ & + \left(-\frac{3\hat{a}_k}{2a} + \hat{\kappa}_k + \cos I \hat{\theta}_k \right) \tau \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\zeta = \left\{ \hat{I}_{k0} + \Delta I_2^1 [1 - \cos(2\tau)] \right\} \sin \tau - \sin I \left[\hat{\Omega}_{k0} + \hat{\theta}_k \tau + \Delta\Omega_2^1 \sin(2\tau) \right] \cos \tau. \quad (5.50)$$

Tässä alaindeksittömät suureet viittaavat tarkastelupisteen suureisiin.

Nyt kahden satelliitin suhteellinen rata saadaan differentioimalla edeltävien yhtälöiden k -riippuvaiset termit. Tästä saadaan k :nnen ja l :nnen satelliitin suhteelliselle radalle yhtälöt [6]

$$\delta\varpi = \delta\varpi_0 - a\delta e \cos[(1 - \kappa)\tau - \Psi] \quad (5.51)$$

$$\delta\nu = \delta\nu_0 + 2\delta e \sin[(1 - \kappa)\tau - \Psi] \quad (5.52)$$

$$\delta\zeta = (I_{k0} - I_{l0}) \sin \tau - \sin I \left(\Omega_{k0} - \Omega_{l0} - \theta\delta\alpha_e + \frac{3}{2}J_2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \sin I (I_{k0} - I_{l0}) \tau \right) \cos \tau, \quad (5.53)$$

missä

$$\delta e^2 = e_k^2 + e_l^2 - 2e_k e_l \cos(\alpha_{Pk} - \alpha_{Pl}) \quad (5.54)$$

$$\tan \Psi = \frac{e_k \sin \alpha_{Pk} - e_l \sin \alpha_{Pl}}{e_k \cos \alpha_{Pk} - e_l \cos \alpha_{Pl}} \quad (5.55)$$

$$\delta\alpha_e = n(t_{ek} - t_{el}). \quad (5.56)$$

Yhtälöistä (5.51) nähdään, että menetelmän approksimaatiossa satelliittimuodostelman sisäisissä suhteellisissa liikkeissä ei ole sekulaarisia komponentteja. Lähteen [6] mukaan ongelmaa ei ole, kun tiedostetaan, että mallia voidaan käyttää vain *muodostelman elinaikana*. Muodostelman elinaika puolestaan liittyy juuri rataa pitkin tapahtuvan sekulaarisen eron kasvamiseen.

Menetelmällä laskettujen tulosten siirtäminen tavanomaisempiin koordinaatistoihin, kuten LVLH-koordinaatistoon, ei ole suoraviivaista. Jos satelliittien väliset välimatkat ovat kuitenkin pieniä, voidaan kuvan 5.1 koordinaatiston akselit käsittää myös lineaarisina [6].

6 Numeeriset menetelmät

Satelliittien suhteellisten ratojen numeerinen mallintaminen on luonteeltaan samankaltainen ongelma kuin yksittäisten satelliittien ratojen numeeriseen ratkaisemiseen. Menetelmissä lähdetään alkuehdoista hetkellä t_0 ja integroidaan liikeyhtälöitä numeerisesti yli pienten aikavälien h kunnes saavutetaan tila halutulla ajan hetkellä t [1].

Periaatteessa suhteellinen rata voidaan selvittää ratkaisemalla jokaisen muodostelman satelliitin rata numeerisesti erikseen, ja vertaamalla niitä toisiinsa. Käytännössä tämä johtaa erotuksiin, joissa toisistaan vähennetään kaksi lukua, joiden suhteellinen ero on hyvin pieni. Tämä voi johtaa ratkaisumenetelmästä riippuen numeerisiin epätarkkuuksiin. Toisaalta voi olla, ettei käytetystä menetelmästä johtuen saada helposti laskettua kahden eri satelliitin paikkoja samalla ajan hetkellä, kuten logaritmissen Hamiltonin funktion tapauksessa. Ratkaisuna voidaan käyttää jotain menetelmää, jossa lasketaan numeerisesti erikseen satelliittien suhteellista liikettä, ja toisaalta erikseen suhteellisen liikkeen koordinaatiston liikettä maapallon ympäri.

Tässä työssä tutkitaan numeerisista menetelmistä vain logaritmissen Hamiltonin funktion avulla johdettua menetelmää. Menetelmä kuuluu edellä mainituista kategorioista jälkimmäiseen, ja siinä integroidaan samanaikaisesti pääsatelliitin liikkeen ja satelliittien suhteellisen liikkeen kehitys.

6.1 Logaritminen Hamiltonin funktio

Olkon maapallon gravitaatiopotentiaali yhtälön (B.49) mukaista muotoa, joka karteesisissa koordinaateissa voidaan kirjoittaa muotoon

$$V(x,y,z) = -\frac{\mathcal{M}}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r} \right)^2 \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (6.1)$$

missä $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ on satelliitin paikkavektorin pituus. Valitaan nyt yleistetyiksi koordinaateiksi karteesiset paikkakoordinaatit ja yleistetyiksi liikemääriksi tavalliset liikemäärän komponentit mv_i . Kun lisäksi otetaan käyttöön laajennettu faasiavaruus ja kanonisten konjugaattien pari $t = q_0$ ja p_0 , saadaan maapalloa kiertävän satelliitin Hamiltonin funktioksi

$$H(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + p^0 - \frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_\oplus}{\|\mathbf{q}\|} \right)^2 \left(\frac{3q^3^2}{2\mathbf{q}^2} - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (6.2)$$

missä satelliitin massa on jätetty kirjoittamatta, sillä se supistuu liikeyhtälöistä pois.

Soveltamalla nyt kappaleen 3.3 mukaisesti logaritmissen Hamiltonin funktion menetelmää aikakorjauksella, saadaan uudeksi Hamiltonin funktioksi

$$\Lambda(t, \mathbf{q}, p^0, \mathbf{p}) = \log \left[\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + p^0 \right] - \log \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}^5} - \frac{1}{2\mathbf{q}^3} \right) \right] + \int_0^{p^0} \frac{\tau}{h} dp^0, \quad (6.3)$$

missä vakiotermi $\log \mathcal{M}$ on jätetty pois, sillä se häviää derivoinneissa.

Hamiltonin funktion Λ avulla saadaan systeemin kanonisiksi liikeyhtälöiksi (kun aikaparametri s ja rata $\lambda(s)$ ymmärretään implisiittisesti)

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p^0} = \frac{1}{\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + p^0} + \frac{\tau}{h} \quad (6.4a)$$

$$\frac{dq^i}{ds} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p^i} = \frac{p^i}{\frac{1}{2} \mathbf{p}^2 + p^0}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.4b)$$

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^0} = 0 \quad (6.4c)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^i}{ds} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} &= \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}^5} - \frac{1}{2\mathbf{q}^3} \right) \right]^{-1} \frac{q^i}{\mathbf{q}^3} \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{3}{2\mathbf{q}^2} \right) \right] \\ &= \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{1}{2\mathbf{q}^2} \right) \right]^{-1} \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{3}{2\mathbf{q}^2} \right) \right] \frac{q^i}{\mathbf{q}^2}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.4d)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp^3}{ds} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q^3} &= \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}^5} - \frac{1}{2\mathbf{q}^3} \right) \right]^{-1} \frac{q^3}{\mathbf{q}^3} \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{9}{2\mathbf{q}^2} \right) \right] \\ &= \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{1}{2\mathbf{q}^2} \right) \right]^{-1} \left[1 - J_2 R_\oplus^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}^4} - \frac{9}{2\mathbf{q}^2} \right) \right] \frac{q^3}{\mathbf{q}^2}. \end{aligned} \quad (6.4e)$$

Näistä liikeyhtälöistä saadaan nyt kappaleen 3.2 mukainen toisen asteen leapfrog-integrointialgoritmi, joka yhden aika-askeleen yli kirjoitettuna on

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_n^2 + p^0} + \frac{\tau}{2} \quad (6.5a)$$

$$q_{n+\frac{1}{2}}^i = q_n^i + \frac{h}{2} \frac{p^i}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_n^2 + p^0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.5b)$$

$$p_{n+1}^i = p_n^i - h \left[1 - J_2 R_{\oplus}^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^4} - \frac{1}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2} \right) \right]^{-1} \\ \times \left[1 - J_2 R_{\oplus}^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^4} - \frac{3}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2} \right) \right] \frac{q^i}{\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2}, \quad i = 1, 2, \quad (6.5c)$$

$$p_{n+1}^3 = p_n^3 - h \left[1 - J_2 R_{\oplus}^2 \left(\frac{3q^{3^2}}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^4} - \frac{1}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2} \right) \right]^{-1} \\ \times \left[1 - J_2 R_{\oplus}^2 \left(\frac{15q^{3^2}}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^4} - \frac{9}{2\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2} \right) \right] \frac{q^3}{\mathbf{q}_{n+\frac{1}{2}}^2} \quad (6.5d)$$

$$t_{n+1} = t_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_{n+1}^2 + p^0} + \frac{\tau}{2} \quad (6.5e)$$

$$q_{n+1}^i = q_{n+\frac{1}{2}}^i + \frac{h}{2} \frac{p^i}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_{n+1}^2 + p^0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.5f)$$

6.2 Suhteellisen radan ratkaiseminen

Periaatteessa kahden lähekkäisen satelliittiradan suhteellinen kehitys voidaan johtaa lähtemällä tavallisista Kepler-liikkeen liikeyhtälöistä

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (6.6)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathcal{M}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{r}}, \quad (6.7)$$

missä R on häiritsevä kiihtyvyyys (tässä työssä J_2 -termin aiheuttama). Differentioimalla nämä saadaan differentiaaliyhtälöt

$$d\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{v} \quad (6.8)$$

$$d\mathbf{v} = -\mathcal{M} \left[\frac{d\mathbf{r}}{r^3} - 3\frac{\mathbf{r}}{r^5}(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \right] + \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{r}^2} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.9)$$

Periaatteessa tästä voitaisiin ratkaista $d\mathbf{r}(t)$, mutta ekvivalentti ja käytännössä helpompi lähestymistapa on differentioida leapfrog-algoritmi (6.5) rivi riviltä. Tuloksena saadaan kokoelma yhtälöitä differentiaalain $d\mathbf{r}(t)$ aikakehityksen laskemiseksi analogisesti paikan ja nopeuden numeerisen integroinnin kanssa. Menetelmä voidaan tulkita siten, että leapfrog-algoritmi antaa pääsatelliitin radan kehityksen ja differentiaali seuraajasatelliitin suhteellisen paikan kehityksen pääsatelliittiin verrattuna.

Johtuen käytettyjen aika-askelten makroskooppisuudesta, ei differentioinnilla saatu tulos $d\mathbf{r}(t)$ vastaa fysikaalista matkaeroa kuin likimäärin. Sen sijaan eksakti tulos saadaan, kun määritellään funktiojoukossa $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ operaattori $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ehdolla

$$\Delta f(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, \dots, x^n + \Delta x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (6.10)$$

kun $x^i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tässä luonnollisella tavalla $\Delta x^i = x^i + \Delta x^i - x^i$ kaikilla i . Operaattoria Δ kutsutaan *differenssioperaattoriksi* ja intuitiivisesti se vastaa funktion kokonaisdifferentiaalia, jossa otetaan huomioon myös korkeampaa astetta olevat termit. Mikäli määriteltäisiin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ saataisiin tavanomainen ns. *forward difference* -operaattori. Esimerkinä havaitaan välittömästi, että kun reaaliuuttujen x ja y tulon kokonaisdifferentiaalille pätee

$$d(xy) = dxy + xdy, \quad (6.11)$$

niin operaattoria Δ soveltamalla saadaan

$$\Delta(xy) = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y. \quad (6.12)$$

Analogia kokonaisdifferentiaalain kanssa on selvä. Rajoitutaan nyt tarkastelemaan (pisteittäisen kertolaskun suhteen) kommutatiivista funktioiryhmää $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\}$, jolloin differenssioperaattorin nähdään toteuttavan seuraavat laskusäännöt kaikille $f, g \in \mathcal{F}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\Delta a = 0 \quad (6.13a)$$

$$\Delta(af + bg) = a\Delta f + b\Delta g \quad (6.13b)$$

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\Delta g \quad (6.13c)$$

$$\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\Delta f - f\Delta g}{g(\Delta g - g)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : g(x) \neq 0, \quad (\Delta g - g)(x) \neq 0. \quad (6.13d)$$

Tavoitteena on algoritmi suhteellisten suureiden $\Delta\mathbf{q}$, $\Delta\mathbf{p}$, $\Delta q^0 = \Delta t$ ja Δp^0 aikakehityksen määrittämiseksi. Tavoitteeseen päästään nyt soveltamalla differenssioperaattoria leapfrog-algoritmiin (6.5) rivi riviltä käyttäen määritelmää (6.10) ja laskusääntöjä (6.13). Pitkien mekaanisten

laskutoimitusten jälkeen saadaan seuraava algoritmi:

$$\begin{aligned} \Delta t_{n+\frac{1}{2}} = \Delta t_n + \frac{h}{2} & \left[\frac{1}{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_n + \Delta \mathbf{p}_n)^2 + p^0 + \Delta p^0} - \frac{1}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_n^2 + p^0} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{8h^3} \left\{ \frac{1}{p^{0^3}} \left[\mathbf{q}_n^4 (\mathbf{p}_n^2 + 2p^0)^4 \tan \left(\frac{2h^2 p^0}{\mathbf{q}_n^2 (\mathbf{p}_n^2 + 2p^0)^2} \right) \right] - \frac{2h^2 \mathbf{q}_n^2 (\mathbf{p}_n^2 + 2p^0)^2}{p^{0^2}} \right. \\ & \quad + \frac{(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2}{(p^0 + \Delta p^0)^3} \left[2h^2 (p^0 + \Delta p^0) [(\mathbf{p}_n + \Delta \mathbf{p}_n)^2 + 2(p^0 + \Delta p^0)]^2 \right. \\ & \quad \quad \quad \left. - (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2 [(\mathbf{p}_n + \Delta \mathbf{p}_n)^2 + 2(p^0 + \Delta p^0)]^4 \right. \\ & \quad \quad \quad \left. \left. \times \tan \left(\frac{2h^2 (p^0 + \Delta p^0)}{(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2 ((\mathbf{p}_n + \Delta \mathbf{p}_n)^2 + 2(p^0 + \Delta p^0))^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.14a)$$

$$\Delta q_{n+\frac{1}{2}}^i = \Delta q_n^i + \frac{h}{2} \left[\frac{p^i + \Delta p^i}{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_n + \Delta \mathbf{p}_n)^2 + p^0 + \Delta p^0} - \frac{p^i}{\frac{1}{2}\mathbf{p}_n^2 + p^0} \right], \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.14b)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{n+1}^i = \Delta p_n^i - h & \left[\frac{2q^i (J_2 R_{\oplus}^2 + 4\mathbf{q}_n^2)}{J_2 R_{\oplus}^2 \mathbf{q}_n^2 - 3J_2 R_{\oplus}^2 q^3 + 2\mathbf{q}_n^4} \right. \\ & \quad - \frac{2(q^i + \Delta q^i) [J_2 R_{\oplus}^2 + 4(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2]}{J_2 R_{\oplus}^2 (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2 - 3J_2 R_{\oplus}^2 (q^3 + \Delta q^3)^2 + 2(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^4} \\ & \quad \left. + \frac{5(q^i + \Delta q^i)}{(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2} - \frac{5q^i}{\mathbf{q}_n^2} \right], \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.14c)$$

$$\begin{aligned} \Delta p_{n+1}^3 = \Delta p_n^3 - h & \left[- \frac{4q^3 (J_2 R_{\oplus}^2 - 2\mathbf{q}_n^2)}{J_2 R_{\oplus}^2 \mathbf{q}_n^2 - 3J_2 R_{\oplus}^2 q^3 + 2\mathbf{q}_n^4} \right. \\ & \quad - \frac{4(q^3 + \Delta q^3) [J_2 R_{\oplus}^2 - 2(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2]}{-J_2 R_{\oplus}^2 (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2 + 3J_2 R_{\oplus}^2 (q^3 + \Delta q^3)^2 - 2(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^4} \\ & \quad \left. + \frac{5(q^3 + \Delta q^3)}{(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^2} - \frac{5q^3}{\mathbf{q}_n^2} \right], \end{aligned} \quad (6.14d)$$

missä kaksi viimeistä askelta on jätetty pois, sillä laskut $\Delta t_{n+\frac{1}{2}} \rightarrow \Delta t_{n+1}$ ja $\Delta q_{n+\frac{1}{2}}^i \rightarrow \Delta q_{n+1}^i$ suoritetaan vastaavasti kuin yhtälöissä (6.14a) ja (6.14b). Käytännön ohjelmakoodissa yksinkertaisempi lähestymistapa on tehdä derivaattoja (6.4) vastaavat aliohjelmien, ja hyödyntää suoraan differenssioperaattorin määritelmää (6.10) kuin eksplisiittisesti auki laskettuja kaavoja (6.14).

Yhtälöistä (6.14) on havaittavissa, että Δt ei yleisesti ottaen ole nolla, vaikka onkin absoluuttiselta arvoltaan pieni. Tästä on seurauksena ylimääräinen paikkaero pää- ja seuraajasatelliitin välillä rataa pitkin. Koska vertailua varten on hyödyllistä saada seuraajasatelliitin suhteellinen paikka samalla ajanhetkellä kuin pääsatelliitin paikka, voidaan arvoja tallennettaessa suorittaa vielä yksi leapfrog-integrointiaskel seuraajasatelliitin paikalle.

Korjaus suoritetaan ratkaisemalla aikaeroa Δt vastaava parametrin s aika-askel h_s aikamuun-

nosyhtälöstä (2.47), missä funktio G on määritelty kaavalla (3.6). Saadaan

$$h_s = \int_0^{\Delta t} \frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|} dt. \quad (6.15)$$

Koska nyt Δt on hyvin pieni on $\|\mathbf{q}\|$ lähes vakio, ja voidaan approksimoida

$$h_s \approx \frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|} \int_0^{\Delta t} dt = \frac{\mathcal{M}}{\|\mathbf{q}\|} \Delta t. \quad (6.16)$$

Aika-askelta h_s vastaava leapfrogissa tarvittava aika-askel h voidaan nyt ratkaista yhtälöstä (3.19).

Koska tunnetusti aika-askeleen vaihtaminen kesken symplektisen integroinnin rikkoo menetelmän symplektisen luonteen [13], ei lopputulos ole täysin tarkka, mutta kappaleen 7 numeeriset tarkastelut osoittavat, että tehty approksimaatio on tämän työn tarkoitusta varten tarpeeksi tarkka.

7 Menetelmien vertailua

Valitaan aluksi vertailtaviksi menetelmiksi logaritmisen Hamiltonin funktion menetelmä, HCW-menetelmä ja TH-menetelmä. Näille kaikille on yhteistä sekulaarisen eron mallintaminen alkuarvoista riippuen. Halsallin–Palmerin menetelmä puolestaan ei mallinna satelliittiryhmän sisällä sekulaarisia muutoksia, joten sitä ei tässä työssä tarkastella.

Jotta saataisiin jonkinlainen kuva erilaisten suhteellisten ratalaskumenetelmien käytännön eroista, on verrattava niiden antamia tuloksia. Koska tässä työssä tarkastellaan vain J_2 -termin vaikutusta, voidaan rajoittua tarkastelemaan vain joitain yksittäistapauksia.

Lisäksi todetaan, että vaikka useamman satelliitin muodostelmien tutkiminen olisi mahdollista, riittää menetelmien eroavaisuuksien esittämiseen kahden satelliitin suhteellisen radan selvittäminen. Valitaan testimuodostelma koostuvaksi siten kahdesta satelliitista, joista toinen valitaan pääsatelliitiksi.

7.1 Alkuarvojen valinta

Tässä työssä verrattavista menetelmistä on Hillin–Clohessyn–Wiltshiren-menetelmä tarkoitettu pienen eksentrisyyden radoilla liikkuvien satelliittien suhteellisten liikkeiden tarkasteluun. Alkuarvot on siis valittava tätä silmällä pitäen. Luontevaa on tehdä tarkastelut kahdessa tapauksessa: kun pääsatelliitti on lähes ympyräradalla, ja kun pääsatelliitin radan eksentrisyys on pieni.

7.1.1 Ratakorkeuden valinta

Vertailulaskujen alkuarvoiksi on luontevaa valita LEO-ratoja, sillä tällöin gravitaatiopotentiaalin J_2 -termin vaikutus on suhteellisesti voimakkaimmillaan [1]. Toisaalta LEO-radoilla myös ilmakehän kitkan vaikutus on voimakkaimmillaan.

Ilmakehä ei muodosta ongelmaa, kun oletetaan, että tarkasteltavien satelliittiparien satelliitit ovat identtisiä ja suhteelliset välimatkat pieniä. Tällöin ilmakehän voidaan katsoa jarruttavan kumpaakin parin satelliiteista yhtäläisesti. Nyt ilman kitka ei olennaisesti muuta suhteellisen radan muotoa. Suhteellisten ratalaskumenetelmien vertailu on siis mielekästä, vaikka ilman kitka jätettäisiin huomiotta [6].

Voidaan siten valita testimuodostelman keskimääräiseksi lentokorkeudeksi LEO-satelliitille tyyppillinen noin 700 kilometriä, jolloin radan puoliakselin pituudeksi geosentrisissä yksiköissä (liite A.2) saadaan $a \approx 1,11$.

7.1.2 Simulaation kesto

Tarkoituksena on tutkia erityisesti J_2 -termin ja pääsatelliitin radan eksentrisyyden vaikutuksia eri menetelmiin. Simulaation keston on siten oltava riittävä, jotta vaikutukset ovat selkeästi nähtävissä. Häiriötermin J_2 vaikutus rataelementteihin on kuvattu yhtälöiden (4.5) ja (4.6) avulla.

Pienen inklinaation radoille sekä $\dot{\Omega}$ että $\dot{\omega}$ ovat geo-yksiköissä kertaluokkaa J_2 eli noin 10^{-3} . Jos simulaation kestoksi valitaan noin vuorokausi eli geoyksiköissä noin 100 aikayksikköä, ovat muutokset rataelementeissä Ω ja ω kertaluokkaa 10^{-1} eli siten hyvin havaittavissa.

Kun pääsatelliitin puoliakselin pituus on $a = 1,11$, on sen kierrosaika geo-yksiköissä Keplerin III lain (B.25) perusteella $P = 2\pi \cdot 1,11^{\frac{3}{2}} \approx 7,35 \approx 1,64$ h. Vuorokauten mahtuu siten 14 kokonaista kierrosta. Voidaan päätellä, että yhden vuorokauden pituinen simulaatioaika on riittävä haluttujen vaikutusten tutkimiseen.

7.1.3 J_2 -termin vaikutukset

Maan potentiaalin J_2 -termin vaikutuksesta nousevan solmun pituudessa ja perisentrin argumentissa tapahtuu sekulaarista muutosta yhtälöiden (4.5) ja (4.6) mukaisesti. Jotta satelliittimuodostelma pysyisi koossa pitkällä aikavälillä, on näiden muutosten vaikutus minimoitava. On siis syytä valita testimuodostelmankin rataelementit tätä silmällä pitäen. Yhtälöistä (4.5) ja (4.6) nähdään, että mikäli radoilla on sama inklinaatio, saadaan pää- ja seuraajasatelliittien puoliakseleille a_1 , a_2 ja eksentrisyyksille e_1 , e_2 ehto

$$\sqrt{a_1^7(1 - e_1^2)^2} = \sqrt{a_2^7(1 - e_2^2)^2}. \quad (7.1)$$

Kuitenkin mikäli toisen satelliitin puoliakseli on suurempi, jää tämä satelliitti radallaan jälkeen johtuen keskiliikkeen $n = \sqrt{\mathcal{M}/a^3}$ arvon muuttumisesta. Puoliakselien, ja siten yhtälön (7.1) perusteella eksentrisyyksien, ero on syytä jättää vähäiseksi. Mikäli puoliakselien ero on Δa , saadaan keskiliikkeen eroksi

$$\Delta n = a^{-\frac{3}{2}} - (a + \Delta a)^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{3}{2} \frac{\Delta a}{\sqrt{a^5}}, \quad (7.2)$$

kun $\mathcal{M} = 1$. Sijoittamalla arvo $a = 1,11$ saadaan paikan erolle Δx rataa pitkin arvio

$$\Delta x \approx \Delta n R_{\oplus} \approx 33000 \text{ km/h} \cdot \Delta a. \quad (7.3)$$

Puoliakselien erotuksen on siten oltava korkeintaan kertaluokkaa 10^{-5} , jotta satelliittien paikkaero säilyy kilometrien mittaluokassa kun simulaation kokonaiskesto on noin vuorokausi.

7.1.4 Seuraaajasatelliitin suhteellinen paikka

HCW- ja TH-menetelmät perustuvat oletukseen, että etäisyys satelliittien välillä on hyvin pieni. Niiden toimivuutta silmällä pitäen on siis seuraajasatelliitin lähdeittävä simulaation alussa hyvin läheltä pääsatelliittia.

Viitteitä [3] ja [5] tutkimalla voidaan päätellä, että kymmenien metrien kertaluokkaa oleva suhteellinen etäisyys ei ole liian suuri. Tällöin välimatka suhteessa etäisyyteen massakeskipisteestä on kertaluokkaa 10^{-6} .

7.1.5 Lopulliset alkuarvot

Kun otetaan huomioon edeltävät tarkastelut, voidaan valita alkuarvoista ensin pääsatelliitin rataelementit. Valitut rataelementit on listattu taulukoissa I ja II. Tämän jälkeen valitaan seuraajasatelliitin paikka siten, että sen paikkavektori LVLH-koordinaatistossa on (15 m, 15 m, 15 m) ja nopeusvektori (−0,01 m/s, 0,00 m/s, − 0,01 m/s).

LVLH-paikka- ja nopeusvektoreiden avulla saadaan seuraajasatelliitin paikka- ja nopeusvektorit ECI-koordinaatistossa, mistä saadaan edelleen seuraajasatelliitin rataelementit. Taulukoissa I ja II on esitetty seuraajasatelliitin rataelementit erotuksen avulla suhteessa pääsatelliitin rataelementteihin.

Taulukko I: Minimaalisen eksentrisyyden alkuarvot ilmaistuna pääsatelliitin rataelementtien ja rataelementtien erotuksen avulla

a [geo]	e	I [°]	Ω [°]	ω [°]	M [°]
1,110	$5,000 \cdot 10^{-4}$	15,00	45,00	90,00	15,00
Δa [geo]	Δe	ΔI [°]	$\Delta \Omega$ [°]	$\Delta \omega$ [°]	ΔM [°]
$4,700 \cdot 10^{-6}$	$-6,758 \cdot 10^{-6}$	$7,427 \cdot 10^{-4}$	$-8,885 \cdot 10^{-3}$	4,568	−4,555

Taulukko II: Pienen eksentrisyyden alkuarvot ilmaistuna pääsatelliitin rataelementtien ja rataelementtien erotuksen avulla

a [geo]	e	I [°]	Ω [°]	ω [°]	M [°]
1,110	0,1000	15,00	45,00	90,00	15,00
Δa [geo]	Δe	ΔI [°]	$\Delta \Omega$ [°]	$\Delta \omega$ [°]	ΔM [°]
$2,794 \cdot 10^{-6}$	$-1,008 \cdot 10^{-5}$	$8,203 \cdot 10^{-4}$	$-7,897 \cdot 10^{-3}$	$2,957 \cdot 10^{-2}$	$-1,760 \cdot 10^{-2}$

7.2 Ohjelmakoodi

Kaikki tässä työssä käytettävät algoritmit toteutettiin kokonaisuudessaan käyttäen OCTAVE-ohjelmointikieltä [26] sen käytännöllisyyden ja vapaan saatavuuden vuoksi.

Tarvittavat aliohjelmat ja algoritmitoteutukset koottiin omiin tiedostoihinsa, joiden täydelliset listaukset ovat liitteessä C. Ohjelmakoodi on kirjoitettu pääasiassa ajatellen nopeaa kirjoitus- ja testaussykliä, jolloin paikoitellen selkeydestä ja nopeudesta on tingitty.

7.3 Tulokset

Tarkoituksena oli tutkia HCW-, TH- ja logH-menetelmien tarkkuutta yleisesti, ja lisäksi HCW- ja TH-menetelmien virhettä kun J_2 -termi otetaan huomioon. Tätä varten laskettiin ensin kaikkien kolmen testatun menetelmän antamat tulokset ilman J_2 -termin vaikutusta, ja verrattiin niitä kahden kappaleen ongelman analyttisen ratkaisun avulla saatuun suhteelliseen rataan.

Tämän jälkeen laskettiin logH-menetelmän antama suhteellinen rata J_2 -vaikutuksen kanssa, ja verrattiin tulosta HCW- ja TH-menetelmien antamiin ratoihin. Jotta HCW- ja TH-menetelmien välille saataisiin selvä ero, laskettiin kaikki laskut taulukoiden I ja II mukaisilla kaksilla alkuarvoilla.

Simulaation ajallinen kesto geoyksiköissä oli noin 13800 aikayksikköä. Aikaväli jaettiin osiin siten, että logH-menetelmän aikaparametrin askeleeksi tuli 0,05. Fysikaalinen aika-askel oli tällöin kaikissa simulaatioissa suhteessa hyvin lähellä tätä arvoa vaihdellen hieman simulaation kuluessa.

7.3.1 Vertailu ilman J_2 -vaikutusta

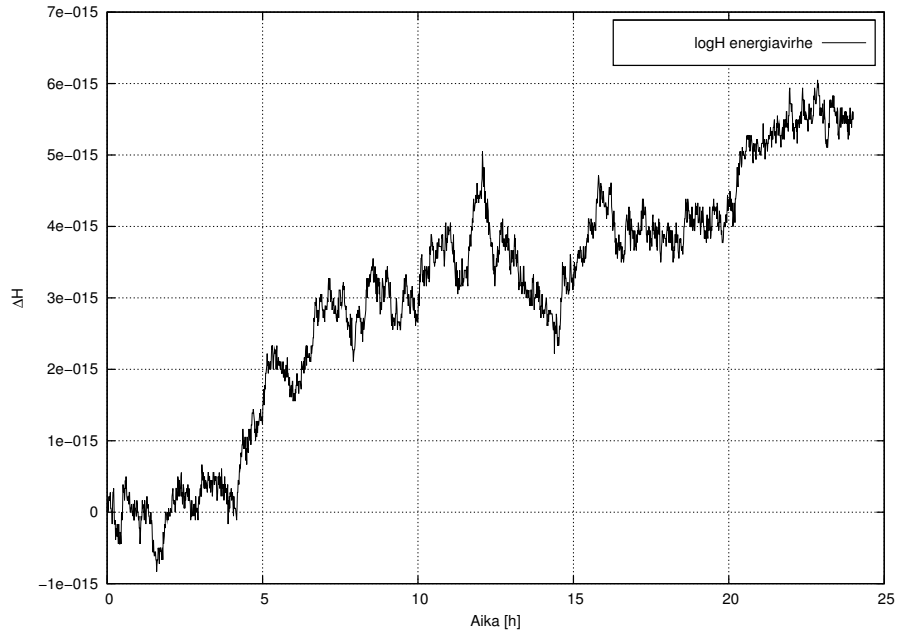
Ensin varmistettiin logH-menetelmän soveltuvuus vertailukohteeksi. Häiriötermin J_2 arvoksi asetettiin nolla, ja menetelmien antamat tulokset laskettiin minimaalisen eksentrisyyden alkuarvoilla (taulukko I).

Kuvaajassa 7.1 on esitetty pääsatelliitin Hamiltonin funktion (6.3) arvojen vaihtelu, kun rata on laskettu logH-menetelmällä. Kuvaajan nähdään esittävän numeerisista tekijöistä johtuvaa satunnaiskävelyä, jonka amplitudi on kertaluokkaa 10^{-16} eli konevakion kertaluokkaa käytetyllä laskenta-alustalla. Menetelmässä ei siis synny menetelmästä itsestään johtuvaa virhettä energiaan.

Eri menetelmien virheet verrattuna kahden ellipsiradan erotuksena saatuihin tarkkoihin arvoihin on esitetty kuvaajissa 7.2, 7.3 ja 7.4. Nähdään, että logH-menetelmällä saatu suhteellinen rata ei kappaleessa 6 tehdyillä approksimaatioilla ole eksakti, mutta kuitenkin kertaluokkia lähempänä tarkkaa ratkaisua kuin HCW- tai TH-menetelmät.

Kuvaajasta 7.5 nähdään virhevektorin normin eli kokonaispaikannusvirheen kehitys. Kaikilla menetelmillä virheessä on havaittavissa selvä sekulaarinen kehitys, joka HCW- ja TH-menetelmillä ehtii vuorokaudessa kasvattaa virheen noin neljään kilometriin. Kaikkien menetelmien sekulaarisen virheen pääasiallinen lähde on virheen komponentti rataa pitkin.

Voidaan siis päätellä, että kun J_2 -häiriötermin vaikutukset otetaan huomioon, ja vertaaminen ellipsiratojen analyttisten ratkaisujen erotukseen ei ole mahdollista, voidaan totuusmallina käyt-



Kuva 7.1: Pääsatelliitin Hamiltonin funktion muutos ΔH ensimmäisessä datapisteessä laskettuun arvoon verrattuna.

tää logH-menetelmää. Tällöin saadaan käsitys siitä, kuinka suuri virhe tehdään approksimoitaessa tilannetta HCW- ja TH-malleilla, ja miten virhe käyttäytyy ajan funktiona.

7.3.2 Vertailu J_2 -vaikutuksen kanssa

Minimaalinen eksentrisyys

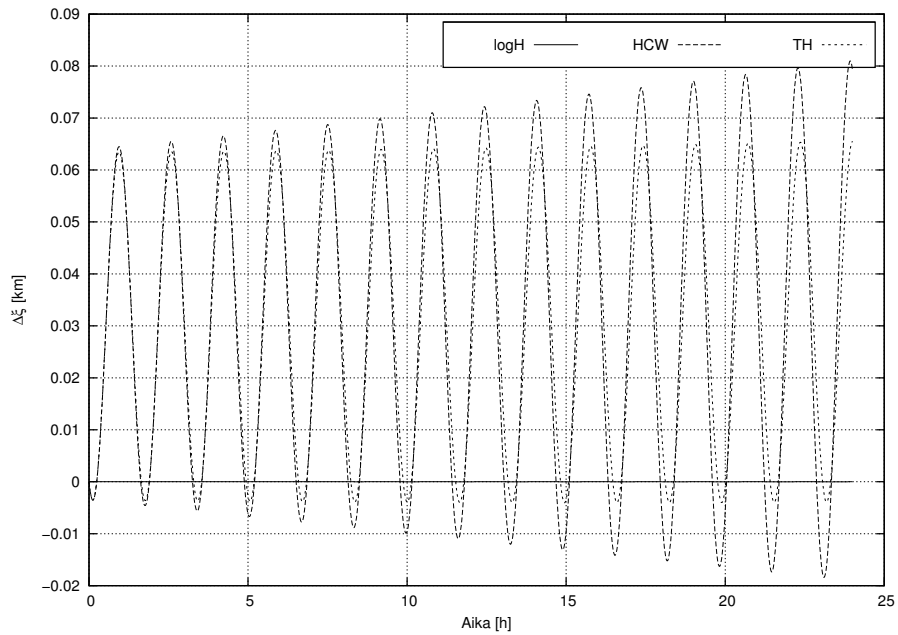
Nyt havaitaan, että logH-menetelmän antama rata ei ole enää aivan tarkka, sillä kuten kuvaajasta 7.6 voidaan nähdä, on energian virhe nolasta poikkeava. Virheen käytös ei ole kuitenkaan olennaisesti sekulaarista, kuten symplektiseltä menetelmältä teorian nojalla voisi odottaakin.

Kuvaajissa 7.7, 7.8 ja 7.9 on esitettyä HCW- ja TH-menetelmien virheet radiaalisuuntaan, rataa pitkin ja ratatasoa vastaan kohtisuorassa verrattuna logH-menetelmään. Havaitaan, että kuten tapauksessa $J_2 = 0$ on suurin osa erosta peräisin radan suuntaisesta virheestä, joka kasvaa sekulaarisesti.

Erona tapaukseen $J_2 = 0$ on nyt kuvaajassa 7.9 havaittava sekulaarinen kasvu virheen komponentissa $\Delta\zeta$ sekä HCW- että TH-menetelmillä. Teorian perusteella voidaan päätellä, että virhe johtuu J_2 -termin aiheuttamasta ratatasojen differentiaalisesta kiertymisestä.

Lisäksi on huomattava, että valitulla hyvin pienellä pääsatelliitin radan eksentrisyyden arvolla ($e = 0,0005$) ei HCW- ja TH-menetelmien välille synny merkittävää eroa.

Kuvaajassa 7.10 esitetty kokonaispaikannusvirhe Δr käyttäytyy olennaisesti samalla tavalla kuin ilmankin J_2 -termin vaikutusta. Hyvin pienen eksentrisyyden tapauksessa J_2 -termi ei siis vuo-



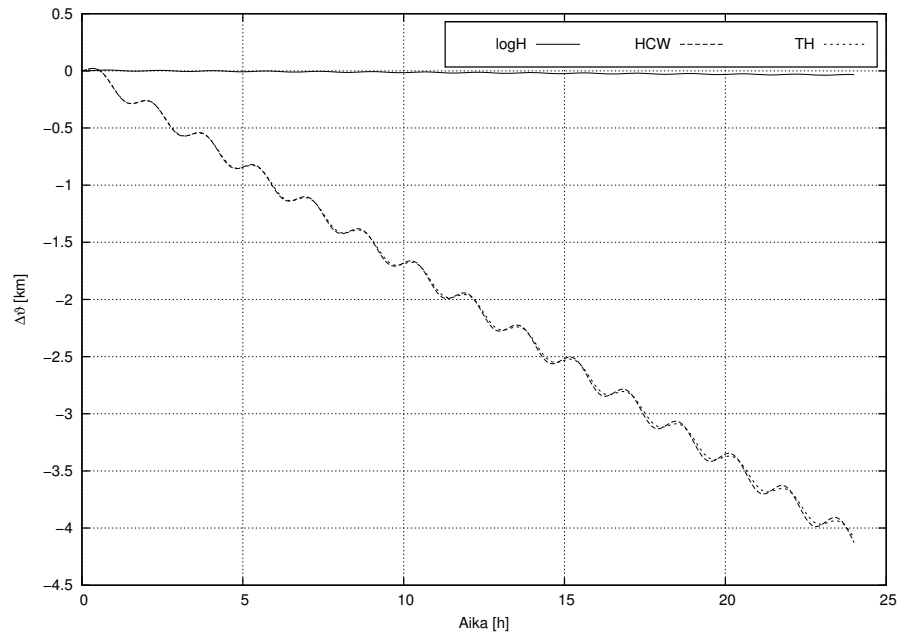
Kuva 7.2: Radiaalinen virhe ($\Delta\xi$) verrattuna Kepler-liikkeen avulla saatuun tarkkaan arvoon kun $J_2 = 0$.

rokauden aikaskaalassa ole merkittävä virhetekijä.

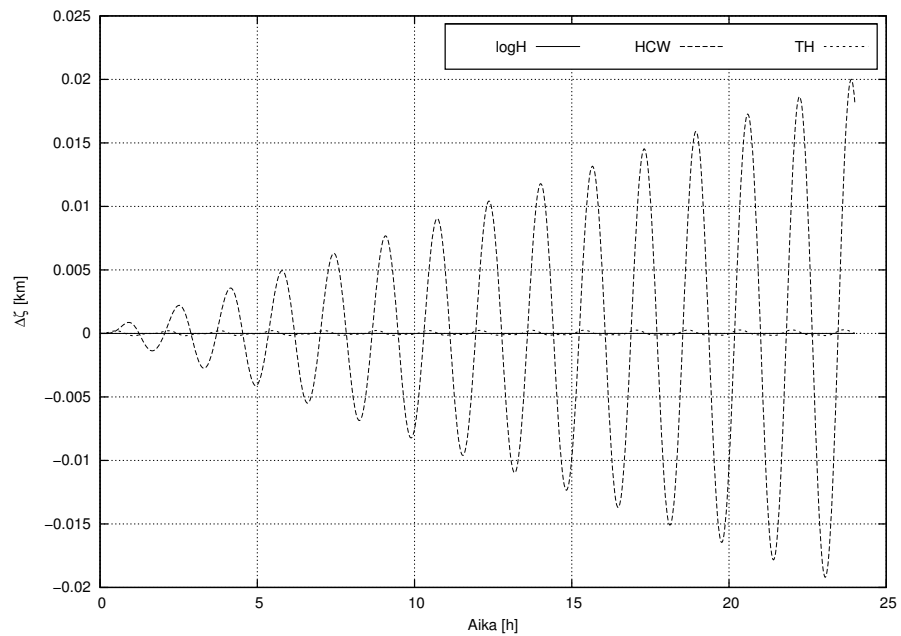
Pieni eksentrisyys

LogH-menetelmän energiavirhe (kuvaaja 7.11) käyttäytyy pääsatelliittin eksentrisyyden arvolla $e = 0,1$ olennaisesti samalla tavoin kuin edellä. Virheen heilahtelun maksimiampplitudi on kuitenkin nyt noin kaksi kertaluokkaa suurempi.

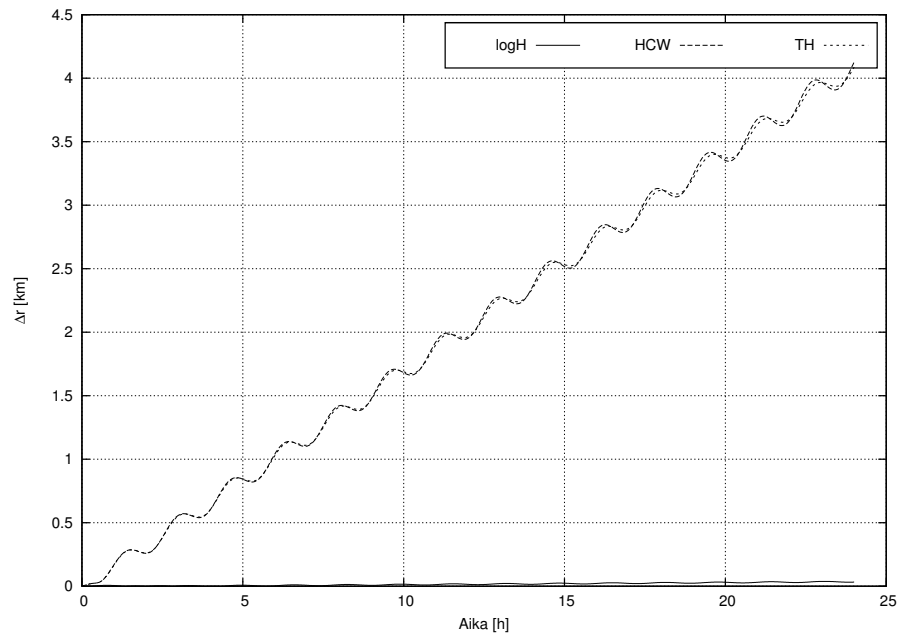
HCW- ja TH-menetelmien virheiden nähdään nyt kuvaajien 7.12, 7.13 ja 7.14 perusteella käyttäytyvän oskilloivasti eri jaksonajoilla. Jälleen kummankin menetelmän virhe rataa pitkin on merkittävin virhetekijä. Eksentrisyyden myötä HCW-menetelmän kokonaisvirhe kasvaa kuitenkin nyt selvästi TH-menetelmää nopeammin, kuten kuvaajasta 7.15 voidaan havaita ja kuten teorian perusteella voisi odottaakin.



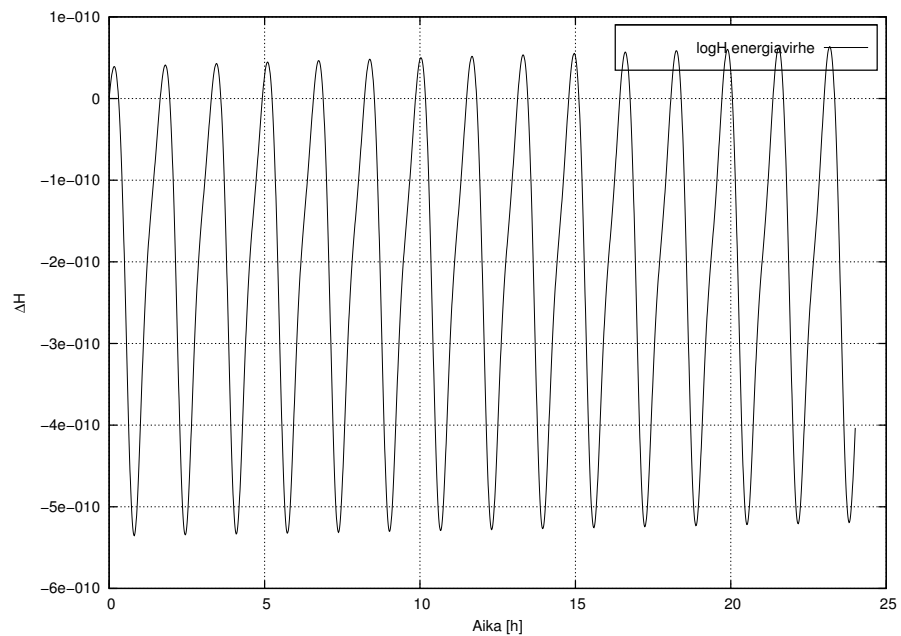
Kuva 7.3: Virhe rataa pitkin (Δr) verrattuna Kepler-liikkeen avulla saatuun tarkkaan arvoon kun $J_2 = 0$.



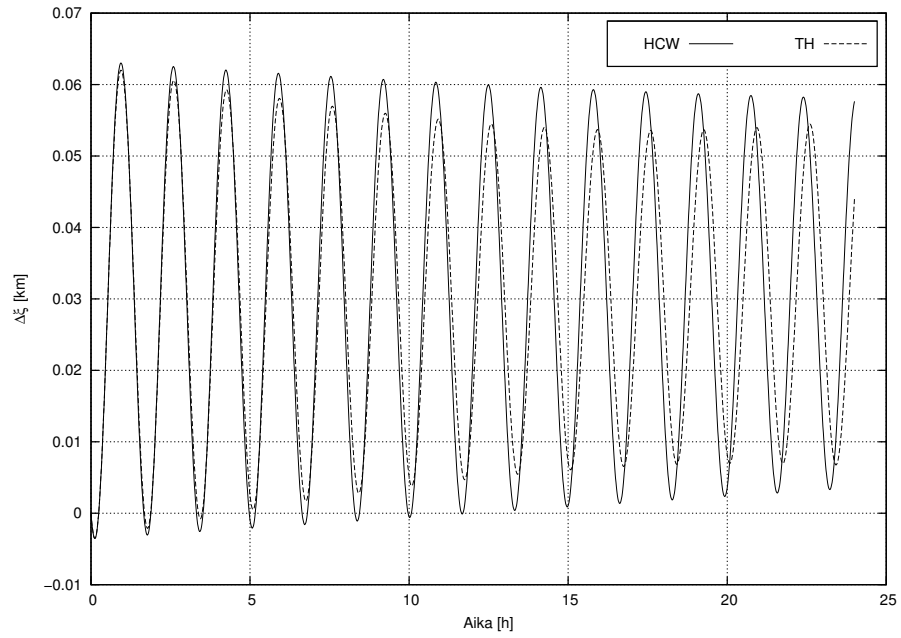
Kuva 7.4: Virhe ratatasoa vastaan kohtisuorassa ($\Delta \zeta$) verrattuna Kepler-liikkeen avulla saatuun tarkkaan arvoon kun $J_2 = 0$.



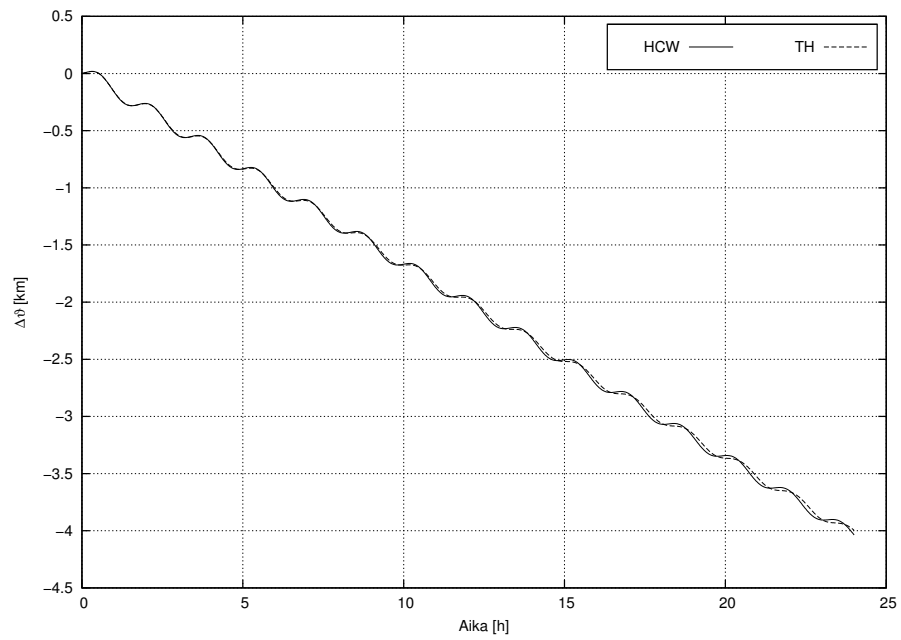
Kuva 7.5: Kokonaispaikannusvirhe $\Delta r = \|\Delta \mathbf{r}\|$ verrattuna Kepler-liikkeen avulla saatuun tarkkaan arvoon kun $J_2 = 0$.



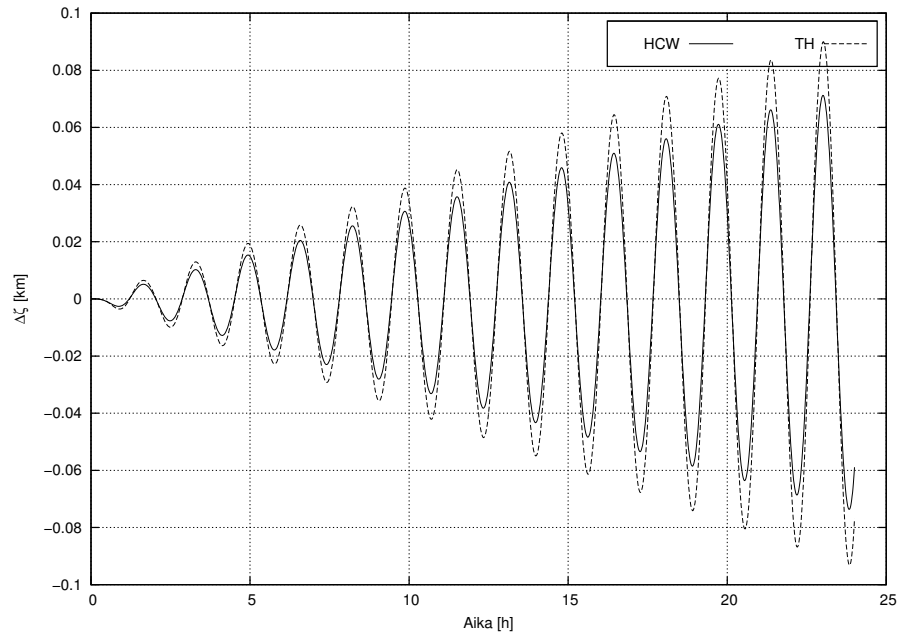
Kuva 7.6: Pääsatelliitin Hamiltonin funktion muutos ΔH ensimmäisessä datapisteessä laskettuun arvoon verrattuna.



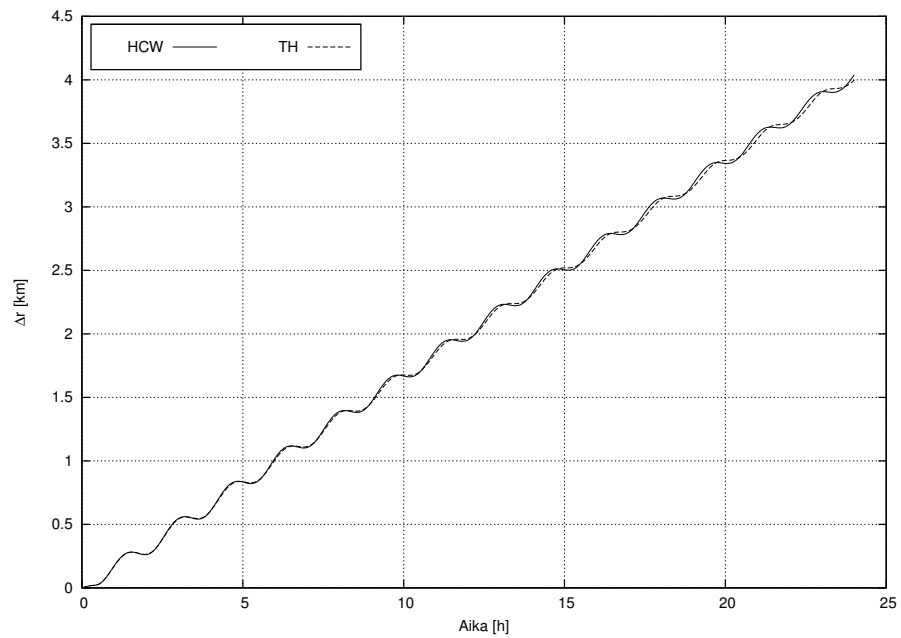
Kuva 7.7: Radiaalinen virhe ($\Delta\xi$) verrattuna logH-menetelmään.



Kuva 7.8: Virhe rataa pitkin ($\Delta\theta$) verrattuna logH-menetelmään.



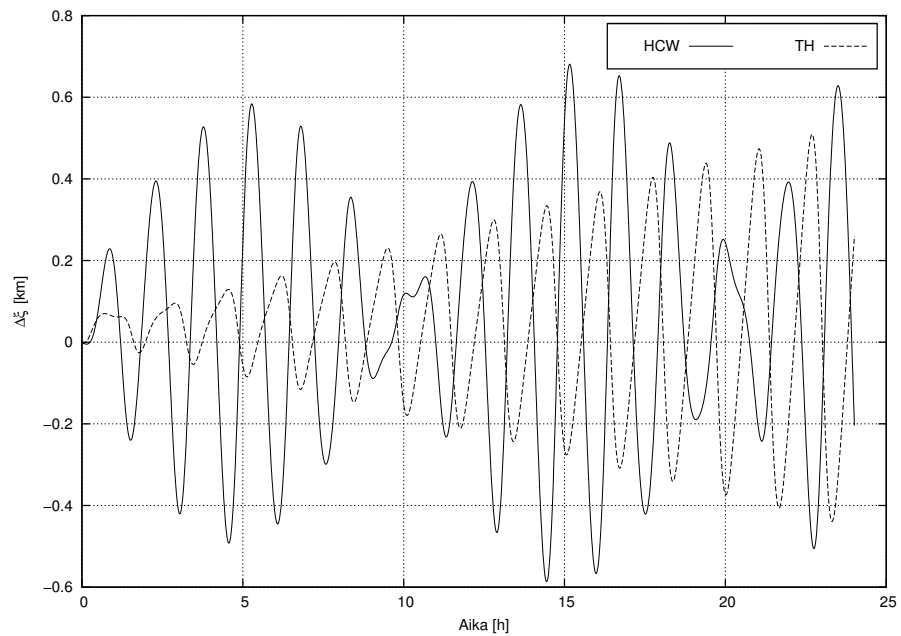
Kuva 7.9: Virhe kohtisuoraan ratatasoa vastaan ($\Delta\zeta$) verrattuna logH-menetelmään.



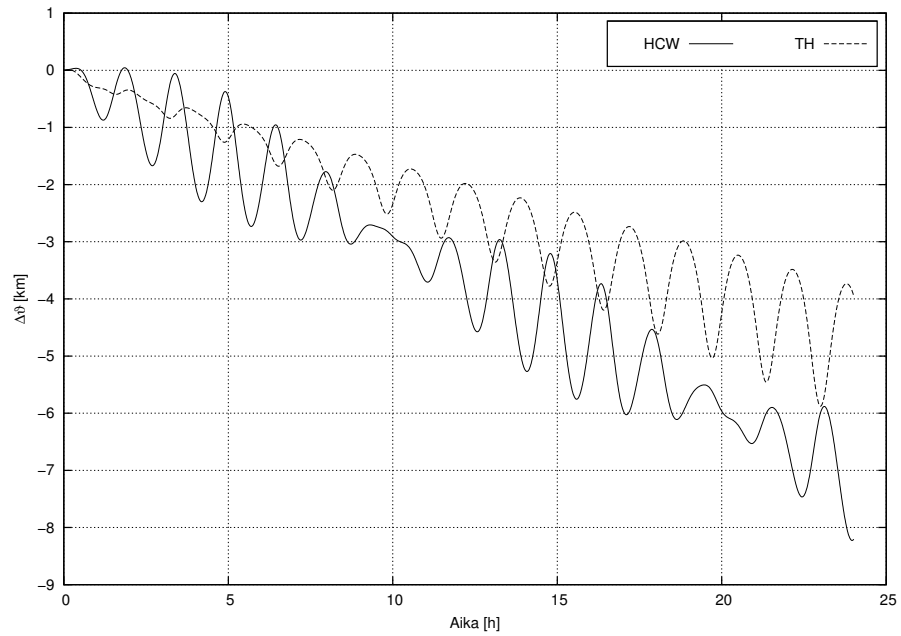
Kuva 7.10: Kokonaispaikannusvirhe $\Delta r = \|\Delta\mathbf{r}\|$ verrattuna logH-menetelmään.



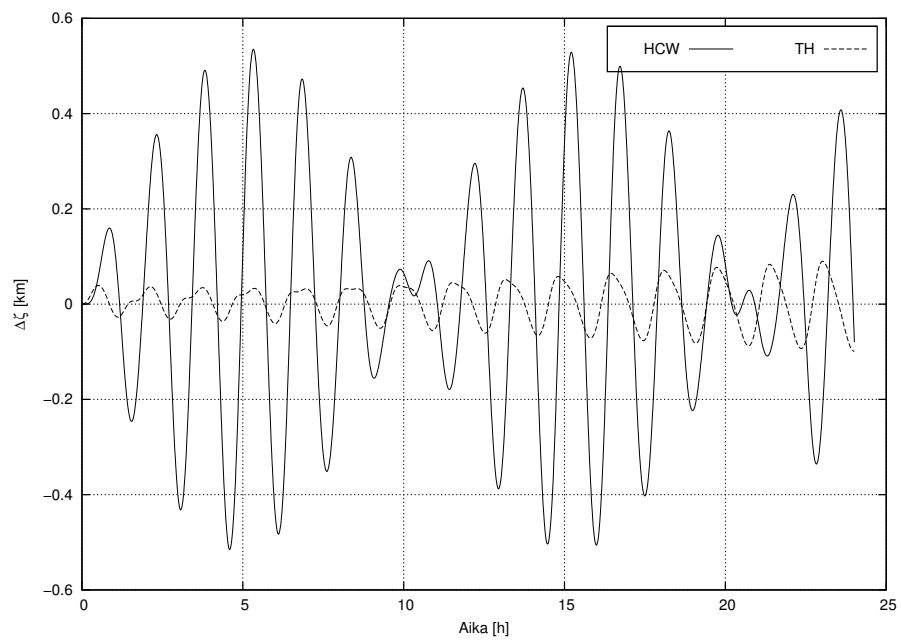
Kuva 7.11: Pääsatelliitin Hamiltonin funktion muutos ΔH ensimmäisessä datapisteessä laskettuun arvoon verrattuna.



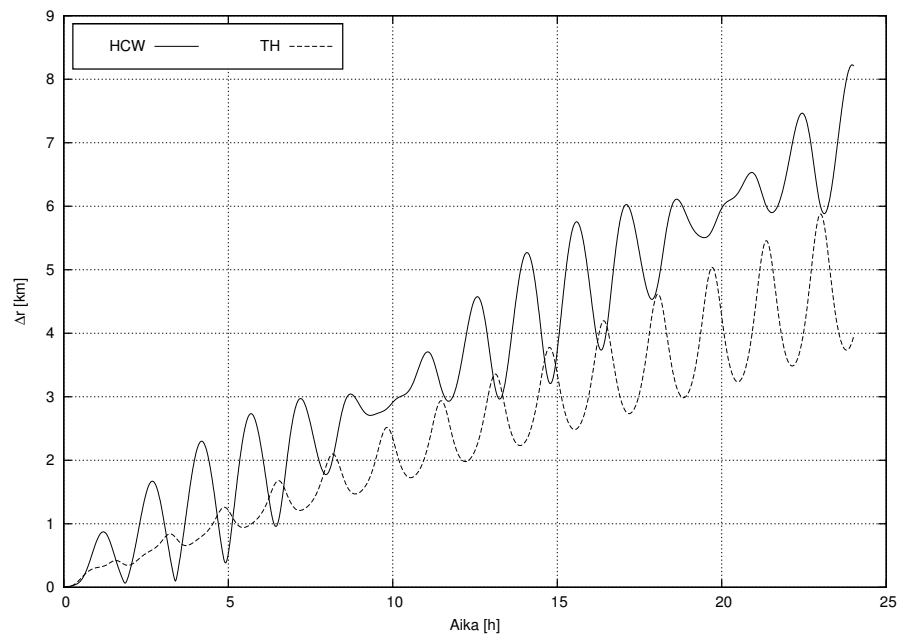
Kuva 7.12: Radiaalinen virhe ($\Delta \xi$) verrattuna logH-menetelmään.



Kuva 7.13: Virhe rataa pitkin ($\Delta\theta$) verrattuna logH-menetelmään.



Kuva 7.14: Virhe kohtisuoraan ratatasoa vastaan ($\Delta\zeta$) verrattuna logH-menetelmään.



Kuva 7.15: Kokonaispaikannusvirhe $\Delta r = \|\Delta \mathbf{r}\|$ verrattuna logH-menetelmään.

8 Johtopäätökset

8.1 Teorian kehittäminen

Kappaleessa 2 kehitettiin johdonmukaisesti symplektisiä integrointimenetelmiä varten tarvittavan teorian keskeisimmät kohdat. Tätä työtä tehtäessä kävi hyvin ilmi, että julkaisuja, jotka yhdistävät differentiaaaligeometrian teoriaa ja numeerisia sovelluksia on varsin vähän. Vielä heikompi tilanne on klassisen mekaniikan differentiaaaligeometrisen esityksen ja siihen liittyvän numeerikan sovellusten kannalta. Paras tekijän löytämä teos lienee Hairerin et al. kirja [27], joka kuitenkin on tyyliään selvästi lähempänä tavanomaista numeeristen menetelmien opusta.

Tässä työssä esiteltyä vastaavaa johdonmukaista kehitystä monistojen teorian ja Lien ryhmien teorian kautta numeerisiin algoritmeihin ei kirjoittajan parhaan tietämyksen mukaan ole. Kappaleen 2 esitys on siis tässä mielessä uusi, vaikkakin matemaattisesti varsin suppea ja pintapuolinen.

8.2 Menetelmien vertailu

Verrattaessa HCW- ja TH-malleja sekä analyttiseen ratkaisuun tapauksessa $J_2 = 0$ ja logH-menetelmään tapauksessa $J_2 \neq 0$ voidaan havaita, että mallien tarkkuus vuorokauden aikaskaalassa on täysin riittämätön. Kokonaispaikannusvirhe kasvaa näillä menetelmillä parhaassakin tapauksessa yli kilometriin vähintään neljän kierroksen eli noin kuuden tunnin aikana (kuvaajat 7.5, 7.10 ja 7.15). HCW- ja TH-menetelmät soveltuvat siten parhaiten esimerkiksi kohtaamisongelman ratkaisemiseen telakointitilanteissa. Esimerkiksi viitteessä [25] on laaja esitys TH-menetelmän käyttämisestä kohtaamisongelman ratkaisuun.

Logaritminen Hamiltonin funktio osoittautui tässä pintapuolisessa tarkastelussa lupaavaksi työkaluksi myös suhteellisten satelliittiratojen laskemiseen. Valmiiksi jo tiedetään [23], että logaritminen Hamiltonin funktio antaa eksaktin ratkaisun Kepler-liikkeen tapauksessa aikakorjausta lukuunottamatta. Tässä työssä havaittiin, että myös suhteelliselle liikkeelle saadaan tarkka, joskaan ei eksakti ratkaisu.

LogH-menetelmän antaman suhteellisen radan virhe johtui lähes kokonaisuudessaan rataa pitkin suuntautuvasta komponentista. Toisaalta logH-menetelmän aikakorjaus liittyy juuri siirtoon rataa pitkin. Lisäksi suhteellista rataa laskettaessa saadaan ajan differenssi, joka myös vastaa

siirtoa rataa pitkin. Tässä työssä ajan differenssi korjataan tekemällä ylimääräinen siirto, joka rikoo symplektisen rakenteen. Tarkkuus on siis entisestään parannettavissa, mikäli voidaan keksiä jokin parempi keino ajan differenssin käsittelemiseen.

Huomionarvoista on, että viitteen [1] perusteella ennen vuotta 2006 ei logH-menetelmän tai yleensä symplektisten numeeristen integrointimenetelmien soveltamisesta suhteellisten satelliittiratojen laskemiseen ollut lainkaan julkaisuja. Viitteessä [1] kehitetään yksi mahdollinen symplektinen suhteellisten ratojen laskentamenetelmä käyttäen hyödyksi Mikkolan et al. artikkelissa [14] esittämää implementaatiota logaritmisesta Hamiltonin menetelmästä. Menetelmä perustuu suhteellisen liikkeen Hamiltonin funktion muodostamiseen ja symplektisen integroinnin yhdistämiseen analyttiseen Kepler-liikkeen ratkaisuun.

Tässä työssä toteutettu keino logH-menetelmän soveltamisesta suhteellisten ratojen laskemiseen eroaa olennaisesti viitteen [1] implementaatiosta. Vertailua menetelmien välillä ei voi kuitenkaan näin alustavan tarkastelun perusteella tehdä. Tämän työn tekijän parhaan tietämyksen mukaan tässä työssä esitetyn kaltaista implementaatiota ei ole aikaisemmassa kirjallisuudessa.

8.3 Jatkokehitys

Logaritmisesta Hamiltonin funktion soveltamisesta suhteellisten satelliittiratojen laskemiseen voi edelleen kehittää. Yksi mahdollisuus on käyttää myös viitteessä [1] käytettyä keinoa soveltaa logH-menetelmää vain nopeushyppyihin. Tällöin voitaisiin mahdollisesti välttyä aikakorjauksen problematiikalta.

Toisaalta kappaleen 2 teoriaa voitaisiin mahdollisesti soveltaa kokonaan uudella tavalla. Differentiaaligeometrian ja Lien ryhmien teorian uusia sovelluksia numeeriseen integrointiin erityisesti jäykille kappaleille esitellään viitteessä [28].

Lisäksi vakavasti otettavan menetelmän on pystyttävä hyödyntämään useampia kuin yhtä geopotentiaalin (B.48) termiä. Termien lisääminen kuitenkin mutkistaa lausekkeita huomattavasti. Analyttiset lausekkeet saadaan helposti muodostettua matemaattisen apuvälineiden kuten esimerkiksi MATHEMATICA-ohjelmiston avulla, mutta niiden siirtäminen ohjelmakoodiksi on työlästä ja erityisen virheherkkää.

Tässä voitaisiin käyttää hyödyksi modernimpia ohjelmointikieliä, ja niiden tarjoamaa mahdollisuutta suorittaa helposti symbolista laskentaa joko ohjelman itsensä puitteissa tai hyödyntämällä esimerkiksi MATHEMATICA-ohjelmiston kirjastorajapintoja. Yksi lupaava tällainen ohjelmointikieli on F#, joka esitellään viitteessä [29]. Suhteellisten ratojen integrointiohjelman tapauksessa hyötyinä olisi esimerkiksi mahdollisuus soveltaa mielivaltaisia potentiaalilausekkeita, joista ohjelma itse muodostaisi symbolista laskentaa käyttämällä algoritmin kaavat ja sen jälkeen soveltaisi niitä.

Kirjallisuutta

- [1] I. Egemen, *High Precision Relative Motion Modelling*, väitöskirja, Texas A&M University (toukokuu 2006).
- [2] G. W. Hill, Researches in the lunar theory, *American Journal of Mathematics*, 5–26 (1878).
- [3] W. H. Clohessy ja R. S. Wiltshire, Terminal guidance system for satellite rendezvous, *Journal of the Aerospace Sciences*, **27**, 9, 653 (1960).
- [4] T. Logsdon, *Orbital mechanics: theory and applications* (Wiley-IEEE, 1997).
- [5] J. Tschauner ja P. Hempel, Rendezvous zu einem in elliptischer Bahn umlaufenden Ziel, *Astronautica Acta*, **11**, 5, 104 (1965).
- [6] M. Halsall ja P. L. Palmer, Modelling natural formations of LEO satellites, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **99**, 105 (2007).
- [7] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (G. Brookman, 1833).
- [8] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2 p. (Springer-Verlag, 1989).
- [9] J. Wisdom, The origin of the Kirkwood gaps - A mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability, *Astronomical Journal*, **87**, 577 (1982).
- [10] J. Wisdom ja M. Holman, Symplectic maps for the N-body problem, *Astronomical Journal*, **102** (1991).
- [11] S. Mikkola, Practical Symplectic Methods with Time Transformation for the Few-Body Problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **67**, 145 (1997).
- [12] S. Mikkola ja K. Tanikawa, Explicit Symplectic Algorithms For Time-Transformed Hamiltonians, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **74**, 287 (1999).
- [13] M. Preto ja S. Tremaine, A Class of Symplectic Integrators with Adaptive Time Step for Separable Hamiltonian Systems, *Astronomical Journal*, **118**, 2532 (1999), [arXiv:astro-ph/9906322](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9906322).
- [14] S. Mikkola, P. Palmer ja Y. Hashida, An Implementation of the Logarithmic Hamiltonian Method for Artificial Satellite Orbit Determination, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **82**, 391 (2002).
- [15] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons, 1964).
- [16] R. L. Burden ja J. D. Faires, *Numerical Analysis*, 5 p. (PWS Publishing Company, 1993).

- [17] P. Szekeres, *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential geometry*, 1 p. (Cambridge University Press, 2004).
- [18] H. Goldstein, C. P. Poole ja J. L. Safko, *Classical Mechanics*, 3 p. (Addison Wesley, 2001).
- [19] I. C. Percival ja D. Richards, *Introduction to Dynamics*, 1 p. (Cambridge University Press, 1983).
- [20] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, 1 p. (World Scientific Publishing Company, 2004).
- [21] M. de Gosson, *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*, 1 p. (Birkhäuser Basel, 2006).
- [22] O. Kovras, *New Developments in Field Theory*, 1 p. (Nova Science Publishers, 2006).
- [23] S. Mikkola ja P. Wiegert, Regularizing Time Transformations in Symplectic and Composite Integration, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **82**, 375 (2002).
- [24] H. Karttunen, K. J. Donner, P. Kröger, H. Oja ja M. Poutanen, *Tähtitieteen perusteet*, 4 p. (Tähtitieteellinen yhdistys Ursa ry, Raatimiehenkatu 3 A 2, 00140 Helsinki, 2003).
- [25] P. Sengupta, *Dynamics and control of satellite relative motion in a central gravitational field*, väitöskirja, Texas A&M University (joulukuu 2006).
- [26] GNU Octave, [online, viitattu 24.5.2009].
Saatavilla www-muodossa <<http://www.gnu.org/software/octave/>>
- [27] E. Hairer, C. Lubich ja G. Wanner, *New Developments in Field Theory*, 2 p. (Springer, 2006).
- [28] T. Lee, M. Leok ja N. H. McClamroch, Lie group variational integrators for the full body problem in orbital mechanics, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **98**, 121 (2007).
- [29] The F# 1.9.6 Draft Language Specification, [online, viitattu 24.5.2009].
Saatavilla www-muodossa <<http://research.microsoft.com/fsharp/manual/spec.pdf>>
- [30] P. J. Mohr ja B. N. Taylor, CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002, *Reviews of Modern Physics*, **77**, 1 (2005).
- [31] NASA Earth Fact Sheet, [online, viitattu 24.5.2009].
Saatavilla www-muodossa <<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>>
- [32] G. R. Fowles ja C. G. L., *Analytical mechanics*, 6 p. (Brooks Cole, 1999).
- [33] S. A. Feinstein ja C. A. McLaughlin, Dynamic discretization method for solving Kepler's equation, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **96**, 49 (2006).
- [34] S. Mikkola, A cubic approximation for Kepler's equation, *Celestial Mechanics*, **40**, 329 (1987).
- [35] Y. Hashida ja P. L. Palmer, Epicyclic Motion of Satellites About and Oblate Planet, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **24**, 586 (2001).
- [36] Y. Hashida ja P. L. Palmer, Epicyclic Motion of Satellites Under Rotating Potential, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **25**, 571 (2002).
- [37] National Imagery and Mapping Agency, *Department of Defense World Geodetic System 1984*, 3 p. (2000).

A Vakiot ja yksikköjärjestelmät

A.1 Vakiot

Työssä käytetyt vakiot symboleineen on listattu taulukossa III.

Taulukko III: Käytetyt vakiot lukuarvoineen

Vakio	Symboli	Lukuarvo
Gravitaatiovakio ¹	G	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Maan säde ²	R_{\oplus}	$6,3781 \cdot 10^6 \text{ m}$
Maan massa ²	M_{\oplus}	$5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Potentiaalin 2. häiriötermi ²	J_2	$1,08263 \cdot 10^{-3}$

A.2 Geosentriset yksiköt

Satelliittiratoja tarkastellessa käytetään yleensä *geosentrisiä* yksiköitä tai lyhyemmin vain geoyksiköitä. Tällöin valitaan $\mathcal{M} \approx GM_{\oplus} = 1$ ja $R_{\oplus} = 1$. Geosentrisen aikayksikkö määräytyy yksikköetäisyydellä kiertävän satelliitin kiertoaajasta, joksi geosentrisissä yksiköissä tulee Keplerin 2. lain (B.22) mukaan 2π .

Edeltävän määrittelyn perusteella saadaan pituuden L , ajan T ja nopeuden L/T dimensioille muunnoskaavat

$$L_g = \frac{L}{R_{\oplus}} \tag{A.1}$$

$$T_g = \frac{T}{\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}} \tag{A.2}$$

$$\frac{L_g}{T_g} = \frac{L/R_{\oplus}}{T/\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}}} = \frac{L/T}{\sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}}, \tag{A.3}$$

missä alaindeksi g viittaa geosentrisiin yksiköihin.

¹CODATA 2002 [30]

²NASA Earth Fact Sheet [31]

SI-yksiköissä ilmaistuna geosentrinen aikayksikkö on siten

$$\sqrt{\frac{R_{\oplus}^3}{GM_{\oplus}}} \approx 806,7860022 \text{ s}, \quad (\text{A.4})$$

ja

$$GM_{\oplus} \approx 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2}. \quad (\text{A.5})$$

B Taivaanmekaniikkaa

B.1 Liike keskeisvoimakentässä

Olkoon kappaleen paikkavektori pallokoordinaateissa $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ ja massa m . Tällöin jos kappaleeseen vaikuttaa keskeisvoima $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$, saadaan liikeyhtälöksi [32]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r. \quad (\text{B.1})$$

Merkitään ominaiskiertoimpulsseja $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, jolloin sen derivaatalle saadaan

$$\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times (f(r)\mathbf{e}_r) = rf(r)(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{0}. \quad (\text{B.2})$$

Siis \mathbf{h} on vakio, ja liike tapahtuu siten sitä vastaan kohtisuorassa tasossa.

Voidaan siis tarkastella liikettä polaarikoordinaatistossa $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$. Tällöin [32]

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta, \quad (\text{B.3})$$

ja liikeyhtälöt (B.1) saadaan muotoon

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (\text{B.4})$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Jälkimmäinen yhtälö sisältyy aikaisemmin saatuun tulokseen ominaiskiertoimpulssin säilymisestä, sillä

$$\begin{aligned} 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} &= \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot r\dot{\theta}) \\ &= \frac{d}{dt} \left| r\mathbf{e}_r \times (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \right| = \frac{d}{dt} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{dh}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

kun merkitään $|\mathbf{h}| = h$.

Sijoittamalla $r = 1/u$ saadaan yhtälön (B.6) avulla [32]

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \quad (\text{B.7})$$

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \frac{du}{d\theta} = -h\dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (\text{B.8})$$

Sijoittamalla yhtälöön (B.4) saadaan

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{h^2 u^2 m}. \quad (\text{B.9})$$

Tästä voidaan ratkaista u ja siten kappaleen rata $r = r(\theta)$.

B.2 Newtonin painovoimalaki

Newtonin painovoimalaki toteaa kappaleen vetävän toisia kappaleita puoleensa voimalla, joka on verrannollinen kappaleiden massojen tuloon jaettuna kappaleiden välisen etäisyyden neliöllä. Merkitään verrannollisuuskertoimta G :llä.

Kahdelle kappaleelle, joiden paikkavektorit ovat \mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2 ja massat m_1 ja m_2 saadaan siten

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (\text{B.10})$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (\text{B.11})$$

Supistamalla yhtälöistä massat ja vähentämällä puolittain saadaan suhteelliselle paikkavektorille \mathbf{r} liikeyhtälö

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{G[m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ &= -\frac{G(m_1 + m_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Ottamalla käyttöön *redusoitu massa*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{B.13})$$

saadaan yhtälö (B.12) lopulta muotoon

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (\text{B.14})$$

Havaitaan, että liikeyhtälön ratkaisemiseen voidaan hyödyntää yhtälöä (B.9), kun

$$f(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}. \quad (\text{B.15})$$

Saadaan

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{h^2 u^2 \mu^2} = \frac{Gm_1 m_2 u^2}{h^2 u^2 \mu} = \frac{G(m_1 + m_2)}{h^2} = \frac{\mathcal{M}}{h^2}, \quad (\text{B.16})$$

missä on merkitty $\mathcal{M} = G(m_1 + m_2)$.

Yhtälön yleinen ratkaisu on [32]

$$u = \frac{\mathcal{M}}{h^2} e \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mathcal{M}}{h^2}, \quad (\text{B.17})$$

missä e ja θ_0 ovat integrointivakioita. Kierretään nyt koordinaatistoa niin, että $\theta_0 = 0$, jolloin saadaan

$$r = \frac{h^2/\mathcal{M}}{1 + e \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (\text{B.18})$$

missä on merkitty $h^2/\mathcal{M} = p$. Tämä on klassisen kartiroleikkauksen yhtälö kun

$$p = a(1 - e^2), \quad (\text{B.19})$$

missä p on ellipsin puoliparametri (eng. *semi-latus rectum*), a puolet ellipsin isoakselin pituudesta ja e ellipsin eksentrisyys [24].

Mahdolliset kartioleikkausten muodostamat käyrät ovat hyperbeli, paraabeli, ellipsi ja ympyrä [24]. Näistä varsinaista kiertorataa vastaavat vain ympyrä ja ellipsi.

Yhtälön (B.18) kulmaa θ kutsutaan *luonnolliseksi anomaliaksi* tai *todelliseksi anomaliaksi*, ja merkitään yleensä ν tai f . Selvästi radan kohta $\nu = 0$ on lähinnä origoa. Tätä pistettä nimitetään *perisentriksi*.

Luonnollisesti, mikäli kahden kappaleen systeemissä toisen kappaleen massa on huomattavasti suurempi kuin toisen, tilanne redusoituu yhden kappaleen liikkeeksi keskeisvoimakentässä. Jos esimerkiksi $m_1 \gg m_2$ on $\mathcal{M} \approx Gm_1$ ja siten

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1(1 + \frac{m_2}{m_1})} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx m_2. \quad (\text{B.20})$$

Vastaavasti liikeyhtälö (B.14) muuttuu tällöin muotoon

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (\text{B.21})$$

joka vastaa yhtälöä (B.1) yhdelle kappaleelle.

B.2.1 Keplerin lait

Yhtälö (B.18) on siten yksi esitys *Keplerin I laille*, jonka mukaan planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on aurinko.

Keplerin II lain mukaan planeettaa ja aurinkoa yhdistävä viiva pyyhkii yhtäsuurissa aikaväleissä yhtäsuuret pinta-alat. Laki voidaan osoittaa havaitsemalla, että Ristitulon määritelmästä saadaan geometrisen argumentin avulla pyyhkäistyn pinta-alan $A(t)$ derivaatalle suoraan

$$\dot{A} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\| = \frac{h}{2} \quad (\text{B.22})$$

joka yhtälön (B.2) mukaan on vakio.

Keplerin III lain mukaan planeettojen kiertoaikojen neliöt suhtautuvat toisiinsa kuin rataellipsien isoakselien kuutiot. Kolmas laki saadaan integroimalla yhtälö (B.22) yhden jaksonajan P yli, jolloin saadaan

$$\frac{h}{2} P = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (\text{B.23})$$

Toisaalta $h^2 = \mathcal{M}a(1 - e^2)$ joten saadaan

$$h^2 P^2 = \mathcal{M}a(1 - e^2) P^2 = (2\pi)^2 a^4 (1 - e^2), \quad (\text{B.24})$$

ja siten Keplerin III lain usein käytetty muoto

$$P^2 = (2\pi)^2 \frac{a^3}{\mathcal{M}}. \quad (\text{B.25})$$

B.3 Keplerin yhtälö

Tarkastellaan yleisen kartioleikkauksen sijasta ellipsiä. Yleisen käytännön mukaan merkitään \mathbf{P} :llä ellipsin isoakselin ja \mathbf{Q} :lla pikkuakselin suuntaista yksikkövektoria. Siis

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{r}(\nu = 0)}{|\mathbf{r}(\nu = 0)|} \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{r}(\nu = \frac{\pi}{2})}{|\mathbf{r}(\nu = \frac{\pi}{2})|}. \quad (\text{B.27})$$

Yhtälössä (B.18) origo sijaitsee rataellipsin polttopisteessä. Siirretään nyt origo ellipsin keskipisteeseen, ja käytetään kulman ν sijasta keskipisteestä laskettua kulmaa E . Tällöin saadaan ellipsin geometrian perusteella kappaleen paikalle yhtälö [24]

$$\mathbf{r} = a(\cos E - e)\mathbf{P} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E\mathbf{Q} = x\mathbf{P} + y\mathbf{Q}. \quad (\text{B.28})$$

Derivoimalla x ja y ajan suhteen saadaan

$$\dot{x} = -a \sin E \dot{E} \quad (\text{B.29})$$

$$\dot{y} = a\sqrt{1 - e^2} \cos E \dot{E}. \quad (\text{B.30})$$

Laskemalla ominaiskiertoimpulssin neliö saadaan

$$\begin{aligned} h^2 &= |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|^2 = |(x\mathbf{P} + y\mathbf{Q}) \times (\dot{x}\mathbf{P} + \dot{y}\mathbf{Q})|^2 = |xy(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) + y\dot{x}(\mathbf{Q} \times \mathbf{P})|^2 \\ &= (xy - y\dot{x})^2 |\mathbf{P} \times \mathbf{Q}|^2 = (xy - y\dot{x})^2 = a^4(1 - e^2)(1 - a \cos E)^2 \dot{E}^2 \\ &= a^3 p (1 - a \cos E)^2 \dot{E}^2, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

sillä määritelmän perusteella $|\mathbf{P} \times \mathbf{Q}| = 1$. Toisaalta $h^2 = \mathcal{M}p$, jolloin

$$(1 - a \cos E) \dot{E} = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a^3}}. \quad (\text{B.32})$$

Koska

$$(1 - a \cos E) \dot{E} = \frac{d}{dt}(E - e \sin E), \quad (\text{B.33})$$

voidaan yhtälö (B.32) integroida ajan suhteen puolittain, ja saadaan

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a^3}}(t - \tau) = M, \quad (\text{B.34})$$

missä τ on integrointivakio. Kulmaa M nimitetään *keskianomaliaksi*, ja yhtälöstä (B.34) nähdään, että se muuttuu tasaisesti ajan mukana. Yhtälöä (B.34) kutsutaan *Keplerin yhtälöksi*. Yhtälö on transendenttinen eksentrisen anomalian suhteen, ja sen ratkaisemiseksi, kun keskianomalia tiedetään, joudutaan käyttämään sarjakehitelmiä tai iteratiivisia numeerisia menetelmiä [25]. Koska monet astrodynamiikan menetelmät vaativat lukuisia Keplerin yhtälön ratkaisuja, on numeerisen ratkaisumenetelmän oltava mahdollisimman nopea. Eräs konsistentisti hyvä [33] menetelmä on esitelty artikkelissa [34].

B.4 Rataelementit

Vektorimuotoinen likeyhtälö (B.14) vastaa kolmea toisen asteen differentiaaliyhtälöä, joten ratkaisun eli kappaleen radan täydelliseen määrittämiseen tarvitaan kuusi toisistaan riippumatonta vakiota [24].

Näiksi vakioiksi käyvät esimerkiksi kappaleen nopeus- ja paikkavektorit $\dot{\mathbf{r}}$ ja \mathbf{r} tietyllä ajan hetkellä t_0 . Nämä vakiot sopivat hyvin numeeristen integrointimenetelmien alustamiseen, mutta huonosti radan visualisointiin [24].

B.4.1 Klassiset rataelementit

Radan geometriaa kuvaavat paremmin klassisiksi rataelementeiksi nimitetyt suureet, joita merkitään [24]

$$\mathbf{CE} = (a, e, i, \Omega, \omega, \tau)^T. \quad (\text{B.35})$$

Tässä rataellipsin geometrian määräävät isoakselin puolikas a ja eksentrisyys e . Inkliinaatio i , nousevan solmun pituus Ω ja perisentrin argumentti ω määräävät ratatason orientaation suhteessa referenssitason (esimerkiksi aurinkokunnan tapauksessa ekliptika) [24]. Perisentrin argumentti ω määrittää rataellipsin perisentrin paikan ratatasolla, ja kappaleen paikan radalla kiinnittää perisentrin ohituksen hetken kertova perisentrin aika τ .

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää perisentrin argumentin sijaan myös perisentrin pituutta $\Omega + \omega$ ja perisentrin ajan sijaan *keskianomaliaa epookissa*

$$M_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{a^3}}(t - \tau). \quad (\text{B.36})$$

Ajan sijaan voidaan käyttää myös todellista anomaliaa f tai eksentristä anomaliaa E riippumattomana muuttujana. Näiden välillä on riippuvuus [25]

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (\text{B.37})$$

Lisäksi keskianomaliaa, eksentrisyyttä ja eksentristä anomaliaa yhdistää Keplerin yhtälö (B.34).

Käytännössä maapalloa kiertävät satelliitit eivät muodosta todellista kahden kappaleen systeemiä, vaan on otettava huomioon muiden taivaankappaleiden vaikutukset. Tällöin kappaleen rata ei ole enää yksinkertainen ellipsi. Muutos voidaan ottaa huomioon antamalla rataelementtien muuttua ajan funktiona siten, että rataelementeistä tietyllä hetkellä lasketut nopeus- ja paikkavektorit vastaavat todellisia. Näin saatuja rataelementtejä nimitetään oskuloiviksi rataelementeiksi [24].

B.4.2 Kanoniset elementit

Joissain tapauksissa voidaan käyttää myös Delaunayn kanonisia elementtejä

$$\mathbf{LE} = (L, G, H, l, g, h)^T, \quad (\text{B.38})$$

jotka voidaan määritellä klassisten rataelementtien avulla siten, että

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & G &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} & H &= \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos(i) \\ l &= M & g &= \omega & h &= \Omega. \end{aligned}$$

Näistä L , G ja H ovat yleistetyt liikemäärät sekä l , g ja h niitä vastaavat yleistetyt koordinaatit. Voidaan myös käyttää normalisoituja Delaunayn elementtejä, jolloin määritellään [25]

$$L = \sqrt{a} \qquad G = L\sqrt{1 - e^2} \qquad H = G \cos i.$$

Delaunayn elementtien kanonisuus merkitsee, että mille tahansa kahdelle yleistetylle liikemäärälle A_i , A_j ja niitä vastaaville yleistetyille koordinaateille a_i , a_j pätee

$$\{A_i, A_j\} = 0 \quad \{a_i, a_j\} = 0 \quad \{a_i, A_j\} = -\{A_j, a_i\} = \delta_{ij}, \quad (\text{B.39})$$

missä $\{\cdot, \cdot\}$ ovat Poissonin sulut.

B.5 Episykliesitys

Episyklisessä parametrisoinnissa satelliitin rata esitetään ympyräradalla kulkevan ohjauspisteen ympärille lasketun pienemmän ympyräradan, episyklin, avulla. Valitsemalla parametrit sopivasti, saadaan episyklisillä koordinaateilla esitettyä kiertoratoja, joilla on pieni eksentrisyys [35].

Merkitään episyklisen esityksen klassisia oskuloivia rataelementtejä vastaavia suureita

$$\mathbf{EE} = (a, A, I, \Omega, \alpha_P, M_e). \quad (\text{B.40})$$

Tässä inkliinaatio I , nousevan solmun pituus Ω ja isoakselin puolikas a ovat täysin analogisia vastaavien klassisten rataelementtien kanssa. Parametri α_P vastaa perisentrin argumenttia, A on radan eksentrisyyden mitta ja M_e on analoginen perisentriajan kanssa [35].

Satelliitin paikka esitetään ratatasolla normaalien polaarikoordinaattien avulla merkitsemällä säteittäistä etäisyyttä r :llä, ja kulmaetäisyyttä λ :lla. Näiden koordinaattien avulla saadaan satelliitin radalle yksinkertaisessa pallosymmetrisessä potentiaalissa lausekkeet

$$r = a - A \cos(\alpha - \alpha_P) \quad (\text{B.41a})$$

$$\lambda = \alpha + \frac{2A}{a} [\sin(\alpha - \alpha_P) + \sin \alpha_P] \quad (\text{B.41b})$$

$$I = I_0, \quad \Omega = \Omega_0, \quad \alpha = M - M_e, \quad (\text{B.41c})$$

missä M_e on nousevan solmun keskianomalia, ja kulma α aikaan verrannollinen siten, että se kasvaa 2π yhtä ratakierrosta kohti [35].

Perisentrin kohdalla siis $\alpha = \alpha_P$. Perisentrin argumentti ja kulma α liittyvät siten toisiinsa yhtälön

$$\omega = \alpha_P + \frac{A}{a} \sin \alpha_P \quad (\text{B.42})$$

kautta. Eksentrisyys e ja parametri A kytkeyvät puolestaan ehdosta $A = ae$, missä a on isoakselin puolikas [35]. Kattava esitys episyklielementtien johtamisesta ja hyödyntämisestä pallosymmetrisen potentiaalain tapauksessa löytyy viitteistä [35, 36].

B.6 Maapallon potentiaali

Liikeyhtälön (B.1) oikealla puolella esiintyvän vektorimuotoisen voiman $\mathbf{F}(r) = f(r)\mathbf{e}_r$ käsitteleminen ei välttämättä ole aina käytännöllistä. Poincarén lemman perusteella kuitenkin erityisesti \mathbb{R}^3 :ssa määritellyllä vektorikentällä $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ on olemassa *potentiaali* $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siten että

$$\mathbf{F} = \nabla u, \quad (\text{B.43})$$

jos pätee

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}. \quad (\text{B.44})$$

Ehto on ekvivalentti sen kanssa, että $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, ja gravitaatiovoiman kaltaisille keskeisvoimille ehto on siten aina voimassa. Maapallon painovoima voidaan siis esittää potentiaalin avulla, joka yleisen fysikaalisen käytännön mukaisesti kirjoitetaan muodossa

$$\mathbf{F} = -\nabla V. \quad (\text{B.45})$$

Koska maapallo ei kuitenkaan selvästi ole täysin pallosymmetrinen, on yhtälö (B.1) maapallolle kirjoitettava pallokoordinaateissa muodossa

$$m\ddot{\mathbf{r}} = f(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r. \quad (\text{B.46})$$

Tällaisen vektorikentän potentiaali saadaan Laplacen yhtälön $\nabla^2 f = 0$ ratkaisujoukon lineaarikombinaatioina. Pallokoordinaateissa kyseeseen tulevat ns. palloharmoniset funktiot, ja potentiaalille saadaan [37]

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_\oplus}{r} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^n P_{nm}(\cos \theta) (C_n^m \cos(m\psi) + S_n^m \sin(m\psi)), \quad (\text{B.47})$$

missä n_{\max} on kehittelmän kertaluku, C_n^m ja S_n^m ovat vakioita, P_n^m normeerattuja assosioituja Legendren funktioita ja $\psi = \phi - nt - \psi_0$, kun t on aika, n maan pyörimisaajuus ja ψ_0 alkuvaihe. Maan pyörimisestä ja siten ψ :stä riippuvia termejä kutsutaan tesseraalitermeiksi. Mikäli maapallon rotaatio ja siten tesseraalitermit jätetään huomiotta, saadaan potentiaalille yksinkertaisempi muoto

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_\oplus}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \right], \quad (\text{B.48})$$

missä J_n :t ovat vakioita ja P_n :t Legendren polynomeja. Tässä työssä tutkitaan vain pienimmän kertaluvun poikkeamaa pallosymmetrisyydestä, joten maapallon potentiaalin approksimaatioksi saadaan lopulta

$$V(r, \theta, \phi) = -\frac{GM_\oplus}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2 P_2(\cos \theta) \right]. \quad (\text{B.49})$$

Sovelluksia varten tarvitaan tieto $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

C Koodilistaukset

Työssä käytetty ohjelmakoodi on kirjoitettu OCTAVE-ohjelmointikieltä käyttäen. Tulkki OCTAVE-kielelle on löydettävissä viitteestä [26].

C.1 E2f.m

```
function [f] = E2f(E, e)
% Muuntaa eksentrisen anomalian todelliseksi anomaliaksi.
n = floor(E/(2*pi));
modE = E - n*2*pi;
f = 2*atan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(modE/2)) + n*2*pi;
end
```

C.2 M2E.m

```
function [E] = M2E(M, e)
% Muunnos keskianomaliasta eksentriseen anomaliaan (ts. Keplerin yhtälön
% ratkaiseminen)
E = solvekep(M, e);
end
```

C.3 a2body.m

```
% Tarkka (kun J2=0) suhteellinen rata ellipsiratojen erotuksena
function [r, dr, v, dv, tvals] = a2body(r1, v1, r2, v2, tvals, C)
oe1 = rv2oe(r1, v1);
oe2 = rv2oe(r2, v2);
n1 = sqrt(C(1)/oe1(1)^3);
n2 = sqrt(C(1)/oe2(1)^3);
i=0;
for t = tvals
i++;
tmp = oe1;
tmp(6) += t*n1;
[r1, v1] = oe2rv(tmp);
tmp = oe2;
tmp(6) += t*n2;
```

```

[r2, v2] = oe2rv(tmp);
[dr(i,:), dv(i,:)] = eci2lvlh(r1, v1, r2, v2);
r(i,:) = r1;
v(i,:) = v1;
end
end

```

C.4 docalcs.m

```

#!/usr/bin/octave -qf

%
% Apufunktiot

function print_results(fname, tlh, H, dra, drlvlh, drhcw, drth)
% Tulostaa tulokset tiedostoon.
[fid, msg] = fopen(fname, 'w');
for i = 1:length(drlvlh(:,1))
fprintf(fid, '%16.8g ', tlh(i), H(i)-H(1), \
dra(i,1), dra(i,2), dra(i,3), \
drlvlh(i,1), drlvlh(i,2), drlvlh(i,3), \
drhcw(i,1), drhcw(i,2), drhcw(i,3), \
drth(i,1), drth(i,2), drth(i,3));
fprintf(fid, '\n');
end
fclose(fid);
end

% Geosentriset yksiköt
C(1) = 1; % bigM
C(2) = 1; % REearth
J2 = 1.08263e-3; % J2-termin numeerinen arvo
C(3) = 0;
tunit = 806.811064922698 % aikayksikkö sekunneissa

% Maan säde metreissä
RE = 6378.137e3;
% Nopeuden skaalaustekijä
CV = sqrt(3.986005e5/RE);

% Minimaalisen eksentrisyyden lähtöarvot
minoe1 = [1.11, 0.0005, 15*pi/180, 45*pi/180, 90*pi/180, 15*pi/180];
[mr1, mv1] = oe2rv(minoe1);
mr1 = mr1.';
mv1 = mv1.';
[mr2, mv2] = lvlh2eci(mr1, mv1, [15, 15, 15]/RE, \
[-0.01, 0.00, -0.01]/(1000*CV));
minoe2 = rv2oe(mr2, mv2);
printf('OE & DOE - min e:\n');

```

```

for k=1:2
printf('%16.10g ', minoe1(k), minoe2(k)-minoe1(k));
printf('\n');
end
for k=3:6
printf('%16.10g ', minoe1(k)*180/pi, (minoe2(k)-minoe1(k))*180/pi);
printf('\n');
end
printf('\n');

% Pienen eksentrisyyden lähtöarvot
soe1 = minoe1;
soe1(2) = 0.1;
[sr1, sv1] = oe2rv(soe1);
sr1 = sr1.';
sv1 = sv1.';
[sr2, sv2] = lvlh2eci(sr1, sv1, [15, 15, 15]/RE, \
[-0.01, 0.00, -0.01]/(1000*CV));
soe2 = rv2oe(sr2, sv2);
printf('OE & DOE - small e:\n');
for k=1:2
printf('%16.10g ', soe1(k), soe2(k)-soe1(k));
printf('\n');
end
for k=3:6
printf('%16.10g ', soe1(k)*180/pi, (soe2(k)-soe1(k))*180/pi);
printf('\n');
end
printf('\n');

%% Laske tulokset eri menetelmillä
step = 0.05;
tend = 24*3600/tunit; % 24 tuntia

%
% J2 = 0, minimaalinen eksentrisyys
C(3) = 0;
ir1 = mr1; ir2 = mr2;
iv1 = mv1; iv2 = mv2;

%% Logaritminen Hamiltonin funktio
[r1, dr, v1, dv, H, t1h] = loghlf(ir1, iv1, ir2, iv2, step, tend, C);
runtimehours = t1h(end)*tunit/3600
runtimeper2pi = t1h(end)/(2*pi)
% Muunnos ECI -> LVLH
for i = 1:length(t1h)
[drlvlh(i,:), dvlvlh(i,:)] = \
eci2lvlh(r1(i,:), v1(i,:), (r1+dr)(i,:), (v1+dv)(i,:));
end
% Analyttiset menetelmät

```

```

[drhcw, dvhcw, thcw] = hcw(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[drth, dvth, tth] = th(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[r1a, dra, v1a, dva, ta] = a2body(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);

print_results('no_J2_min_e.txt', tlh, H, dra, drlvlh, drhcw, drth);
clear dr* dv* r1 v1 H tlh ir* iv*

%
% J2, minimaalinen eksentrisyys
C(3) = J2;
ir1 = mr1; ir2 = mr2;
iv1 = mv1; iv2 = mv2;

%% Logaritminen Hamiltonin funktio
[r1, dr, v1, dv, H, tlh] = loghlf(ir1, iv1, ir2, iv2, step, tend, C);
runtimehours = tlh(end)*tunit/3600
runtimeper2pi = tlh(end)/(2*pi)
% Muunnos ECI -> LVLH
for i = 1:length(tlh)
[drlvlh(i,:), dvlvlh(i,:)] = \
eci2lvlh(r1(i,:), v1(i,:), (r1+dr)(i,:), (v1+dv)(i,:));
end
% Analyyttiset menetelmät
[drhcw, dvhcw, thcw] = hcw(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[drth, dvth, tth] = th(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[r1a, dra, v1a, dva, ta] = a2body(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);

print_results('J2_min_e.txt', tlh, H, dra, drlvlh, drhcw, drth);
clear dr* dv* r1 v1 H tlh ir* iv*
%
% J2, pieni eksentrisyys
C(3) = J2;
ir1 = sr1; ir2 = sr2;
iv1 = sv1; iv2 = sv2;

%% Logaritminen Hamiltonin funktio
[r1, dr, v1, dv, H, tlh] = loghlf(ir1, iv1, ir2, iv2, step, tend, C);
runtimehours = tlh(end)*tunit/3600
runtimeper2pi = tlh(end)/(2*pi)
% Muunnos ECI -> LVLH
for i = 1:length(tlh)
[drlvlh(i,:), dvlvlh(i,:)] = \
eci2lvlh(r1(i,:), v1(i,:), (r1+dr)(i,:), (v1+dv)(i,:));
end
% Analyyttiset menetelmät
[drhcw, dvhcw, thcw] = hcw(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[drth, dvth, tth] = th(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);
[r1a, dra, v1a, dva, ta] = a2body(ir1, iv1, ir2, iv2, tlh, C);

print_results('J2_small_e.txt', tlh, H, dra, drlvlh, drhcw, drth);

```

```
clear dr* dv* r1 v1 H t1h ir* iv*
```

C.5 eci2lvlh.m

```
function [dr, dv] = eci2lvlh(r1, v1, r2, v2)
% Muunnos ECI-koordinaateista suhteellisiin LVLH-koordinaatteihin.
% Lasketaan LVLH-koordinaatiston kantavektorit
er = r1 / norm(r1);
eh = cross(r1, v1);
eh = eh / norm(eh);
et = cross(eh, er);
% Suhteelliset koordinaatit ECI-koordinaatistossa
dri = r2-r1;
dvi = v2-v1;
% Projektio LVLH-koordinaatteihin
dr(1) = dot(dri, er);
dr(2) = dot(dri, et);
dr(3) = dot(dri, eh);
dv(1) = dot(dvi, er);
dv(2) = dot(dvi, et);
dv(3) = dot(dvi, eh);
end
```

C.6 epi2oe.m

```
function [oe] = epi2oe(epi)
% Muuntaa episyklikelementit klassisiksi rataelementeiksi
oe(1) = epi(1); % a
oe(2) = epi(2)/epi(1); % e = A/a
oe(3) = epi(3);
oe(4) = epi(4);

ap = epi(5); Me = epi(6);

% ap = M0 - Me => M0 = ap + Me
oe(6) = ap + Me;
% w = ap + 2A/a*sin ap
oe(5) = ap + (2*epi(2)/epi(1))*sin(ap);
end
```

C.7 f2E.m

```
function [E] = f2E(f, e)
% Muuntaa todellisen anomalian eksentrisiksi anomaliaksi
n = floor(f/(2*pi));
modf = f - n*2*pi;
```

```
E = 2*atan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan(modf/2)) + n*2*pi;
end
```

C.8 hcw.m

```
function [dr, dv, tvals] = hcw(r1, v1, r2, v2, tvals, C)
% Octave-implemantaatio Hill-Clohessy-Wiltshire -yhtälöistä.

% Alkuarvot eli suhteelliset paikka- ja nopeusvektorit LVLH-koordinaateissa.
[dr0, dv0] = eci2lvlh(r1, v1, r2, v2)

n = sqrt(C(1)/norm(r1)^3); % n = sqrt(M/a^3)
t = tvals;

% Voidaan suoraan laskea ja palauttaa suhteellinen paikka ja nopeus
% LVLH-koordinaateissa.
dr = [ \
dv0(1)/n*sin(n*t) - (3*dr0(1)+2*dv0(2)/n)*cos(n*t) \
+ 4*dr0(1) + 2*dv0(2)/n; \
(6*dr0(1)+4*dv0(2)/n)*sin(n*t) + 2*dv0(1)/n*cos(n*t) \
- (6*n*dr0(1)+3*dv0(2))*t + dr0(2) - 2*dv0(1)/n; \
dr0(3)*cos(n*t) + dv0(3)*sin(n*t)/n \
]';
dv = [ \
dv0(1)*cos(n*t) + (3*n*dr0(1)+2*dv0(2))*sin(n*t); \
(6*n*dr0(1)+4*dv0(2))*cos(n*t) - 2*dv0(1)*sin(n*t) \
- 6*n*dr0(1) - 3*dv0(2); \
-dr0(3)*n*sin(n*t) + dv0(3)*cos(n*t) \
]';
tvals = t;
end
```

C.9 hp.m

```
% Octave-toteutus Halsallin-Palmerin suhteellisesta ratalaskumenetelmästä.
function [dr, times] = hp(r1, v1, r2, v2, tvals, C)
% Pääsatelliitin ja seuraajan rataelementit ja episykliset elementit
oe1 = rv2oe(r1, v1);
oe2 = rv2oe(r2, v2);
epi1 = oe2epi(oe1);
epi2 = oe2epi(oe2);
% n
n = sqrt(C(1)/oe1(1)^3);
% t_e = M_e/n
te = epi1(6)/n;

% (R_earth / a_c)^2
```

```

repa2 = (C(2)/oe1(1))^2;
% cos I_0
ci = cos(epi1(3));
% Sekulaaritermit: rho, theta, kappa
rh = -1/4*C(3)*repa2*(3*ci-1);
th = 3/2*C(3)*repa2*ci*sqrt(1-ci^2);
ka = 3/2*C(3)*repa2*(1/2*(3*ci-1) - ci^2*sqrt(1-ci^2));

% dalpha = Me_k - Me_l
dal = epi1(6) - epi2(6)
% depsilon
de = sqrt(oe1(2)^2 + oe2(2)^2 - 2*oe1(2)*oe2(2)*cos(epi1(5) - epi2(5)))
% Psi-arvo = (e_k*sin(al_Pk) - e_l*sin(al_Pl)) / ...
psinum=oe1(2)*sin(epi1(5)) - oe2(2)*sin(epi2(5))
psidenom=oe1(2)*cos(epi1(5)) - oe2(2)*cos(epi2(5))
psi = atan2(psinum, psidenom)

% Tavallinen aikamuuttuja on tvals
% Aikamuuttuja tau = alpha*(1+kappa)
taus = n*(tvals - te)*(1+ka);

% Kun oletetaan käyräviivainen koordinaatisto linearisoiduksi, voidaan käyttää
% tavallisia LVLH-koordinaatteja
[dr0, dv0] = eci2lvlh(r1, v1, r2, v2);
% Nyt voidaan laskea suhteelliset koordinaatit
domega = dr0(1) - oe1(1)*de*cos((1-ka)*taus - psi);
dnu = dr0(2) + 2*de*sin((1-ka)*taus - psi);
dzeta = (epi1(3)-epi2(3))*sin(taus) - \
sin(epi1(3))*(epi1(4)-epi2(4)-th*dal + \
3/2*C(3)*repa2*sin(epi1(3))*(epi1(3)-epi2(3))*taus).*cos(taus);

times = tvals;
dr = [domega.', dnu.', dzeta.'];
end

```

C.10 loghlf.m

```

function [rout, drout, vout, dvout, Hout, times] = loghlf(q1, p1, \
q2, p2, h, tend, C)
% Octave-implementaatio logaritmissen Hamiltonin funktion käyttämisestä
% suhteellisten satelliittiratojen laskentaan.

% Alustetaan käytettävät vakiot.
bigM = C(1);
RE = C(2);
J2 = C(3);
i=1;
t=0;
times=0;

```



```

% Suhteelliset paikka- ja nopeusvektorit ECI-koordinaateissa.
dq = q2-q1
dp = p2-p1
% Ajan momentit (yleistetyt liikemäärät p0)
p0 = -calcH(p1, q1, C)
p02 = -calcH(p2, q2, C)
dp0 = p02-p0
dt = 0;
% Alkuarvot
Hout(i) = calcH(p1, q1, C);
rout(i, :) = q1;
vout(i, :) = p1;
drout(i, :) = dq;
dvout(i, :) = dp;
times(i) = t;
% Ajetaan silmukassa p-täysaskeleita ja q-puoli-askeleita simulaation loppuun
% asti.
while (t < tend)
[t, dt, q1, dq] = QHStep(t, q1, p1, p0, dt, dq, dp, dp0, h);
[p1, dp] = PStep(q1, p1, dq, dp, h, C);
[t, dt, q1, dq] = QHStep(t, q1, p1, p0, dt, dq, dp, dp0, h);
i++;
Hout(i) = calcH(p1, q1, C);
rout(i, :) = q1;
vout(i, :) = p1;
drout(i, :) = dq;
dvout(i, :) = dp;

% Suhteellisia paikkoja pitää korjata Delta t:n verran
%dt
tmpt = t;
tmpr = q1 + dq;
tmpv = p1 + dp;
tmpp0 = -calcH(tmpr, tmpv, C);
tmpm = norm(tmpr)*(norm(tmpv)^2/2+tmpp0);
% Tarvitaan s-parametrin aika-askel joka vastaa dt:n pituista
% koordinaattiaika-askelta.
hs = bigM/norm(tmpr)*(-dt);
% Muunnetaan lf-askeleeksi.
ch = tmpm/sqrt(tmpp0/2)*atan(sqrt(tmpp0/2)*(hs)/tmpm);
% Otetaan yksi leapfrog-askel
tmp = zeros(1,3);
tmp2 = 0;
[tmp2, tmp, tmpr, tmp] = \
QHStep(t, tmpr, tmpv, tmpp0, 0, tmp, tmp, 0, ch);
[tmpv, tmp] = PStep(tmpr, tmpv, tmp, tmp, ch, C);
[tmp2, tmp2, tmpr, tmp] = \
QHStep(t, tmpr, tmpv, tmpp0, 0, tmp, tmp, 0, ch);
% Palautetaan korjatut suhteelliset paikat.
drout(i,:) = tmpr - q1;

```

```

dvout(i,:) = tmpv - p1;

times(i) = t;
end
end

% Hamiltonin funktion hetkellinen arvo
function [H] = calcH(p, q, C)
H = 1/2*norm(p)^2 - C(1)/norm(q) \
* (1-C(3)*C(2)^2*(3*q(3)^2/(2*norm(q)^4)-1/(2*norm(q)^2)));
end

% Paikkahyppyfunktio
function [tout, dtout, q1out, dqout] = QHStep(time, \
q1, p1, p0, dt, dq, dp, dp0, step)
% Aikakorjausvakio tau
tau = tauf(q1, p1, p0, step);
% Variaatiot
dtout = dt + (step/2)*(1/(0.5*norm(p1+dp)^2+p0+dp0)\
- 2/(norm(p1)^2+2*p0)) + 0.5*(tauf(q1+dq, p1+dp, p0+dp0, step) - tau);
dqout = dq + (step/2)*(QJI(p0+dp0, p1+dp) - QJI(p0,p1));
% Koordinaatit
tout = time + (step/2) * 1 / (0.5*norm(p1)^2 + p0) + tau/2;
q1out = q1 + (step/2) * QJI(p0,p1);
end

% Nopeushyppyfunktio
function [p1out, dpout] = PStep(q1, p1, dq, dp, step, C)
p1out(1:2) = p1(1:2) - step*PJI(q1, C);
p1out(3) = p1(3) - step*PJ3(q1, C);
dpout(1:2) = dp(1:2) - step*(PJI(q1+dq,C) - PJI(q1,C));
dpout(3) = dp(3) - step*(PJ3(q1+dq,C) - PJ3(q1,C));
end

% Aikakorjausfunktio
function [tau] = tauf(q1, p1, p0, step)
% Efektiivinen massa
m = norm(q1)*(norm(p1)^2/2 + p0);
% Zeta-parametrin neliöjuuri
sz = sqrt(step^2*p0/(2*m^2));
% Aikakorjausvakio tau
tau = -step^3/(4*m^2)*(tan(sz) - sz)/sz^3;
end

% Paikkahypyn apufunktio
function [out] = QJI(p0, p1)
out = p1/ (0.5*norm(p1)^2 + p0);
end

% Nopeushypyn apufunktiot

```

```

function [out] = PJI(q1, C)
out(1:2) = (1 - C(3)*C(2)^2*(3*q1(3)^2/(2*norm(q1)^4)\
- 1/(2*norm(q1)^2)))^(-1)*(1-C(3)*C(2)^2*(15*q1(3)^2/(2*norm(q1)^4)\
- 3/(2*norm(q1)^2))) * q1(1:2)/(norm(q1)^2);
end
function [out] = PJ3(q1, C)
out = (1 - C(3)*C(2)^2*(3*q1(3)^2/(2*norm(q1)^4)\
- 1/(2*norm(q1)^2)))^(-1)*(1-C(3)*C(2)^2*(15*q1(3)^2/(2*norm(q1)^4)\
- 9/(2*norm(q1)^2))) * q1(3)/(norm(q1)^2);
end

```

C.11 lvlh2eci.m

```

function [r2, v2] = lvlh2eci(r1, v1, dr, dv)
% Muunnos LVLH-koordinaateista ECI-koordinaatteihin
% Lasketaan LVLH-koordinaatiston kantavektorit ECI-koordinaattien suhteen
er = r1 / norm(r1);
eh = cross(r1, v1);
eh = eh / norm(eh);
et = cross(eh, er);
% Skaalataan LVLH-koordinaatit r-vektorin pituudella
%drs = dr * norm(r1);
%dvs = dv * norm(r1);
drs = dr;
dvs = dv;
% Muunnetaan suhteelliset koordinaatit ECI-koordinaatistoon
drs = drs(1)*er + drs(2)*et + drs(3)*eh;
dvs = dvs(1)*er + dvs(2)*et + dvs(3)*eh;
% Muunnetaan suhteelliset koordinaatit absoluuttisiksi koordinaateiksi
r2 = drs + r1;
v2 = dvs + v1;
end

```

C.12 oe2epi.m

```

function [epi] = oe2epi(oe)
% Muunnos rataelementeistä episykklielementteihin.
% Episykklielementtien järjestys: a, A, I, Omega, a_p, M_e
epi(1) = oe(1); % a
epi(2) = oe(1)*oe(2); % A = a*e
epi(3) = oe(3); % I
epi(4) = oe(4); % Omega

% Keskianomalia nousevan solmun kohdalla
w = oe(5);
M0 = oe(6);

% w = a_P + (2A/a)sin a_P

```

```

ap = fsolve(inline('x + 2*epi(2)/epi(1)*sin(x) - w', 0), w);
% ap = M0 - Me
Me = M0 - ap;
epi(5) = ap;
epi(6) = Me;
end

```

C.13 oe2rv.m

```

function [r, v] = oe2rv(el)
% Muunnos tavallisista rataelementeistä paikka- ja nopeusvektoriin.
w = el(5); 0 = el(4); i = el(3); % omega, Omega, inkлинаatio
P = [ cos(w)*cos(0) - sin(w)*sin(0)*cos(i) ; \
      cos(w)*sin(0) + sin(w)*cos(0)*cos(i) ; \
      sin(w)*sin(i) ];
Q = [-sin(w)*cos(0) - cos(w)*sin(0)*cos(i) ; \
      -sin(w)*sin(0) + cos(w)*cos(0)*cos(i) ; \
      cos(w)*sin(i) ];
W = [ sin(0)*sin(i) ;
      -cos(0)*sin(i) ;
      cos(i) ];

% Puoliakselin pituus, eksentrisyys
a = el(1); e = el(2);
av = a*P;
bv = cross(W, av)*sqrt(1-e^2);

% Eksentrisen anomalia
E = M2E(el(6), e);

% Tulosten palautus
r = av*(cos(E) - e) + bv*sin(E);
v = (-av*sin(E) + bv*cos(E))/(norm(r)*sqrt(a));
end

```

C.14 rv2oe.m

```

function [el] = rv2oe(r, v)
% Muuntaa paikka- ja nopeusvektorit rataelementeiksi.

% Oletetaan bigM = 1
% Rataelementit järjestyksessä a, e, i, Omega, omega, M0

% Puoliakselin pituus
al = 2/norm(r) - dot(v,v);
el(1) = 1/al;

% Eksentrisyys

```

```

et = dot(r, v);
zeta = 1 - a1*norm(r);
D = cross(r, v);
e = cross(v, D) - r/norm(r);
el(2) = norm(e);

% Inklinaatio
B = sqrt(D(1)^2+D(2)^2);
el(3) = atan2(B, D(3));

% Nousevan solmun pituus
el(4) = atan2(D(1), -D(2));

% Perisentrin argumentti
if (el(2) == 0)
el(5) = 0;
else
el(5) = atan2(e(3)*norm(D), e(2)*D(1)-e(1)*D(2));
end

% Keski-anomalia epookissa
el(6) = atan2(et*sqrt(a1), zeta) - et*sqrt(a1);
end

```

C.15 solvekep.m

```

function [E] = solvekep(M, e)
% Ratkaisee Keplerin yhtälön numeerisesti Octaven ratkaisufunktiolla.
E = fsolve(inline("x - e*sin(x) - M", 0), M);
end

```

C.16 t2E.m

```

function [Evec] = t2E(tvec, n, e, M0)
% Muunnos ajasta eksentriseen anomaliaan
M = n * tvec' - M0;
Evec = solvekep(M, e);
end

```

C.17 t2f.m

```

function [fvec] = t2f(tvec, n, e, M0)
% Muunnos ajasta todelliseen anomaliaan.
M = n * tvec' + M0;
Evec = M2E(M, e);
fvec = E2f(Evec, e);
end

```

C.18 th.m

```
function [relr, relv, tvals] = th(r1, v1, r2, v2, tvals, C)
% Octave-toteutus Tschaunerin-Hempel mallista satelliittien suhteelliselle
% liikkeelle.

% Tarvitaan eksentrisyyden ja isoakselin puolikkaan arvot pääsatelliitille
oe = rv2oe(r1, v1);
a = oe(1);
e = oe(2);
n = sqrt(C(1)/a^3); % n = sqrt(M/a^3)
M0 = oe(6)
E0 = M2E(M0, e)
f0 = E2f(E0, e)

% Eta on Delaunayn elementeistä, sqrt(1-e^2)
eta = sqrt(1-e^2);

% Lasketaan seuraajasatelliitin LVLH-koordinaatit
[drlvlh, dvlvlh] = eci2lvlh(r1, v1, r2, v2);

% Tschauner-Hempel-mallissa suhteelliset koordinaatit skaalataan pääsatelliitin
% paikkavektorilla.
dr = drlvlh/norm(r1)

% Koska nopeusvektori pitää laskea derivoimalla todellisen anomalian suhteen,
% saadaan
dv = 1/dermult(C(1), a, e, f0)*(dvlvlh/norm(r1) \
- drlvlh/norm(r1)^2*dvlvlh(1))

% Nopeusvektori saadaan derivoimalla todellisen anomalian suhteen, saadaan
% aikaderivaatasta sopivasti kertomalla.
%dermult = sqrt(C(1)/(a*(1-e^2))^3)*(1+e*cos(f0))^2
%dermult = 1;
%dv = dv/norm(r1)/dermult

% Muunnos aika -> todellinen anomalia
fvals = t2f(tvals, n, e, M0);

% Tulokset saadaan soveltamalla tilansiirtomatriisia L
x0vec = [ dr(1); dr(2); dr(3); dv(1); dv(2); dv(3); ];
L0mat = calcL(n, tvals(1), f0, fvals(1), e, eta);
1-det(L0mat); % Tarkistus: det L = 1
cvec = L0mat \ x0vec; % Ratkaistaan c-vakiot
for k = 1:length(tvals)
Lmat = calcL(n, tvals(k), f0, fvals(k), e, eta);
res = (Lmat * cvec).';
1-det(Lmat); % Tarkistus: det L = 1
xvec(k,:) = res;
% Skaalataan takaisin tavanomaisiin LVLH-koordinaatteihin
```

```

relr(k,:) = xvec(k,1:3)*norm(r1);
%dermult = sqrt(C(1)/(a*(1-e^2))^3*(1+e*cos(fvals(k)))^2);
%relv(k,:) = xvec(k,4:6)*norm(r1)*dermult;
relv(k,:) = dermult(C(1),a,e,fvals(k))*(xvec(k,4)*xvec(k,1:3) \
+ norm(r1)*xvec(k,4:6));
end

end

% K-funktio todellisen anomalian funktiona
function [k] = K(f0, f, e)
E = f2E(f, e);
E0 = f2E(f0, e);
k = E - e*sin(E) - (E0 - e*sin(E0));
end

% K-funktio ajan funktiona
function [k] = K2(n, t)
k = n*t;
k = k.';
end

% Lasku voidaan toteuttaa tilansiirtomatriisilla L
function [L] = calcL(n, t, f0, f, e, eta)
% x
L(1,1) = cos(f)*(1+e*cos(f));
L(1,2) = sin(f)*(1+e*cos(f));
L(1,3) = 2/eta^2*(1-3*e/(2*eta^3)*sin(f)*(1+e*cos(f))*K2(n,t));
L(1,4:6) = 0;

% y
L(2,1) = -sin(f)*(2+e*cos(f));
L(2,2) = cos(f)*(2+e*cos(f));
L(2,3) = -3/eta^5*(1+e*cos(f))^2*K2(n,t);
L(2,4) = 1;
L(2,5:6) = 0;

% z
L(3,1:4) = 0;
L(3,5) = cos(f);
L(3,6) = sin(f);

% vx
L(4,1) = -(sin(f) + e*sin(2*f));
L(4,2) = cos(f) + e*cos(2*f);
L(4,3) = -3*e/eta^2*(sin(f)/(1+e*cos(f))+1/eta^3*(cos(f)+e*cos(2*f))*K2(n,t));
L(4,4:6) = 0;

% vy
L(5,1) = -(2*cos(f) + e*cos(2*f));

```

```

L(5,2) = -(2*sin(f) + e*sin(2*f));
L(5,3) = -3/eta^2*(1-e/eta^3*(2*sin(f)+e*sin(2*f))*K2(n,t));
L(5,4:6) = 0;

% vz
L(6,1:4) = 0;
L(6,5) = -sin(f);
L(6,6) = cos(f);
end

% Derivaatta d/dt = k(f)*(d/df), missä k(f) saadaan tällä funktiolla
function [k] = dermult(bigM, a, e, f)
k = sqrt(bigM/(a^3*(1-e^2)^3))*(1+e*cos(f))^2;
end

```