ANALYYTTISTA GEOMETRIAA LUKIO-OPETUKSESSA

Eeva Kuparinen

Pro gradu -tutkielma
Tammikuu 2008

MATEMATIIKAN LAITOS
TURUN YLIOPISTO

Sisältö

1 Johdanto

Tämän opettajalinjan Pro Gradu -tutkielman tarkoituksena on luoda katsaus analyyttiseen geometriaan. Analyyttinen geometria on lukion opetussuunnitelman perusteiden mukaan yksi pitkän matematiikan pakollisista kursseista, joten aiheesta on jo olemassa oppikirjoja. Tämän tutkielman päälähteenä olen käyttänyt kahta teosta: *Schaum´s Outline of Theory and Problems of Plain and Solid Analytic Geometry*, jonka on kirjoittanut matematiikan professori Joseph H. Kindle (Schaum Publishing Co, New York, 1950) sekä Usko Lahden ja Yrjö Laineen kirjoittamaa *Alfa, Lukion laajanmatematiikan kurssit 1-4* (Otava, Helsinki, 1987). Tutkielma on koottu yhdistelemällä edellä mainittuja lähteitä käyttäen apuna myös muita teoksia, jotka löytyvät lähdeluettelosta. Tutkielmassa olevat kuvat on piirretty Xfig-ohjelmalla. Esimerkkien ja harjoitustehtävien laatimisessa on apuna käytetty soveltaen kaikkia lähdeluettelosta löytyviä oppikirjoja.

Tutkielmassa kerrataan myös muihin kursseihin liittyviä asioita, kuten geometriaa, jotta varsinaisten analyyttisen geometrian käsitteiden ja ongelmien ymmärrys olisi syvempää. Aluksi kerrataan koordinaatistoon liittyviä käsitteitä sekä liitetään piste ja jana koordinaatistoon. Seuraavaksi tutkielmassa käsitellään suoraa, sen ominaisuuksia sekä useampien suorien suhdetta toisiinsa nähden. Viimeisenä aiheena tutkielmassa on kartioleikkaukset, joista ympyrää käsitellään erikseen omana kappaleenaan. Jokaisen tutkielman aiheen yhteydessä on tarkoitus vahvistaa sekä yhtälöjen ja yhtälöryhmien ratkaisemisen taitoja että pistejoukon yhtälön käsitteen ymmärtämistä.

Tutkielmaa voisi käyttää apuna analyyttisen geometrian opetuksessa, mutta aineiston avulla on myös mahdollista itsenäisesti tutustua analyyttiseen geometriaan. Viimeisenä kappaleena tutkielmassa on tehtävien ratkaisut, joka toimii jonkinlaisena opettajan oppaana tai apuna itsenäisesti analyyttistä geometriaa opiskelevalle. Tehtävillä on usein monia eri ratkaisuvaihtoehtoja, mutta tässä viimeisessä kappaleessa on annettu yksi, välillä hyvinkin yksityiskohtainen, ratkaisuvaihtoehto jokaiselle harjoitustehtävälle. Tehtävien ratkaisut ovat kirjoittajan omaa tuotosta. Tutkielman päätavoitteena on, että lukija ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille.

Geometria on hyvin vanha matematiikan ala, joka kehittyi käytännön tarpeiden seurauksena. Esimerkiksi muinaisessa Babyloniassa geometria hallitsi matemaattista ajattelua niin pitkälle, että laskennollisia tehtäviä pyrittiin ratkomaan geometrian keinoin. Varsinaiseksi tieteeksi geometria kehittyi antiikin Kreikassa muutamia vuosisatoja ennen ajanlaskumme alkua.

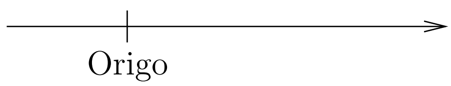
Erittäin merkittävä uudistus koettiin 1600-luvulla, kun ranskalainen René Descartes (1596-1650) otti käyttöön koordinaatiston. Tällöin tasoon piirretyn geometrisen kuvion pisteet voitiin korvata lukupareilla. Näin geometriset ongelmat voitiin muuttaa osaksi laskennalliseen muotoon. Tätä menetelmää kutsutaan *analyyttiseksi geometriaksi*. Analyyttisessa geometriassa pyritään siis päinvastoin kuin vanhan ajan matematiikassa ratkaisemaan geometrisia tehtäviä laskennallisin menetelmin.

René Descartes (1596-1650)

2 Koordinaatisto

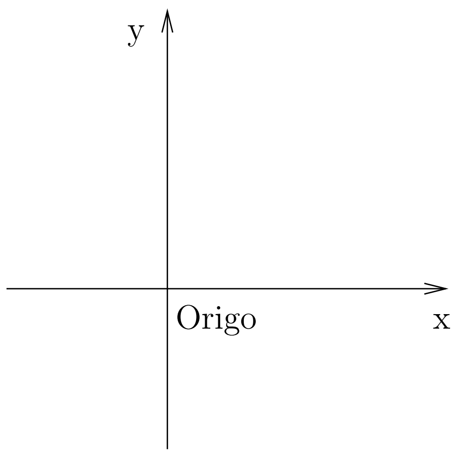
Koordinaatistossa jokaisen yksittäisen pisteen sijainti voidaan määrätä yksikäsitteisesti yhden tai useamman luvun avulla. Jos pisteen tarkka sijainti voidaan ilmaista yhden luvun eli koordinaatin avulla, kyseessä on yksiulotteinen avaruus. Esimerkiksi lukusuora on yksiulotteinen koordinaatisto.

Kuva 1: Lukusuora



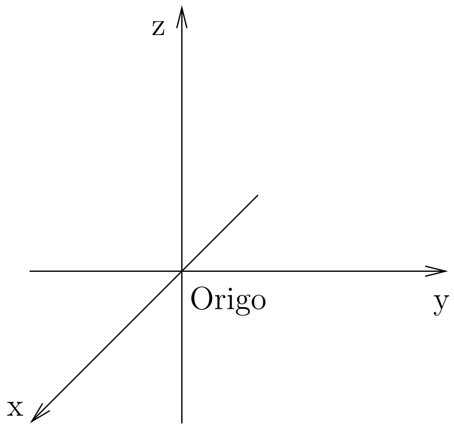
Jos pisteen paikan ilmaisemiseen tarvitaan kaksi koordinaattia, kyseessä on kaksiulotteinen avaruus. Kartta ja tason suorakulmainen xy-koordinaatisto ovat esimerkiksi kaksiulotteisia.

Kuva 2: Tason xy-koordinaatisto



Vastaavasti kolmiulotteisessa avaruudessa pisteen paikan ilmaisemiseen tarvitaan kolme koordinaattia, esimerkkinä avaruuden kolmiulotteinen xyz-koordinaatisto.

Kuva 3: Avaruuden xyz-koordinaatisto



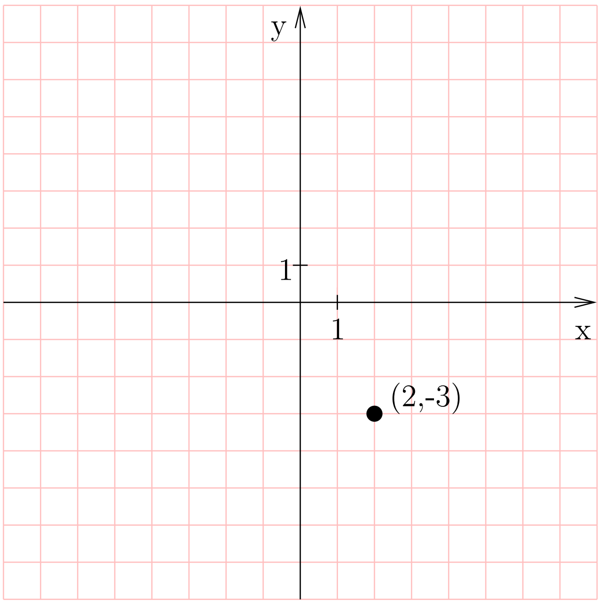
Tarvittaessa koordinaatisto voi olla myös vinokulmainen, jolloin akselit eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan. On myös koordinaatistoja, joiden akselit ovat käyräviivaisia. Esimerkiksi maapallon pituus- ja leveyspiirien muodostama koordinaatisto on tällainen. Nyt tarkastelumme rajoittuu lähinnä tason analyyttiseen geometriaan ja suorakulmaiseen xy-koordinaatistoon, jota kutsutaan René Descartesin mukaan myös karteesiseksi koordinaatistoksi.

2.1 Tason suorakulmainen xy-koordinaatisto

Suorakulmaisessa xy-koordinaatistossa taso on jaettu neljään yhtä suureen osaan kahden toisiaan vasten kohtisuorassa olevan lukusuoran avulla. Näiden lukusuorien leikkauspiste on kummankin lukusuoran nollapiste ja nimeltään *origo*. Vaakatasossa olevaa lukusuoraa kutsutaan x-akseliksi ja pystysuoraa lukusuoraa y-akseliksi. Etäisyyttä y-akselista kutsutaan x-koordinaatiksi tai *abskissaksi* ja etäisyyttä x-akselista kutsutaan y-koordinaatiksi eli *ordinaataksi*. Yhdessä nämä etäisyydet muodostavat pisteen koordinaatit. Tason jokaista pistettä vastaa siis tarkalleen yksi lukupari (x,y) ja vastaavasti jokaista lukuparia vastaa yksi tason piste.

Esimerkiksi pisteen (2,-3) x-koordinaatti (eli abskissa) on 2 ja y-koordinaatti (eli ordinaatta) on -3.

Kuva 4: Piste koordinaatistossa



Esimerkki 1 Missä xy-tasossa sijaitsevat ne pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat ehdon $x \leq 0$?

Ratkaisu:
Tason y-koordinaatti voi saada mitä tahansa arvoja, mutta x-koordinaatti voi saada vain arvoja $x \leq 0$. $x < 0$ y-akselin vasemmalla puolella ja $x = 0$ vain y-akselilla sijaitsevilla pisteillä. Koska molempien ehtojen on oltava yhtäaikaisesti voimassa, ratkaisualueena on y-akseli ja sen vasen puoli.

2.2 Tehtäviä

Tehtävä 1 Missä xy-tasossa sijaitsevat ne pisteet, joiden koordinaatit toteuttavat ehdon

a) $y \neq 0$ b) $x \geq 1$ c) $x = 0$ ja $y = 0$?

Tehtävä 2 Veneestä on loppunut polttoaine ja kapteeni on ankkuroinut sen paikoilleen. Vene sijaitsee majakasta katsottuna 350 metriä suoraan luoteeseen. Ilmoita veneen sijainti xy-koordinaatteina, kun koordinaatiston origona on majakka ja koordinaatiston akselit ovat sen kautta itään ja pohjoiseen kulkevat suorat. Koordinaatiston ruutuvälinä on 100 metriä.

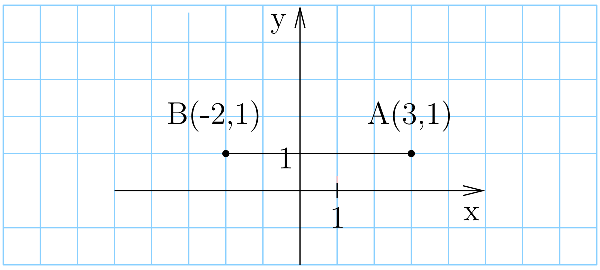
3 Jana

3.1 Janan pituus

Jana on suoran pätkä, jonka päätepisteinä on suoran kaksi eri pistettä. Usein jana nimetään sen päätepisteiden mukaan, esim. jos janan päätepisteet ovat piste A ja piste B, kyseessä on jana AB. Janan pituutta merkitään $|AB|$ ja tämä pituus on aina positiivinen.

Esimerkki 2 Janan päätepisteet ovat A(3,1), B(-2,1). Laske janan AB pituus.

Kuva 5:



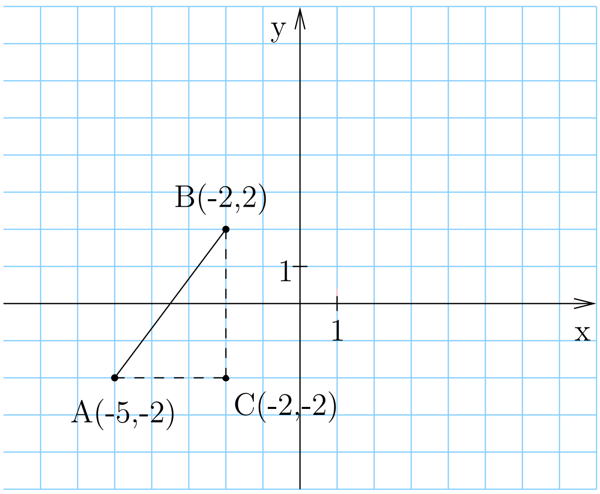
Ratkaisu:
Koska molempien päätepisteiden y-koordinaatti on sama, jana AB on x-akselin suuntainen. Tällöin janan AB pituus on x-koordinaattien erotuksen itseisarvo eli $|AB| = |-2-3| = |-5| = 5$.

Lause 3.1. *x-akselin suuntaisen janan AB pituus on x-koordinaattien erotuksen itseisarvo:* $|AB| = |x_2 - x_1|$.
Vastaavasti y-akselin suuntaisen janan CD pituus on y-koordinaattien erotuksen itseisarvo: $|CD| = |y_2 - y_1|$.

Pisteiden P ja Q välisellä etäisyydellä tarkoitetaan samaa kuin janan PQ pituudella.

Esimerkki 3 Laske pisteiden A(-5,-2) ja B(-2,2) välinen etäisyys $|AB|$.

Kuva 6:



Ratkaisu:
Pisteiden A ja B etäisyys on janan AB pituus. Jana AB on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat x-akselin ja y-akselin suuntaiset. x-akselin suuntaisen kateetin pituus on $|-5-(-2)| = |-3| = 3$ ja y-akselin suuntaisen kateetin pituus on vastaavasti $|-2-2| = |-4| = 4$. Janan AB pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= 3^2 + 4^2 \\ |AB|^2 &= 25 \qquad \| \sqrt{} \\ |AB| &= 5.\end{aligned}$$

Vastaus: Janan AB pituus on 5.

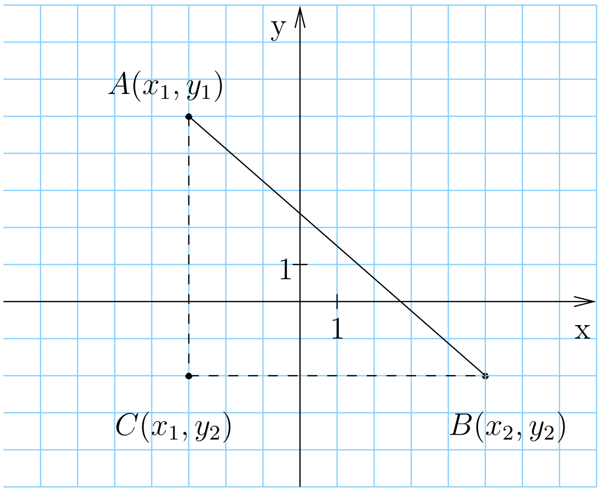
Huom! Otetaan huomioon vain neliöjuuren positiivinen arvo, sillä janan pituus ei voi olla negatiivinen.

Lause 3.2. *Pisteiden $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ välinen etäisyys on*

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Todistus. Olkoon janan AB päätepisteet $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$. Pisteet A ja B muodostavat pisteen $C(x_1, y_2)$ kanssa koordinaatistoon suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa jana AB on.

Kuva 7:



Tällöin x- ja y-akselien suuntaisten kateettien AC ja BC pituudet ovat päätepisteiden koordinaattien erotusten itseisarvoja:
$AC = |y_2 - y_1|$ ja $BC = |x_2 - x_1|$.
Merkitään lyhyemmin janan AB pituutta $|AB| = d$. Pythagoraan lauseen avulla saadaan pituus d:

$$\begin{aligned}
d^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\
d^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad \| \sqrt{} \quad , d > 0 \\
d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}$$

Huom! Itseisarvojen poistaminen on sallittua, koska molemmat itseisarvolausekkeet on korotettu toiseen potenssiin. $\square$

3.2 Janan keskipiste

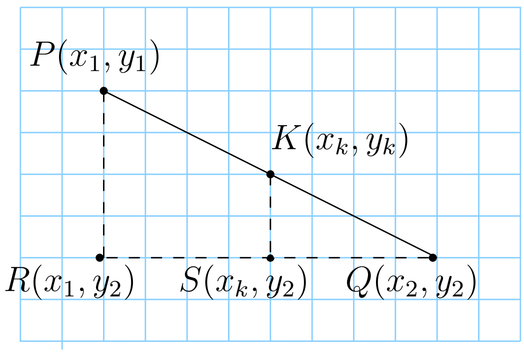
Kun jana jaetaan kahteen yhtä suureen osaan, janan jakavaa pistettä kutsutaan janan keskipisteeksi.

Lause 3.3. *Pisteiden* (x_1, y_1) *ja* (x_2, y_2) *välisen janan keskipisteen koordinaatit ovat*

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \textit{ja} \qquad y_k = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Todistus. Olkoon $P(x_1, y_1)$ ja $Q(x_2, y_2)$ janan PQ päätepisteet ja olkoon $K(x_k, y_k)$ janan PQ keskipiste. Kun otetaan avuksi piste $R(x_1, y_2)$, saadaan muodostettua suorakulmainen kolmio PQR, jonka kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kun kolmioon PQR piirretään pisteen K kautta sivun PR suuntainen suora, saadaan yhdenmuotoiset kolmiot KQS ja PQR.

Kuva 8:



Koska yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinjanojen pituuksien suhde on sama, on

$\dfrac{QK}{QP} = \dfrac{QS}{QR} = \dfrac{1}{2}$, jolloin $QS = \dfrac{1}{2}QR$.

Kuvion merkintöjä hyväksi käyttäen voidaan kirjoittaa

$x_k - x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, josta

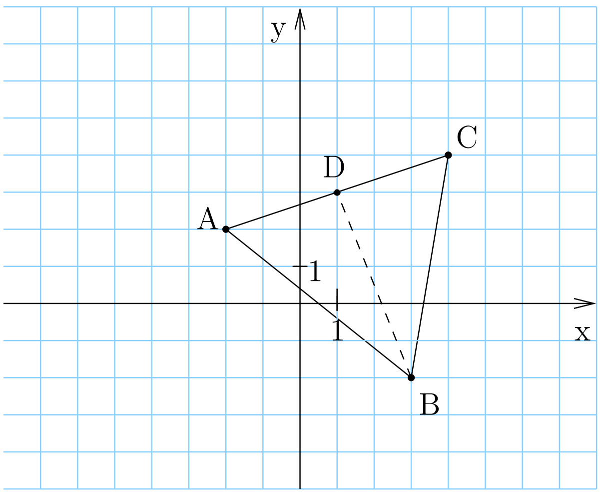
$$x_k = x_2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$y_k = y_2 + \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad \square$$

Esimerkki 4 Kolmion kärkipisteet ovat $A(-2, 2)$, $B(3, -2)$ ja $C(4, 4)$. Määritä kärjestä B piirretyn keskijanan BD pituus.

Kuva 9:



Ratkaisu:
Kolmion keskijana yhdistää kulman B ja sen vastaisen sivun AC keskipisteen D. Lasketaan ensin keskipisteen D koordinaatit:

$$x_k = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{ja} \qquad y_k = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Keskipisteen D koordinaatit ovat siis $(1, 3)$. Nyt voidaan määrittää keskijanan BD pituus:
$|BD| = \sqrt{(1-3)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5,4.$

Vastaus: noin 5,4

3.3 Tehtäviä

Tehtävä 3 Määritä pisteen a) $(-3, -4)$, b) (x, y) etäisyys origosta.

Tehtävä 4 Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(-3, -4)$, $B(4, 0)$ ja $C(1, 3)$. Osoita, että kolmio ABC on tasakylkinen.

Tehtävä 5 Janan päätepisteet ovat $P(-4, 5)$ ja $Q(6, -1)$. Laske janan keskipisteen K etäisyys pisteestä $R(-5, -2)$.

Tehtävä 6 Piste $(-1,4; 0,9)$ on janan AB keskipiste. Määritä pisteen B koordinaatit, kun pisteen A koordinaatit ovat $(-5, 4)$.

4 Suora

Suoraa viivaa, joka jatkuu molempiin suuntiin rajattomasti, kutsutaan *suoraksi*. Suoralla ei ole alkua, loppua eikä leveyttä. Suoralla ei siis ole päätepisteitä, toisin kuin esimerkiksi janalla. Kaksiulotteisessa karteesisessa koordinaatistossa eli xy-tasossa suoria ovat vakiofunktioiden sekä ensimmäisen asteen polynomifunktioiden kuvaajat.

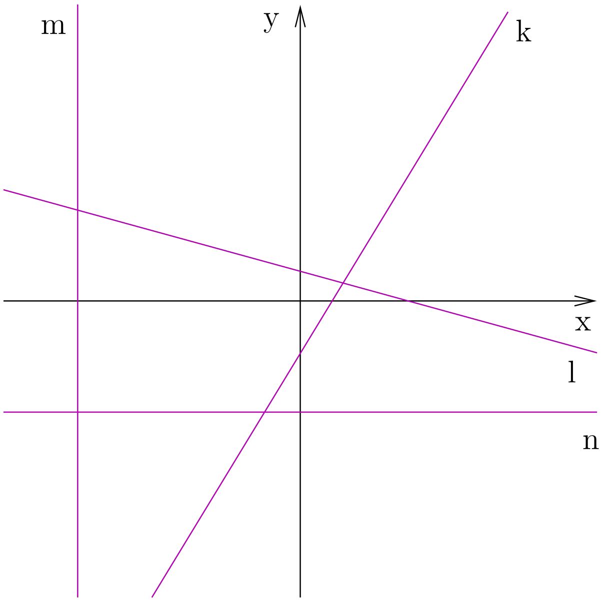
4.1 Suoran suuntakulma

Annetun pisteen kautta kulkee aina äärettömän monta suoraa. Samoin annetun suoran s suuntaisia suoria on äärettömän monta. Sen sijaan annetun pisteen P kautta kulkee vain yksi suoran s suuntainen suora. Suoran suuntaa voidaan tutkia esimerkiksi *suoran suuntakulman* avulla.

Suoran suuntakulma on suoran ja positiivisen x-akselin välinen terävä tai suora kulma. x-akselin yläpuolella suuntakulma on positiivinen ja alapuolella negatiivinen. x-akselin suuntaisen suoran suuntakulma on 0° ja y-akselin suuntaisen suoran suuntakulma on 90°. Näin ollen suuntakulman α määrittelyväli on $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Esimerkki 5 Tutkitaan kuvan 10 suoria.

Kuva 10:



Suoran k suuntakulma $\alpha_1 > 0\,°$, jolloin suora k on nouseva. Suoran l suuntakulma $\alpha_2 < 0\,°$, jolloin suora l on laskeva. Koska suora n on x-akselin suuntainen, sen suuntakulma $\alpha_3 = 0\,°$. y-akselin suuntaisen suoran m suuntakulma $\alpha_4 = 90\,°$.

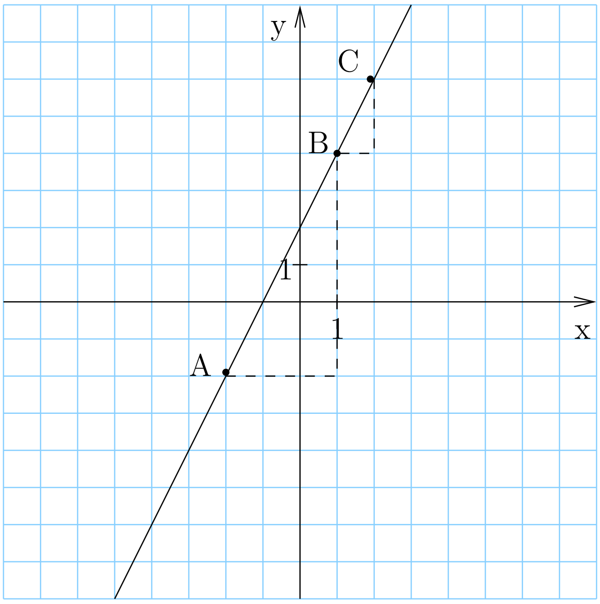
4.2 Suoran kulmakerroin

Piirretään koordinaatistoon suora, joka kulkee pisteiden $A(-2,-2)$, $B(1,4)$ ja $C(2,6)$ kautta ja tutkitaan suhdetta

$$\frac{\text{y-koordinaatin muutos}}{\text{x-koordinaatin muutos}}$$

siirryttäessä pisteestä A pisteeseen B ja edelleen pisteeseen C.

Kuva 11:



Siirryttäessä pisteestä A pisteeseen B y-koordinaatin muutos x-koordinaatin muutoksen suhteen on $\frac{6}{3} = 2$.
Siirryttäessä pisteestä B pisteeseen C tämä suhde on $\frac{2}{1} = 2$.
Molemmat suhteet ovat siis samat.

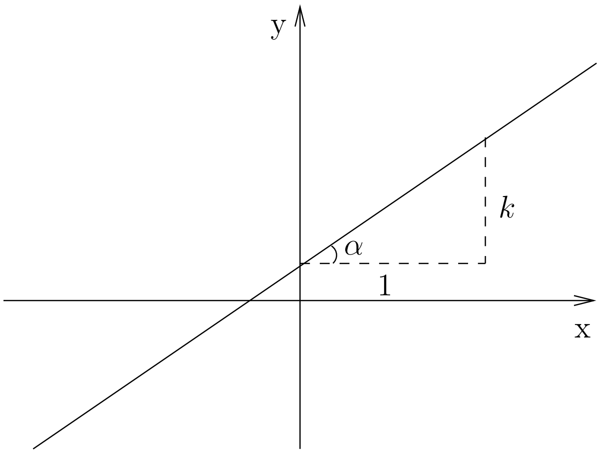
Kun siirrytään suoraan pisteestä toiseen, niin suhde

$$\frac{\text{y-koordinaatin muutos}}{\text{x-koordinaatin muutos}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

on aina sama. Tätä koordinaattien muutoksen suhdetta sanotaan *suoran kulmakertoimeksi*. Merkitään jatkossa kulmakerrointa kirjaimella k.
Suora on nouseva, kun kulmakerroin on positiivinen. Vastaavasti suora on laskeva, kun kulmakerroin on negatiivinen.

Suoran suuntakulman α ja sen kulmakertoimen k välillä on yhteys, joka selvinnee kuvasta 12.

Kuva 12:



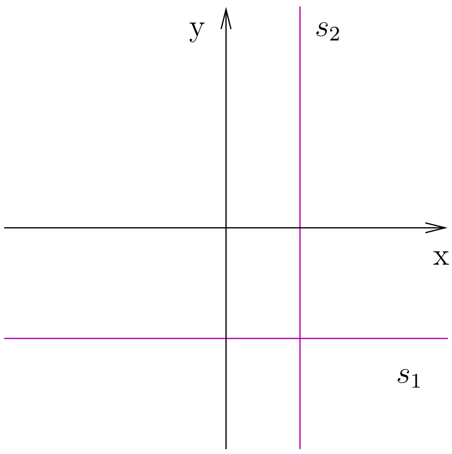
Tämä yhteys tarkentuu seuraavassa lauseessa.

Lause 4.1. *Suuntakulman avulla ilmaistuna kulmakerroin*

$$k = \tan\alpha,\ kun\ \alpha \neq 90\,^\circ.$$

Olkoon s_1 ja s_2 suoria (kuva 13). Määritetään seuraavaksi suorien s_1 ja s_2 kulmakertoimet.

Kuva 13:



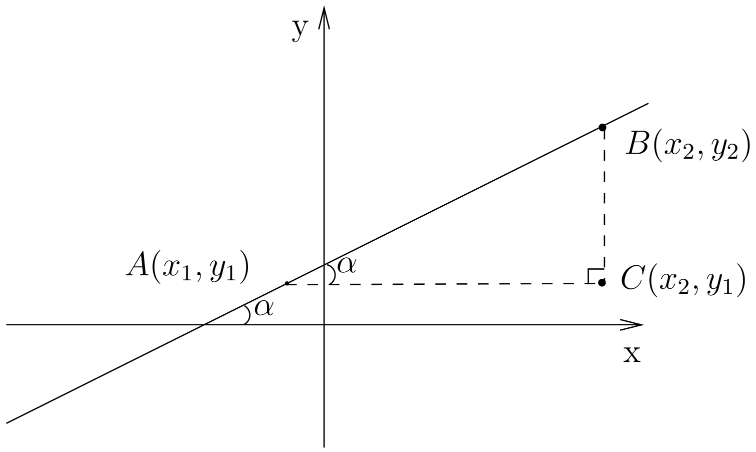
Siirryttäessä pisteestä toiseen x-akselin suuntaisella suoralla s_1 y-koordinaatti ei muutu, jolloin suhde $\frac{\text{y-koordinaatin muutos}}{\text{x-koordinaatin muutos}}$ on siis 0. Suoran s_1 kulmakerroin on 0.

Siirryttäessä pisteestä toiseen y-akselin suuntaisella suoralla s_2 x-koordinaatti ei muutu eli x-koordinaatin muutos on 0. Koska nollalla ei voi jakaa, suhdetta $\frac{\text{y-koordinaatin muutos}}{\text{x-koordinaatin muutos}}$ ei ole määritelty. Suoralla s_2 ei siis ole kulmakerrointa. Myös määritettäessä y-akselin suuntaisen suoran kulmakerrointa suuntakulman avulla (lause 4.1) päädytään samaan tulokseen, sillä y-akselin suuntaisen suoran suuntakulma $\alpha = 90\,°$, jolloin $\tan \alpha$ ei ole määritelty. Seuraava lause tiivistä edellä saadut tulokset.

Lause 4.2. *X-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on* 0*, mutta y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa.*

Tutkitaan seuraavaksi, miten määritetään pisteiden $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin, kun kyseinen suora ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen.

Kuva 14:



Kuviossa suora on nouseva ja tällöin suuntakulma $\alpha > 0\,°$. Kuvion kolmion sivu AC on x-akselin suuntainen. Nyt pisteiden A ja B kautta kulkeva suora leikkaa yhdensuuntaiset suorat, jolloin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Kuvioon piirretyssä kolmiossa siis myös kulma $BAC = \alpha$. Koska kolmio ABC on suorakulmainen ja $|BC| = y_2 - y_1$ ja $|AC| = x_2 - x_1$, saadaan trigonometrian mukaan

$$\tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Lauseen 4.1 nojalla $k = \tan\alpha$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Lause 4.3. *Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta kulkevan suoran kulmakerroin*

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

kun $x_1 \neq x_2$ eli suora ei ole y-akselin suuntainen.

Esimerkki 6 Onko piste $C(-50, 1025)$ pisteiden $A(50, 1325)$ ja $B(75, 1400)$ kautta kulkevalla suoralla?

Ratkaisu:
Piste C on suoralla AB, jos ja vain jos suoralla AC on sama kulmakerroin kuin suoralla AB. Lasketaan suorien AB ja AC kulmakertoimet.
Suoran AB kulmakerroin:

$$\frac{1400 - 1327}{75 - 50} = \frac{75}{25} = 3.$$

Suoran AC kulmakerroin:

$$\frac{1025 - 1325}{-50 - 50} = \frac{-300}{-100} = 3.$$

Koska suorien AB ja AC kulmakertoimet ovat samat, piste C sijaitsee pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla.

Vastaus: On.

Jos kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset, niiden kulmakertoimet ovat samat tai molemmat suorat ovat y-akselin suuntaisia. Jos kulmakertoimet ovat erisuuret, suorat eivät ole yhdensuuntaiset ja leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä. Tämän leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat molempien suorien yhtälöt.

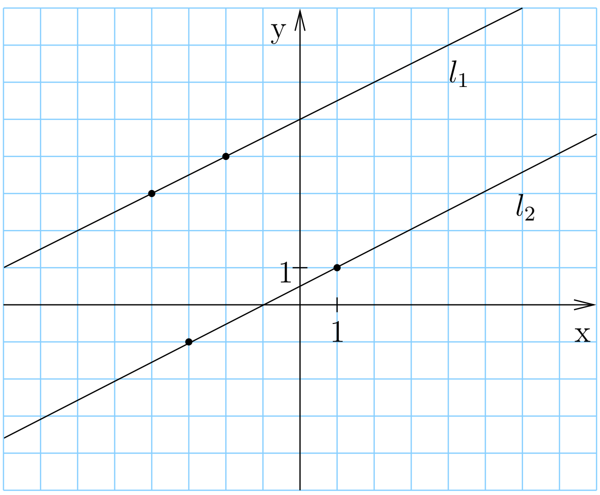
Esimerkki 7 Suora l_1 kulkee pisteiden $(-3,-1)$ ja $(1,1)$ kautta ja suora l_2 kulkee pisteiden $(-4,3)$ ja $(-2,4)$ kautta. Leikkaavatko suorat toisensa?

Ratkaisu:
Lasketaan suorien l_1 ja l_2 kulmakertoimet.

Suora l_1: $\quad k = \dfrac{1-(-1)}{1-(-3)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Suora l_2: $\quad k = \dfrac{4-3}{-2-(-4)} = \dfrac{1}{2}.$

Kuva 15:



Koska suorat l_1 ja l_2 eivät ole sama suora ja niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret, suorat ovat yhdensuuntaiset. Ne eivät siis leikkaa missään pisteessä.

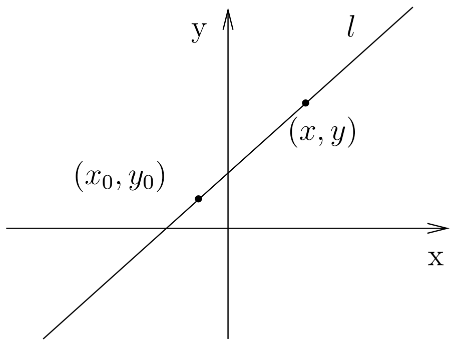
Vastaus: Suorat eivät leikkaa.

4.3 Suoran yhtälöt

Suoran yhtälö voidaan määrittää, jos suoralta tunnetaan yksi piste sekä suoran suunta eli kulmakerroin on tunnettu.

Johdetaan seuraavaksi suoran yhtälö. Olkoon piste (x, y) suoran l mielivaltainen piste ja olkoon piste (x_o, y_o) suoran l kiinteä piste.

Kuva 16:



Suoran l kulmakerroin on siis

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}(, x \neq x_o).$$

Yhtälö voidaan saattaa muotoon $y - y_0 = k(x - x_0)$.
Tämä yhtälö on tosi minkä tahansa suoran l pisteen (x, y) koordinaattiarvoilla. Toisaalta jokainen piste, jonka koordinaatit toteuttavat yhtälön, on suoran piste. Yhtälöä kutsutaankin suoran l yhtälöksi.

Lause 4.4. *Jos suoran kulmakerroin on k ja se kulkee pisteen (x_0, y_0) kautta, suoran yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_o)$.*

Jos suoran kiinteä piste on $(0, b)$ eli piste sijaitsee y-akselilla ja piste (x, y) on edelleen mielivaltainen, suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y - b}{x - 0}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Tästä saadaan $kx = y - b$ ja edelleen $y = kx + b$.

Suora $y = kx + b$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$, joten origon $(0, 0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = kx$. Kun kulmakerroin $k = 0$, on suora x-akselin suuntainen ja sen yhtälö on $y = b$. x-akselin yhtälö on siis $y = 0$. Kuten edellä esitetty, y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Jos tällainen y-akselin suuntainen suora kulkee pisteen (a, b) kautta, sen jokaisella pisteellä on sama x-koordinaatti eli y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on siis $x = a$. y-akselin yhtälö on vastaavasti $x = 0$.

Lause 4.5. *Suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = kx + b$ tai $x = a$.*

Siirtämällä yhtälön kaikki termit samalle puolelle jokaisen suoran yhtälö voidaan saattaa muotoon $ax + by + c = 0$, jossa kertoimet a, b ja c ovat reaalilukuja. Minkä tahansa muotoa $ax + by + c = 0$ olevan yhtälön kuvaaja on suora, kun $a \neq 0$ tai $b \neq 0$.
Jos $a = 0$ ja $b \neq 0$, saadaan yhtälö muotoon $y = -\frac{c}{b}$, joka on x-akselin suuntaisen suoran yhtälö.
Jos taas $b = 0$, mutta $a \neq 0$ saadaan yhtälöstä $ax + by + c = 0$ y-akselin suuntaisen suoran yhtälö $x = -\frac{c}{a}$.
Yhtälöä $ax + by + c = 0$ kutsutaankin suoran yhtälön *yleiseksi muodoksi*, koska erikoistapauksina tästä yhtälöstä saadaan myös koordinaattiakselien suuntaiset suorat.

Lause 4.6. *Ensimmäisen asteen yhtälön $ax + by + c = 0$ kuvaaja on aina suora, kun $a \neq 0$ tai $b \neq 0$.*
Tästä suoran yhtälön yleisestä muodosta saadaan myös koordinaattiakselien suuntaiset suorat.

Esimerkki 8 Suora kulkee pisteen $(-1, -1)$ kautta ja sen kulmakerroin on $\frac{1}{3}$. Muodosta suoran yhtälö. Muuta muodostamasi yhtälö sekä ratkaistuun että yleiseen muotoon.

Ratkaisu:
Sijoitetaan suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_o)$ pisteen $(-1, -1)$ koordinaatit $x_0 = -1$ ja $y_0 = -1$ sekä kulmakerroin $k = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} y - (-1) =& \frac{1}{3}(x - (-1)) \\ y + 1 =& \frac{1}{3}(x + 1). \end{aligned}$$

Seuraavaksi saatetaan muodostettu suoran yhtälö ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} y + 1 =& \frac{1}{3}(x + 1) \\ y + 1 =& \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y =& \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 1 \\ y =& \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

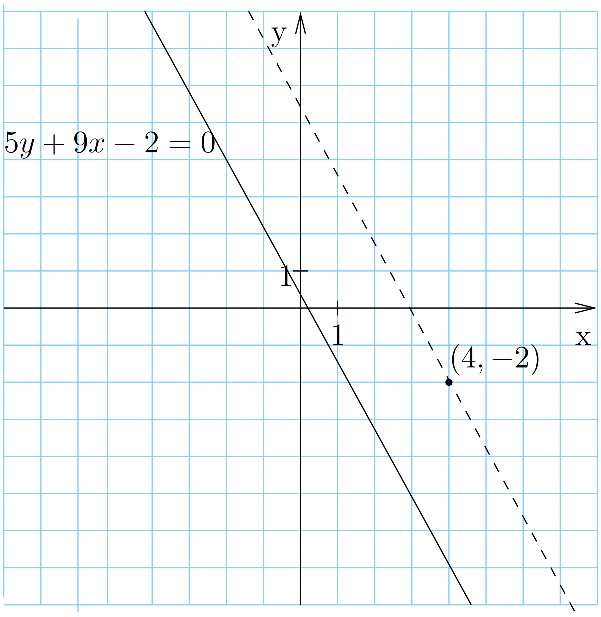
Tehtävänä on vielä saattaa suoran yhtälö yleiseen muotoon. Yleensä yhtälöstä poistetaan samalla nimittäjät.

$$\begin{aligned} y + 1 =& \frac{1}{3}(x + 1) \qquad \| \cdot 3 \\ 3(y + 1) =& (x + 1) \\ 3y + 3 - x - 1 =& 0 \\ -x + 3y + 2 =& 0 \end{aligned}$$

Vastaus: suoran yhtälö on $y+1 = \frac{1}{3}(x+1)$, ratkaistussa muodossa $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ja yleisessä muodossa $x - 3y - 2 = 0$.

Esimerkki 9 Suora kulkee pisteen $(4, -2)$ kautta ja on suoran $5y + 9x - 2 = 0$ suuntainen.

Kuva 17:



a) Määritä suoran yhtälö.

b) Missä pisteissä suora leikkaa koordinaattiakselit?

Ratkaisu:

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat. Saatetaan suora $5y + 9x - 2 = 0$ ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} 5y + 9x - 2 &= 0 \\ 5y &= -9x + 2 \\ y &= -\frac{9}{5}x + \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

jolloin saadaan kulmakerroin $k = -\frac{9}{5}$. Nyt pystytään määrittämään suoran yhtälö sijoittamalla pisteen $(4, -2)$ koordinaatit ja kulmakerroin $k = -\dfrac{9}{5}$ suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_o)$:

$$
\begin{aligned}
y - (-2) &= -\frac{9}{5}(x-4) \\
y + 2 &= -\frac{9}{5}x + \frac{36}{5} \\
y &= -\frac{9}{5}x + 5\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

b)Yhtälön ratkaistusta muodosta $y = -\frac{9}{5}x + 5\frac{1}{5}$ nähdään, että suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 5\frac{1}{5})$.
Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti on 0. Sijoitetaan arvo $y = 0$ edellä olevaan yhtälöön ja ratkaistaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{9}{5}x + \frac{26}{5} \\
\frac{9}{5}x &= \frac{26}{5} \qquad \| \cdot 5 \\
9x &= 26 \qquad \| : 9 \\
x &= 2\frac{8}{9}.
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kysytyn suoran yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -\frac{9}{5}x + 5\frac{1}{5}$. Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 5\frac{1}{5})$ ja x-akselin pisteessä $(2\frac{8}{9}, 0)$.

4.4 Kahden suoran leikkauspiste

Suoran $ax+by+c = 0$ jokaisen pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Vastaavasti pisteiden, jotka eivät sijaitse kyseisellä suoralla, koordinaatit eivät toteuta suoran yhtälöä.

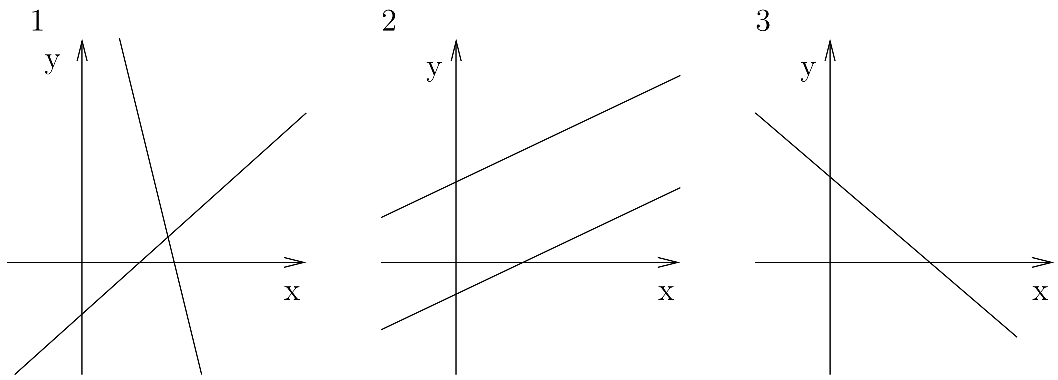
Kaksi tason suoraa voivat

- leikata toisensa
- olla yhdensuuntaisia olematta kuitenkaan samoja tai
- olla sama suora.

Suorien $ax + by + c = 0$ ja $dx + ey + f = 0$ mahdolliset yhteiset pisteet saadaan selville ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0. \end{cases}$$

Kuva 18:



Kuvan 18 kohdassa

1. yhtälöparilla on yksi ratkaisu.
2. yhtälöparilla ei ole ratkaisuja.
3. yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja.

Esimerkki 10 Määritä suorien $2x - y + 3 = 0$ ja $x + y + 2 = 0$ leikkauspiste. Kuinka suuri on näiden suorien ja y-akselin rajaaman kolmion ala?

Ratkaisu:
Leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat molemmat yhtälöt, eli ne toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari eliminoimalla toinen muuttujista. Lasketaan yhtälöt yhteen. Koska muuttujan y kertoimet ovat vastalukuja, saadaan yksi yhden muuttujan yhtälö:

$$\begin{array}{llll} \left\{\begin{array}{l} 2x \\ x \end{array}\right. & \begin{array}{l} -y \\ +y \end{array} & \begin{array}{l} +3 \\ +2 \end{array} & \begin{array}{l} =0 \\ =0 \end{array} \\ \hline 3x & & +5 & =0 \end{array}$$

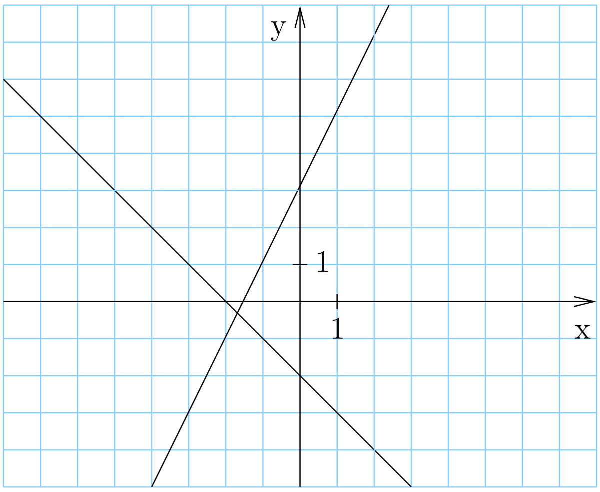
Tästä yhtälöstä saadaan ratkaistua $x = -\frac{5}{3}$.
y:n arvo saadaan sijoittamalla saatu x:n arvo kumpaan tahansa alkuperäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} + y + 2 &= 0 \\ y &= \frac{5}{3} - 2 \\ y &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

.

Suorien $2x - y + 3 = 0$ ja $x + y + 2 = 0$ leikkauspiste on siis piste $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$.

Kuva 19:



Suorien ja y-akselin rajaaman kolmion kannaksi valitaan suorien y-akselista rajaama jana. Suorien yhtälöiden ratkaistuista muodoista $y = 2x + 3$ ja $y = -x-2$ nähdään, että suorat leikkaavat y-akselin pisteissä $(0, 3)$ ja $(0, -2)$. Kolmion kannan pituus on

$$|3 - (-2)| = |3 + 2| = 5.$$

Kolmion korkeus on sama kuin suorien leikkauspisteen etäisyys y-akselista, eli leikkauspisteen x-koordinaatin itseisarvo:

$$\left|-\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}.$$

Nyt voidaan laskea annettujen suorien ja y-akselin rajoittaman kolmion ala:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}.$$

Vastaus: Leikkauspiste on piste $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$ ja kolmion ala on $4\frac{1}{6}$.

Esimerkki 11 Osoita, että suorat $-ax + y - 8 - 3a = 0$ kulkevat saman pisteen kautta riippumatta vakion a arvosta.

Ratkaisu:
Kutakin vakion a arvoa vastaa tietty suora. Antamalla vakiolle a eri arvoja saadaan ääretön määrä suoria. Annetaan vakiolle a nyt arvot 0 ja 1:
$a = 0$:

$$\begin{aligned} -0x + y - 8 - 3 \cdot 0 &= 0 \\ y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$a = 1$:

$$\begin{aligned} -1x + y - 8 - 3 \cdot 1 &= 0 \\ -x + y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan näin saatujen suorien $y - 8 = 0$ ja $-x + y - 11 = 0$ leikkauspiste:

$$\begin{cases} y - 8 = 0 \\ -x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

Saatetaan ensimmäinen yhtälö muotoon $y = 8$ ja sijoitetaan se toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} -x + 8 - 11 &= 0 \\ -x &= 3 \qquad \| \cdot (-1) \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Näiden suorien leikkauspiste on siis $(-3, 8)$. Sijoitetaan leikkauspisteen koordinaatit alkuperäiseen yhtälöön:

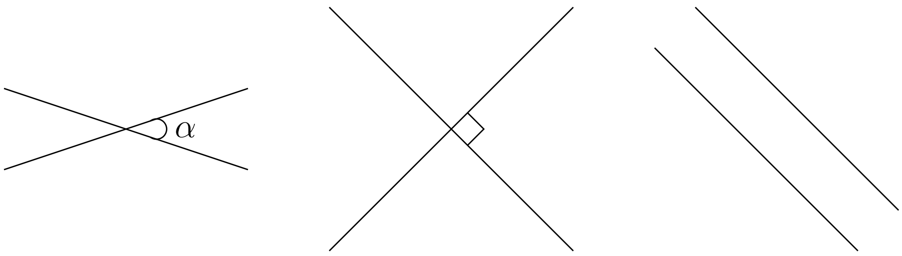
$$
\begin{aligned}
-a\cdot(-3)+8-8-3a &= 0\\
3a-3a &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Pisteen $(-3,8)$ koordinaatit siis toteuttavat yhtälön riippumatta vakion a arvosta, joten kaikki suorat $-ax+y-8-3a=0$ kulkevat pisteen $(-3,8)$ kautta. □

4.5 Kahden suoran välinen kulma

Kahden suoran välisellä kulmalla α tarkoitetaan yleensä kahden suoran välistä terävää tai suoraa kulmaa, jolloin suorien välinen kulma $\alpha \leq 90\,°$. Jos suorat ovat yhdensuuntaiset tai sama suora, kulman suuruudeksi on sovittu $0\,°$. Suorien välinen kulma α toteuttaa siis ehdon $0\,° \leq \alpha \leq 90\,°$.

Kuva 20:

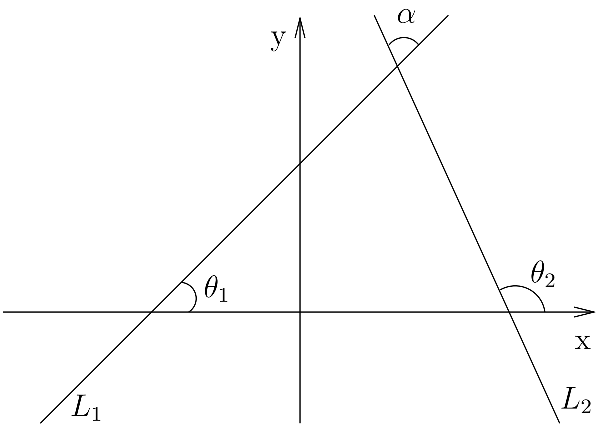


Lause 4.7. *Jos suorien kulmakertoimet ovat k_1 ja k_2, suorien välinen kulma α voidaan laskea kaavasta*

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

Todistus.

Kuva 21:



Olkoon suoran L_1 kulmakerroin k_1 ja suoran L_2 kulmakerroin k_2. Koska kolmion kulmien summa on $180\,^\circ$ ja vieruskulmien summa on $180\,^\circ$, on $\theta_2 = \alpha + \theta_1$ ja edelleen $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. Tämän ja lauseen 4.1 nojalla voidaan kirjoittaa

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \qquad \Box$$

Esimerkki 12 Laske suorien $y = 2$ ja $-2x + 3y - 4 = 0$ välinen kulma 0,1 asteen tarkkuudella.

Ratkaisu:
Ratkaistaan ensin suorien kulmakertoimet.
Suora $y = 2$ on x-akselin suuntainen, jolloin sen kulmakerroin $k_1 = 0$.
Saatetaan suora $-2x + 3y - 4 = 0$ ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} -2x + 3y - 4 &= 0 \\ 3y &= 2x + 4 \qquad \| : 3 \\ y &= \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Tästä nähdään, että kulmakerroin $k_2 = \dfrac{2}{3}$.
Sijoitetaan nyt kulmakertoimet $k_1 = 0$ ja $k_2 = \dfrac{2}{3}$ edellä esitettyyn kaavaan

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{0 - \frac{2}{3}}{1 + 0 \cdot \frac{2}{3}}\right| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

josta voidaan ratkaista suorien välisen kulman α suuruus:

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{2}{3} \\ \alpha &\approx 33{,}7\,^\circ. \end{aligned}$$

Vastaus: Annettujen suorien välinen kulma on noin $33{,}7\,^\circ$.

Kun suorien välinen kulma $\alpha = 90\,^\circ$, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin $\tan\alpha$ ei ole määritelty, jolloin suorien välisen kulman yhtälössä nimittäjän $1 + k_1k_2$ on oltava nolla. Tällöin siis $k_1k_2 = -1$. Vastaavasti, jos $1 + k_1k_2$ on nolla, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
Kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan myös silloin, kun suorat ovat koordinaattiakselien suuntaisia, vaikka edellä esitetty ehto ei tällöin olekaan voimassa.

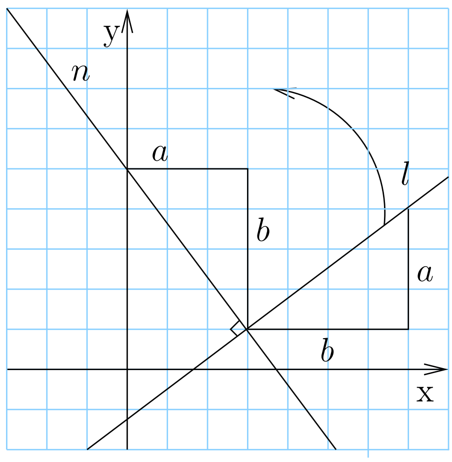
Lause 4.8. *Kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiaan vasten täsmälleen silloin, kun niiden kulmakertoimet k_1 ja k_2 toteuttavat ehdon*

$$k_1k_2 = -1$$

tai toinen suora on x-akselin ja toinen y-akselin suuntainen.

Suora, joka on kohtisuorassa toista suoraa vastaan, on tämän *normaali*.
Olkoon suoran l kulmakerroin $\dfrac{a}{b}$. Tällöin siis y-koordinaatin muutos on a ja x-koordinaatin muutos on b. Kuvassa 22 on esitetty suora l ja koordinaattien muutokset apukolmion avulla.

Kuva 22:



Kun suoraa l kierretään $90\,^{\circ}$, saadaan suoran l normaali n ja samalla suoran l apukolmio kiertyy normaalin n apukolmioksi. Kuviosta nähdään, että normaali n on laskeva suora ja että sen kulmakerroin on $-\dfrac{b}{a}$.

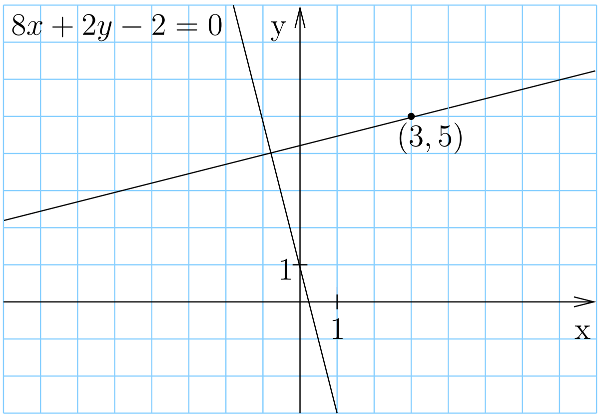
Lause 4.9. *Jos suoran kulmakerroin on* $\dfrac{a}{b}$, *sen normaalin kulmakerroin on suoran kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku* $-\dfrac{b}{a}$.

Esimerkki 13 Määritä sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(3,5)$ kautta ja on kohtisuorassa suoraa $8x+2y-2=0$ vastaan.

Ratkaisu:

Saatetaan yhtälö $8x+2y-2=0$ ratkaistuun muotoon $y=-4x+1$. Tästä nähdään, että kyseisen suoran kulmakerroin on -4. Tämän suoran normaalin, eli suoraa vasten kohtisuorassa olevan suoran, kulmakerroin on tällöin $\dfrac{1}{4}$ (suoran $8x+2y-2=0$ kulmakertoimen käänteisluvun vastaluku).

Kuva 23:



Koska suora kulkee pisteen $(3, 5)$ kautta, pystytään nyt muodostamaan normaalin yhtälö:

$$\begin{aligned} y - 5 =& \frac{1}{4}(x - 3) \\ y =& \frac{1}{4}x + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

Vastaus: $y = \frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$.

4.6 Pisteen etäisyys suorasta

Pisteen etäisyydellä suorasta tarkoitetaan yleensä pisteen lyhintä eli kohtisuoraa etäisyyttä suorasta.

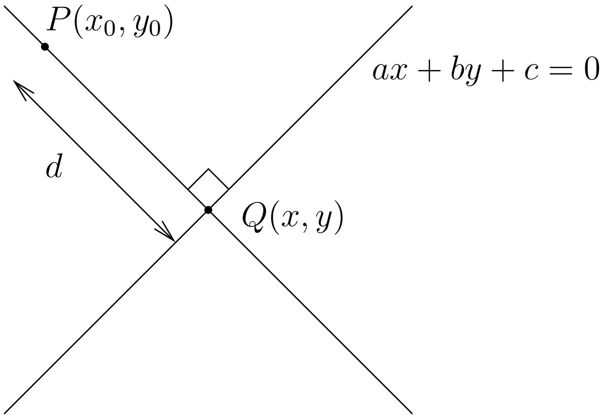
Lause 4.10. *Pisteen $P(x_0, y_0)$ etäisyys d suorasta $ax + by + c = 0$ on*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Osoittajassa on siis pisteen $P(x_o, y_0)$ koordinaatit sijoitettuna lausekkeeseen $ax+by+c = 0$ ja nimittäjässä on yhtälön kertoimien a ja b neliöiden summan neliöjuuri.

Todistus. Oletetaan, että suoran yhtälössä $a \neq 0$ ja $b \neq 0$ eli kyseinen suora ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen.

Kuva 24:



Pisteen $P(x_0, y_0)$ etäisyys d suorasta $ax+by+c=0$ on kohtisuora välimatka PQ.
Suoran PQ yhtälö on $y - y_0 = k_{PQ}(x - x_0)$.
Suoran $ax+by+c=0$ yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, josta saadaan kulmakerroin $k_s = -\frac{a}{b}$.

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos kulmakertoimien tulo on -1. Tätä hyödyntämällä voidaan ratkaista kulmakerroin k_{PQ}:

$$\begin{aligned} k_{PQ} \cdot k_s &= -1 \\ k_{PQ} \cdot (-\frac{a}{b}) &= -1 \qquad \| : (-\frac{a}{b}) \\ k_{PQ} &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

suoran PQ yhtälö on siis $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$.

Etäisyys d on sama kuin janan PQ pituus eli

$$d = |PQ| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (\tfrac{b}{a}(x-x_0))^2}$$

$$= \sqrt{(1+\tfrac{b^2}{a^2})(x-x_0)^2}.$$

Yhtälöparista $\begin{cases} y - y_0 = \frac{b}{a}(x-x_0) \\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{cases}$ eli $\begin{cases} y = & \frac{b}{a}(x-x_0) + y_0 \\ y = & -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{cases}$

saadaan käyttämällä sijoitusmenetelmää

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a}(x-x_0) + y_0 =& -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\
\frac{a}{b}(x-x_0) + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b} + y_0 =& 0 \\
\frac{b}{a}x + \frac{a}{b}x =& \frac{b}{a}x_0 - \frac{c}{b} - y_0 \qquad \| \cdot b \\
ax + \frac{b^2}{a}x =& \frac{b^2}{a}x_0 - by_0 - c \\
(a + \frac{b^2}{a})x =& \frac{b^2}{a}x_0 - by_0 - c \qquad \| : (a + \frac{b^2}{a}) \\
x =& \frac{\frac{b^2}{a}x_0 - by_0 - c}{a + \frac{b^2}{a}}.
\end{aligned}$$

Tästä ratkaistaan erotus $x - x_0$:
Vähennetään yhtälön molemmilta puolilta termi x_0

$$\begin{aligned}
x - x_0 =& \frac{\frac{b^2}{a}x_0 - by_0 - c}{a + \frac{b^2}{a}} - x_0 \\
x - x_0 =& \frac{\frac{b^2}{a}x_0 - (a + \frac{b^2}{a})x_0 - by_0 - c}{a + \frac{b^2}{a}} \\
x - x_0 =& \frac{-(ax_0 - by_0 - c)}{a + \frac{b^2}{a}}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan ratkaistu lauseke erotuksen $x - x_0$ paikalle etäisyyden d lausekkeeseen:

$$d = |PQ| = \sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})(\frac{-(ax_0 - by_0 - c)}{a+\frac{b^2}{a}})^2} = \sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})\frac{(-(ax_0 - by_0 - c))^2}{(a+\frac{b^2}{a})^2}}$$
$$= \sqrt{(1+\frac{b^2}{a^2})\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2(1+\frac{b^2}{a^2})^2}} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2(1+\frac{b^2}{a^2})}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

siis pisteen (x_0, y_0) etäisyys d suorasta $ax + by + c = 0$ on

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \square$$

Todistuksessa oletettiin, että suora ei ole kummankaan koordinaattiakselin suuntainen. Kaava kuitenkin voidaan osoittaa oikeaksi myös tapauksissa $a = 0$ tai $b = 0$. Tällä kertaa tämä todistus kuitenkin sivuutetaan.

Esimerkki 14 Määritä pisteen $(4, -2)$ etäisyys suorasta $y = 3x + 6$.

Ratkaisu:
Saatetaan suoran yhtälö ensin yleiseen muotoon $ax + by + c = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 3x + 6 \\ -3x + y - 6 &= 0 \end{aligned}$$

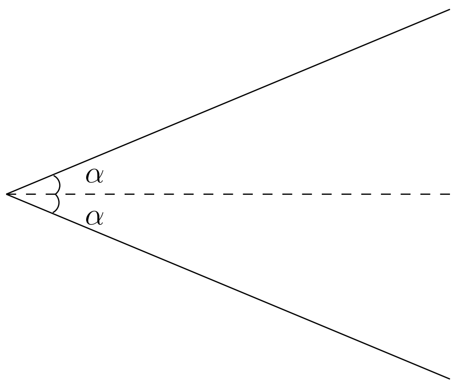
Sijoitetaan annetun pisteen koordinaatit $x_0 = 4$ ja $y_0 = -2$ sekä suoran yhtälön kertoimet $a = -3$, $b = 1$ ja $c = -6$ lauseen 4.10 pisteen etäisyyden kaavaan:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-3 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{10}} = \frac{24}{\sqrt{10}} \approx 7,6.$$

Vastaus: $\frac{24}{\sqrt{10}} \approx 7,6.$

Kulman puolittajaksi kutsutaan kulman kärjestä alkavaa puolisuoraa, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

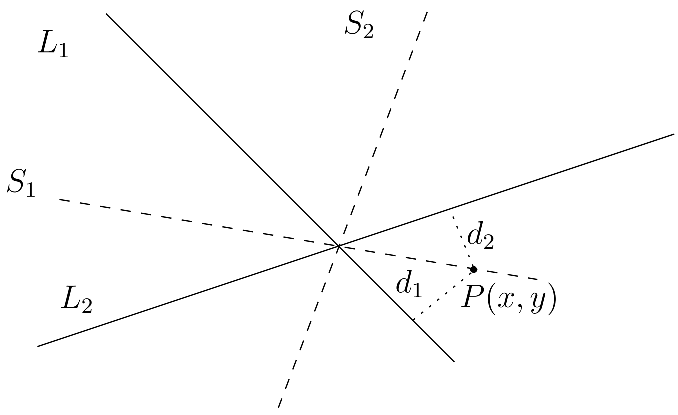
Kuva 25:



Kulman puolittajan muodostavat ne pisteet, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä.

Esimerkki 15 Määritä suorien $3x - 4y + 8 = 0$ (L_1) ja $5x + 12y - 15 = 0$ (L_2) välisten kulmien puolittajien yhtälöt.

Kuva 26:



Ratkaisu:

Olkoon piste $P(x, y)$ mikä tahansa piste kulmanpuolittajalla S_1. Lasketaan pisteen $P(x, y)$ etäisyys d_1 suorasta L_1, jonka yhtälö on $3x - 4y + 8 = 0$:

$$d_1 = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3x - 4y + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3x - 4y + 8|}{5}$$

Lasketaan saman pisteen $P(x, y)$ etäisyys d_2 suorasta L_2, jonka yhtälö on $5x + 12y - 15 = 0$:

$$d_2 = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5x + 12y - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5x + 12y - 15|}{13}.$$

Koska kulmanpuolittajan mielivaltainen piste P on yhtä kaukana kulman kyljistä L_1 ja L_2, voidaan muodostaa yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{|3x - 4y + 8|}{5} &= \frac{|5x + 12y - 15|}{13} \\ 13\,|3x - 4y + 8| &= 5\,|5x + 12y - 15| \end{aligned}$$

Poistetaan itseisarvomerkit päättelyllä $|a| = |b|$, kun $a = \pm b$, jolloin saadaan:

$$13(3x - 4y + 8) = \pm\, 5(5x + 12y - 15)$$

Sieventämällä lausekkeet saadaan kulmanpuolittajien yhtälöiksi
$14x - 112y + 179 = 0$ ja $64x + 8y + 29 = 0$.

Vastaus: $14x - 112y + 179 = 0$ ja $64x + 8y + 29 = 0$.

4.7 Tehtäviä

Tehtävä 7 Suora kulkee pisteiden a) $(7,1)$ ja $(5,0)$ b) $(2,4)$ ja $(2,-1)$ c) $(0,-1)$ ja $(-3,-1)$ d) $(-2,4)$ ja $(1,-5)$ kautta.
Laske suoran kulmakerroin ja ilmoita, onko suora laskeva, nouseva vai ehkä koordinaattiakselien suuntainen.

Tehtävä 8 Osoita, että pisteet $A(-3,4)$, $B(3,2)$ ja $C(6,1)$ sijaitsevat samalla suoralla.

Tehtävä 9 Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(5,7)$, $B(1,-3)$ ja $C(-5,1)$.
Osoita, että sivujen AB ja BC keskipisteitä yhdistävä jana on yhdensuuntainen sivun AC kanssa.

Tehtävä 10 a) Mikä on suoran $3x + 2y = 7$ kulmakerroin?
b) Missä pisteessä tämä suora leikkaa y-akselin?

Tehtävä 11 Mikä on sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteen $(2,-3)$ kautta ja jonka suuntakulma on $60\,°$?

Tehtävä 12 Millä vakion a arvolla suorat $2ax + 2y + 10 = 0$ ja $(a+3)x - 2y - 1 = 0$ ovat yhdensuuntaiset?

Tehtävä 13 Laske sen kolmion pinta-ala, jonka sivuina ovat suorat $x + y - 3 = 0$, $-3x + y - 8 = 0$ sekä x-akseli.

Tehtävä 14 Määritä niiden suorien yhtälöt, joiden kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$ ja jotka muodostavat koordinaattiakselien kanssa pinta-alaltaan 24 pinta-alayksikköä olevan kolmion.

Tehtävä 15 Määritä vakio a siten, että suorat $2x + 3y - 1 = 0$, $y = -x + a$ ja $ax - y + 7a + 5 = 0$ leikkaavat samassa pisteessä.
Mikä tämä piste on?

Tehtävä 16 Kolmion kärjet ovat pisteissä $A(-5, 4)$, $B(-2, -5)$ ja $C(6, -2)$. Laske kolmion kulmat ja anna vastauksesi asteen tarkkuudella.

Tehtävä 17 Osoita, että suorat
a) $y = -8$ ja $x - 6 = 0$
b) $x - 2y - 6 = 0$ ja $x + \frac{y}{2} - 1 = 0$
ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Tehtävä 18 Millä vakion p arvolla suorat $2px - 4y + 8 = 0$ ja $x + 2y + py = 0$ ovat toisiaan vasten kohtisuorassa?

Tehtävä 19 Laske pisteen $(-2, -3)$ etäisyys d suorasta $8x + 15y - 24 = 0$.

Tehtävä 20 Määritä niiden suorien yhtälöt, jotka ovat yhdensuuntaisia suoran $12x - 5y - 15 = 0$ kanssa ja joiden kohtisuora etäisyys suorasta $12x - 5y - 15 = 0$ on 4.

5 Ympyrä

Ympyrä on tason niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä annetusta pisteestä. Ympyrä on täydellisesti määritelty, kun sen keskipiste ja säde tunnetaan. Joskus ympyräksi kutsutaan myös ympyrän kehän sisäpuolella olevaa tason osaa, mutta analyyttisessä geometriassa on kuitenkin vakiintunut käytäntö, että ympyrällä tarkoitetaan ympyräviivaa. Kun siis jatkossa puhutaan ympyrästä, tarkoitetaan nimenomaan ympyrän kehää.

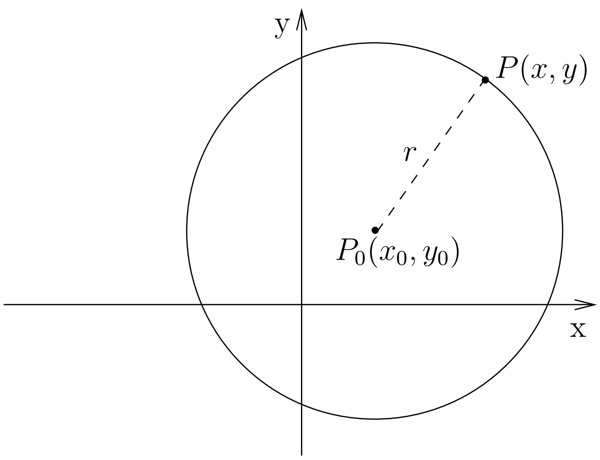
5.1 Ympyrän yhtälö

Ympyrää kuvaa toisen asteen kahden muuttujan yhtälö. Olkoon piste $P_0(x_0, y_0)$ ympyrän keskipiste, r säde ja piste $P(x, y)$ ympyrän kehän mielivaltainen piste. Pisteiden P_0 ja P etäisyys on

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Koska jokaisen ympyrän kehän piste on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä, on pisteiden P_0 ja P etäisyys toisaalta r.

Kuva 27:



Voidaan siis kirjoittaa yhtälö

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r \qquad \| \, (\ )^2$$

Neliöön korottaminen on sallittua, koska molemmat yhtälön puolet ovat epänegatiivisia

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2.$$

Lause 5.1. *Yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on piste $P_0(x_0, y_0)$ ja säde r, on*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2.$$

Tämä on ympyrän yhtälön keskipistemuoto.

Esimerkki 16 Ympyrän yhtälö on $(x+2)^2+(y-3)^2 = 16$. Määritä ympyrän keskipiste ja säde.

Ratkaisu:
Koska $x_0 = -2$ ja $y_0 = 3$, ympyrän keskipiste on piste $(-2, 3)$. Annetun ympyrän yhtälössä

$$\begin{aligned} r^2 &= 16 \qquad \| \sqrt{\ } \\ r &= 4. \end{aligned}$$

Vastaus: Ympyrän keskipiste on piste $(-2, 3)$ ja säde on 4.

Jos ympyrän keskipiste on origossa, ympyrän yhtälö on muotoa $x^2+y^2 = r^2$. Jokainen ympyrän yhtälö voidaan saattaa muotoon $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$. Kääntäen voidaan todeta, että yhtälön $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ kuvaaja on ympyrä, jos yhtälö voidaan saattaa muotoon $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$.

Lause 5.2. *Ympyrän yhtälön yleinen muoto on*

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0,$$

missä D, E ja F ovat reaalisia vakioita.

Kirjoitetaan ympyrän yleinen yhtälö muotoon

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

ja saatetaan tämä yhtälö neliöön täydentämällä muotoon

$$\begin{aligned} x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} =& \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \\ (x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 =& \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \end{aligned}$$

Tästä ympyrän yhtälöstä nähdään, että ympyrän keskipiste on piste $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ ja säde $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.
Jos

- $D^2 + E^2 - 4F > 0$, ympyrä on reaalinen.
- $D^2 + E^2 - 4F < 0$, ympyrä on imaginaarinen.
- $D^2+E^2-4F = 0$, säde on nolla, jolloin yhtälö esittää pistettä $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$.

Esimerkki 17 Määritä sen ympyrän yhtälö, joka kulkee pisteiden $(5, 3)$, $(6, 2)$ ja $(3, -1)$ kautta.

Ratkaisu:
Koska ympyrän yhtälössä $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ on kolme määrittämätöntä kerrointa, tarvitaan kolme ehtoa näiden kerrointen selvittämiseen.Ympyrä kulkee kolmen annetun pisteen kautta, jolloin kertoimet voidaan selvittää sijoittamalla pisteiden koordinaatit yhtälöön ja ratkaisemalla kolmen lineaarisen yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 5^2 + 3^3 + 5D + 3E + F =& 0 \\ 6^2 + 2^2 + 6D + 2E + F =& 0 \\ 3^2 + (-1)^2 + 3D - E + F =& 0. \end{aligned}$$

Ratkaisuiksi saadaan $D = -8$, $E = -2$ ja $F = 12$. Sijoitetaan nyt saadut vakioiden arvot ympyrän yhtälön yleiseen muotoon, jolloin saadaan
$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

Vastaus: Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$.

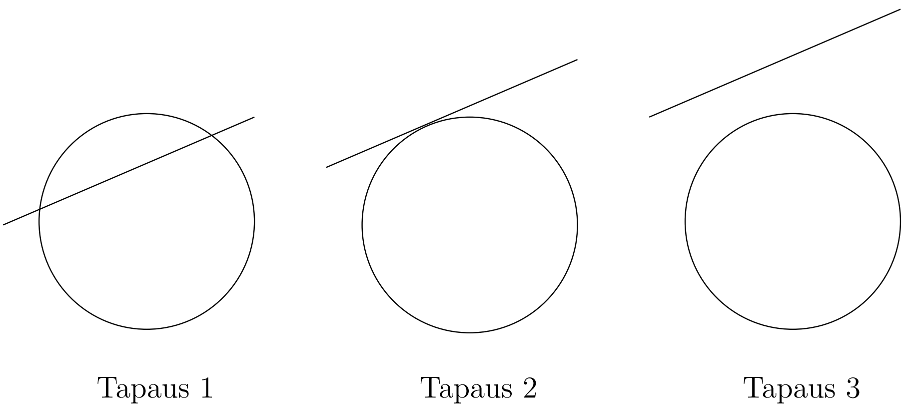
5.2 Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

Seuraavaksi tarkastellaan ympyrän $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ja suoran $ax+by+c=0$ asemaa toisiinsa nähden. Jos piste $P_0(x_0, y_0)$ on sekä ympyrällä että suoralla, sen koordinaatit x_0 ja y_0 toteuttavat molempien yhtälöt. Toisaalta, jos tällainen piste (x_0, y_0) on olemassa, se löydetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \\ ax+by+c=0. \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisujen lukumäärän ja toisaalta suoran ja ympyrän keskinäisen aseman välillä voidaan erottaa kolme tapausta:

Kuva 28:



1. Suora leikkaa ympyrän eli suora on ympyrän *sekantti*. Tällöin leikkauspisteitä on kaksi ja yhtälöparilla on siis kaksi ratkaisua.

2. Suora sivuaa ympyrää, jolloin leikkauspisteitä on vain yksi. Tällöin siis yhtälöparilla on yksi ja vain yksi ratkaisu. Suora on ympyrän *tangentti*.

3. Suora ei leikkaa ympyrää, jolloin myöskään yhtälöparilla ei ole ratkaisuja.

Esimerkki 18 Laske ympyrän $x^2 + y^2 = 4$ suorasta $y = 2x + 2$ erottaman jänteen pituus.

Ratkaisu:
Selvitetään suoran ja ympyrän leikkauspisteet sijoittamalla suoran yhtälö $y = 2x + 2$ ympyrän yhtälöön $x^2 + y^2 = 4$

$$\begin{aligned} x^2 + (2x+2)^2 =& 4 \\ 5x^2 + 8x =& 0 \\ x(5x+8) =& 0, \end{aligned}$$

josta saadaan kaksi ratkaisua, $x = 0$ tai $x = -\frac{8}{5}$.
Sijoittamalla saatujen x-koordinaattien arvot suoran yhtälöön $y = 2x + 2$ saadaan ympyrän ja suoran leikkauspisteet, jotka ovat siis pisteet $(0, 2)$ ja $(-\frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$. Jotta saataisiin tietää jänteen pituus, pitää vain selvittää, kuinka kaukana nämä leikkauspisteet sijaitsevat toisistaan

$$d = \sqrt{(-\frac{8}{5} - 0)^2 + (-\frac{6}{5} - 2)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3,6.$$

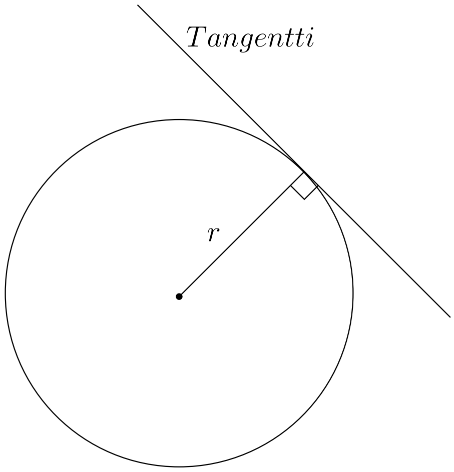
Vastaus: Jänteen pituus on $\frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3,6.$

5.3 Ympyrän tangentti

Edellä nähtiin, että suoralla ja ympyrällä voi olla yksi, kaksi tai ei yhtään leikkauspistettä. Jos leikkauspisteitä on kaksi, leikkaava suora on ympyrä sekantti. Jos suora sivuaa ympyrän kehää, kyseessä on ympyrän tangentti. Tangentilla ja ympyrällä on siis yksi ja vain yksi yhteinen piste. Muita tangentin merkittäviä ominaisuuksia:

- tangentti ja sivuamispisteeseen piirretty säde ovat toisiaan vasten kohtisuorassa
- tangentti on säteen etäisyydellä ympyrän keskipisteestä
- ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää aina kaksi tangenttia.

Kuva 29:



Esimerkki 19 Määritä ympyrälle pisteestä $(5, 2)$ piirretyn tangentin yhtälö, kun ympyrän keskipiste on origossa ja säde on 2.

Ratkaisu:
Muodostetaan ensin ympyrän yhtälö. Sijoitetaan tunnetut keskipisteeen koordinaatit $(0, 0)$ ja säde $r = 2$ kaavaan

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

jolloin saadaan

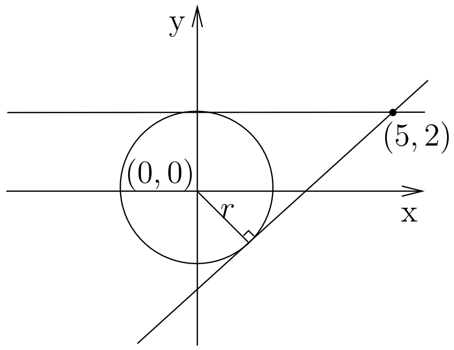
$$\begin{aligned}(x - 0)^2 + (y - 0)^2 &= 2^2 \\ x^2 + y^2 &= 4.\end{aligned}$$

Lasketaan seuraavaksi pisteen $(5, 2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä.

$d = \sqrt{(0-5)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

Koska etäisyys $d = \sqrt{29}$ on suurempi kuin säde $r = 2$, piste $(5, 2)$ sijaitsee ympyrän ulkopuolella. Tämän pisteen kautta voidaan piirtää kyseiselle ympyrälle kaksi tangenttia.

Kuva 30:



Koska tangentti on suora, sen yhtälö on muotoa

$$y - y_o = k(x - x_o)$$

ja koska tangentti kulkee pisteen $(5, 2)$ kautta, saadaan yhtälö muotoon

$$\begin{aligned} y - 2 &= k(x - 5) \\ kx - y - 5k + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste $(0, 0)$ on säteen $r = 2$ etäisyydellä tangentista.

$$\begin{aligned} \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= r \\ \frac{|k \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 5k + 2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} &= 2 \\ \frac{|-5k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= 2 \qquad \| \, (\ )^2 \\ \frac{25k^2 - 20k + 4}{k^2 + 1} &= 4 \\ 25k^2 - 20k + 4 &= 4k^2 + 4 \\ 21k^2 - 20k &= 0 \\ k(21k - 20) &= 0, \end{aligned}$$

josta saadaan kaksi ratkaisua, $k = 0$ tai $k = \dfrac{20}{21}$.

Tangentin yhtälö, kun $k = 0$:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 0(x - 5) \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Tangentin yhtälö, kun $k = \frac{20}{21}$:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{20}{21}(x - 5) \\ y &= \frac{20}{21}x - \frac{58}{21}. \end{aligned}$$

Vastaus: Tangenttien yhtälöt ovat $y = 2$ ja $y = \frac{20}{21}x - \frac{58}{21}$.

5.4 Tehtäviä

Tehtävä 21 Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on piste $(5, -2)$ ja joka kulkee pisteen $(-1, 5)$ kautta.

Tehtävä 22 Laske ympyröiden $x^2 + y^2 = 5$ ja $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 11 = 0$ leikkauspisteet.

Tehtävä 23 Ympyrän keskipiste sijaitsee suorilla $y = -2x$ ja $2x - 3y = -4$ ja lisäksi ympyrä sivuaa x-akselia. Mikä on ympyrän yhtälö?

Tehtävä 24 Todista, että suora $4x - 3y + 5 = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti.

Tehtävä 25 Laske ympyrän $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ ala.

6 Kartioleikkaukset

Olkoon piste P kiinteä piste ja olkoon l suora. Niiden pisteiden K uraa, joiden etäisyyksien suhde pisteestä P ja annetusta suorasta l on vakio, kutsutaan *kartioleikkaukseksi.* Kiinteää pistettä P kutsutaan polttopisteeksi ja annettua suoraa l johtosuoraksi. Kartioleikkaukset jakaantuvat kolmeen osaan, jotka eroavat toisistaan sekä muodoltaan että ominaisuuksiltaan.

Geometrisen määritelmän mukaan kartioleikkaus on ympyräpohjaisen kaksoiskartion ja tason leikkauspinta. Kääntelemällä tasoa sopivasti saadaan leikkauskuvioksi *ellipsi, paraabeli, hyperbeli* tai näiden rajatapaus. Ympyrä on erikoistapauksena myös kartioleikkaus, joka saadaan, kun leikkaus tapahtuu kartion pohjan suuntaisesti ja leikattava kartio on suora. Kreikkalainen matemaatikko Apollonius Pergeläinen tutki näitä toisen asteen käyriä jo n.200 eKr. Häneltä ovat peräisin nimitykset ellipsi, paraabeli ja hyperbeli.

Kartioleikkausten yhtälöt ovat muuttujien x ja y toisen asteen yhtälöitä. Yleinen tällainen yhtälö on muotoa

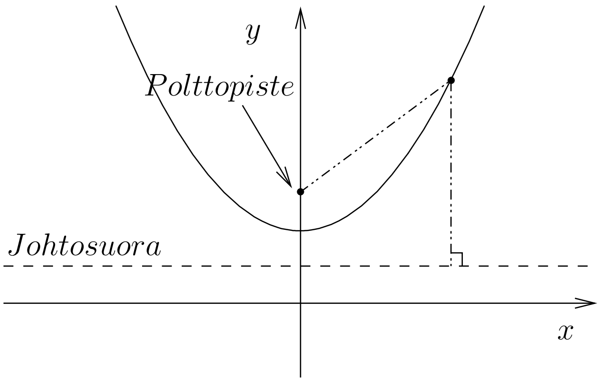
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0,$$

missä kertoimet A, B ja C eivät ole yhtä aikaa nollia. Ellipsiä, hyperbeliä ja paraabelia kutsutaankin *toisen asteen käyriksi.*

6.1 Paraabeli

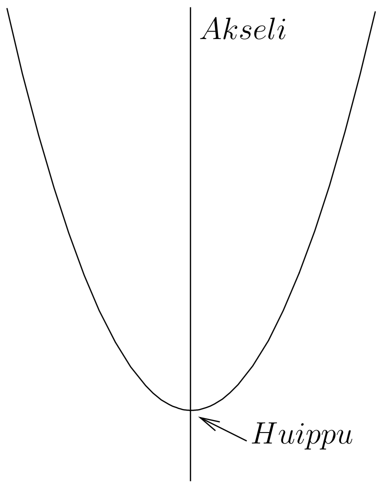
Paraabeli määritellään niiden pisteiden uraksi, jotka ovat yhtä etäällä polttopisteestä ja johtosuorasta.

Kuva 31:



Paraabeli voidaan muodostaa ympyräkartiosta leikkaamalla tasolla kartion sivujanan suuntaisesti. Paraabeli on *akselinsa* suhteen symmetrinen, kauniisti kaareutuva käyrä. Paraabelin akselilla sijaitsevaa pistettä sanotaan paraabelin huipuksi.

Kuva 32:



Lause 6.1. *Yhtälön $y = ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$, kuvaaja on paraabeli.*

Määritetään seuraavaksi paraabelin huipun x-koordinaatti.
Paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$. Samalla korkeudella $y = c$ olevien paraabelin pisteiden x-koordinaatit saadaan sijoittamalla y-koordinaatti paraabelin yhtälöön

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c =& c \\ ax^2 + bx =& 0 \\ x(ax + b) =& 0, \end{aligned}$$

josta saadaan kaksi ratkaisua $x_1 = 0$ tai $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Huipun x-koordinaatti x_0 on pisteiden x_1 ja x_2 puolivälissä

$x_0 = \dfrac{0 + (-\frac{b}{a})}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

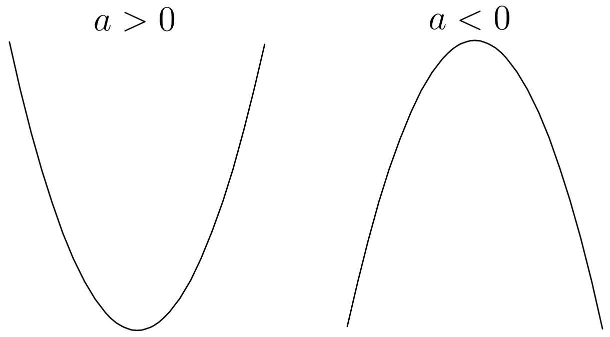
Lause 6.2. *Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$ huipun x-koordinaatti*

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Paraabelin $y = ax^2 + bx + c$, jossa $a \neq 0$, leveys riippuu kertoimen a itseisarvosta - mitä suurempi $|a|$ on, sitä kapeampi on paraabeli. Kerroin a määrää myös paraabelin aukeamissuunnan. Paraabeli aukeaa

- ylöspäin, kun $a > 0$
- alaspäin, kun $a < 0$.

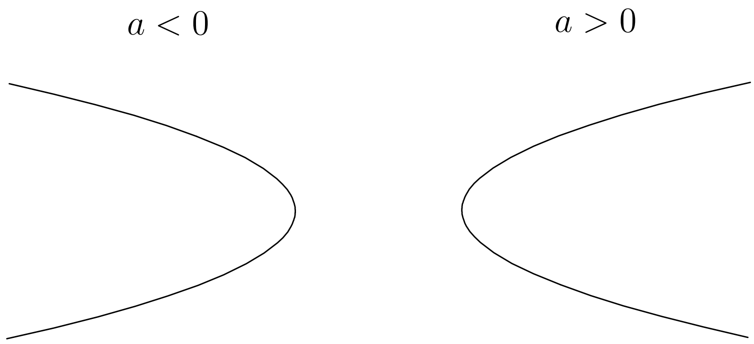
Kuva 33:



Vaihtamalla muuttujien roolit saadaan yhtälö $x = ay^2 + by + c$. Samalla vaihtuu myös akseleiden rooli ja yhtälö esittää oikealle tai vasemmalle avautuvaa paraabelia. Paraabeli $x = ay^2 + by + c$ aukeaa

- oikealle, kun $a > 0$
- vasemmalle, kun $a < 0$.

Kuva 34:



Lause 6.3. *Oikealle tai vasemmalle avautuvan paraabelin $x = ay^2 + by + c$, $a \neq 0$, huipun y-koordinaatti*

$$y_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Esimerkki 20 Paraabeli kulkee pisteiden $(-1, 0)$, $(5, 12)$ ja $(-2, 5)$ kautta ja aukeaa ylöspäin. Määritä paraabelin yhtälö ja huipun koordinaatit.

Ratkaisu:
Ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö on $y = ax^2 + bx + c$. Yhtälön toteuttavat vain ne pisteet, jotka ovat paraabelin käyrällä. Sijoittamalla annetut pisteet paraabelin yhtälöön saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = (-1)^2 a - b + c \\ 12 = 5^2 a + 5b + c \\ 5 = (-2)^2 a - 2b + c, \end{cases}$$

josta saadaan ratkaistua kertoimet $a = 1$, $b = -2$, ja $c = -3$.
Paraabelin yhtälö on siis $y = x^2 - 2x - 3$.
Paraabelin huipun x-koordinaatti saadaan sijoittamalla saadut kertoimet $a = 1$ ja $b = -2$ huipun kaavaan

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

Sijoitetaan ratkaistu $x_0 = 1$ paraabelin yhtälöön, jotta saadaan ratkaistua huipun y-koordinaatti
$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.

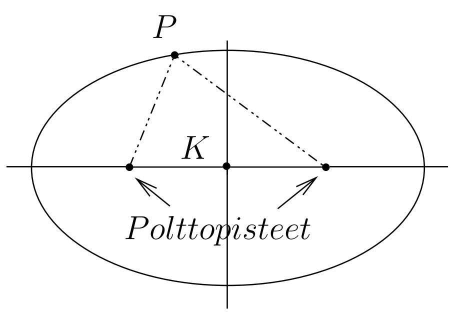
Vastaus: Paraabelin yhtälö on $y = x^2 - 2x - 3$ ja paraabelin huippu on pisteessä $(1, -4)$.

6.2 Ellipsi

Niiden pisteiden ura, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä mitattujen etäisyyksien *summa* on vakio, on ellipsi. Näitä kahta kiinteää pistettä kutsutaan ellipsin polttopisteiksi. Polttopisteiden yhdysjanan keskipiste on ellipsin keskipiste K. Ellipsi on symmetrinen sekä polttopisteiden kautta kulkevan suoran suhteen sekä polttopisteiden välisen janan keskinormaalin suhteen. Ellipsin ja sen symmetria-akseleiden leikkauspisteitä kutsutaan ellipsin huipuiksi.

Ellipsi muodostuu, kun tasolla leikataan vinosti kartiota.

Kuva 35:



Olkoon polttopisteet pisteet $F_1(c,0)$ ja $F_2(-c,0)$ ja olkoon etäisyyksien summa vakio $2a$ (,$a > c$). Olkoon piste $P(x,y)$ mikä tahansa piste ellipsin kehällä. Koska ellipsin määritelmän mukaan pisteen P etäisyys polttopisteistä F_1 ja F_2 on vakio, voidaan muodostaa yhtälö

$$\begin{aligned} F_1P + F_2P &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}. \end{aligned}$$

Korottamalla neliöön ja yhdistelemällä termejä päästään muotoon

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

ja korottamalla yhtälö uudelleen toiseen potenssiin ja sieventämällä edelleen saadaan

$$\begin{aligned} (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \qquad | : a^2(a^2-c^2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1. \end{aligned}$$

Koska $a > c$, $a^2 - c^2$ on positiivinen. Merkitään $a^2 + c^2 = b^2$, jolloin saadaan ellipsin yhtälö muotoon $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

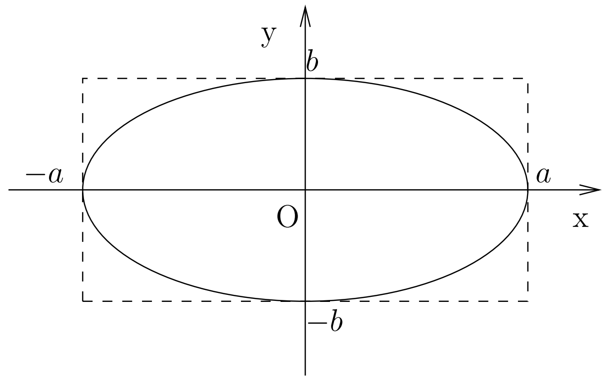
Lause 6.4. *Ellipsin yhtälö on*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $a \neq 0$ *ja* $b \neq 0$.

Ellipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ huiput ovat pisteissä $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ ja $(0, -b)$. Ellipsin sisään jäävien symmetria-akselien puolikkaat eli janat a ja b ovat

Kuva 36:



puoliakseleita. Ellipsi piirretään suorien $x = \pm a$ ja $y = \pm b$ rajaaman suorakulmion sisään. Jos $a > b$, ovat *pääakselit* $2a$ ja $2b$ nimeltään *isoakseli* ja *pikkuakseli*. Kuvassa O on ellipsin keskipiste.

Selkeämmän kuvan muodostamiseksi verrataan ellipsiä origo-keskeiseen ja a-säteiseen ympyrään $x^2 + y^2 = a^2$. Ratkaistaan sekä ellipsin että ympyrän yhtälöt y:n suhteen välillä $-a \leq x \leq a$:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, josta saadaan $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$x^2 + y^2 = a^2$, josta saadaan $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.

Ellipsin pisteen y-koordinaatti on siis aina $\frac{b}{a}$-kertainen vastaavan ympyrän pisteen y-koordinaattiin nähden.

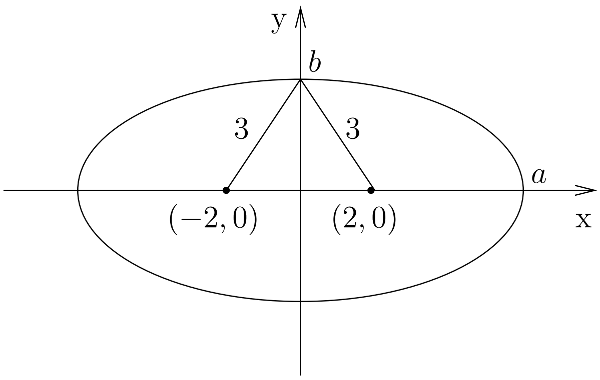
$$y_{\text{ ellipsi}} = \frac{b}{a} \cdot y_{\text{ ympyrä}}$$

Ympyrä on siis ellipsin erikoistapaus ja ympyrään liittyvät käsitteet, kuten jänne ja tangentti, voidaan yleistää koskemaan myös ellipsiä.

Esimerkki 21 Ellipsin polttopisteet ovat pisteet $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$ ja ellipsin kehällä olevasta pisteestä polttopisteisiin mitattujen etäisyyksien summa on 6. Mikä on ellipsin yhtälö?

Ratkaisu:
Myös ellipsin huipuista mitattujen etäisyyksien summa on 6, joten saadaan kaksi ehtoa
$a - (-2) + (a - 2) = 6$ ja $b^2 + 2^2 = 3^2$. Ehdoista saadaan ratkaistua $a = 3$ ja

Kuva 37:



$b^2 = 5$. Sijoitetaan nämä ellipsin yhtälöön

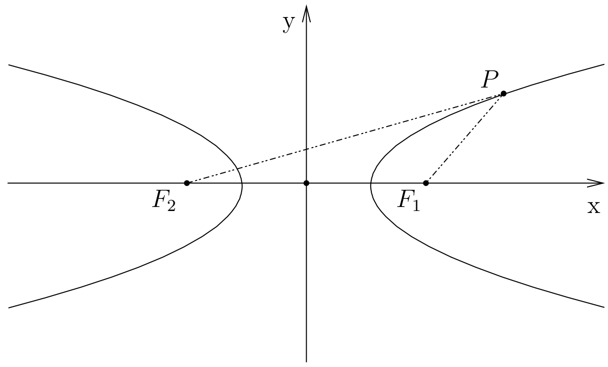
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} &= 1.\end{aligned}$$

Vastaus: Ellipsin yhtälö on $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

6.3 Hyperbeli

Hyperbeli on kaikkien niiden pisteiden joukko, joiden kahdesta polttopisteestä mitattujen etäisyyksien *erotus* on vakio. Hyperbeli muodostuu, kun taso leikkaa kartion korkeusjanan suuntaisesti. Polttopisteiden F_1 ja F_2 yh-

Kuva 38:



dysjanan keskipiste on hyperbelin keskipiste. Hyperbeli koostuu kahdesta haarasta, jotka ovat toisiinsa nähden symmetrisiä yhdysjanan F_1 ja F_2 keskinormaalin suhteen. Polttopisteiden kautta kulkevan suoran ja hyperbelin leikkauspisteet ovat hyperbelin huippuja.

Olkoon hyperbelin polttopisteet pisteet $F_1(c, 0)$ ja $F_2(-c, 0)$ ja olkoon piste $P(x, y)$ mikä tahansa piste hyperbeliltä. Olkoon pisteestä P polttopisteisiin mitattujen etäisyyksien erotus vakio $2a$, jossa $a < c$.
Hyperbelin määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} F_1P - PF_2 &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \end{aligned}$$

Korottamalla yhtälö toiseen ja sieventämällä yhtälöä saadaan

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ja uudelleen korottamalla neliöön ja edelleen sieventämällä yhtälöä päästään muotoon

$$\begin{aligned}(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 =& a^2(c^2 - a^2) \qquad | : a^2(c^2 - a^2)\\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} =& 1\end{aligned}$$

Koska $c > a$, on $c^2 - a^2$ positiivinen. Merkitään nyt $c^2 - a^2 = b^2$. On siis johdettu sellaisen hyperbelin yhtälö $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, jonka keskipiste on origo ja jonka polttopisteet ovat x-akselilla.

Hyperbelille, jonka polttopisteet ovat y-akselilla, saadaan yhtälö $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Hyperbelejä $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ kutsutaan toistensa *liittohyperbeleiksi.*

Lause 6.5. *Hyperbelin, jonka polttopisteet sijaitsevat x-akselilla, yhtälö on*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Koska hyperbelin yhtälö sisältää vain muuttujien x ja y parillisia potensseja, hyperbeli on symmetrinen x-akselin, y-akselin sekä origon suhteen.

Kun johdettiin hyperbelin yhtälöä, merkittiin $c^2 - a^2 = b^2$. Tästä saadaan, että $c^2 = a^2 + b^2$ ja edelleen $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Edelliseen nojaten voimmekin sanoa hyperbelin polttopisteistä seuraavaa.

Lause 6.6. *Hyperbelin* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *polttopisteet ovat pisteet* $F_1(c, 0)$ *ja* $F_2(-c, 0)$*, missä* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ratkaistaan hyperbelin yhtälö y:n suhteen

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} =& 1\\ y^2 =& \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 \qquad \|\sqrt{}\\ y =& \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi hyperbeliä ensimmäisessä neljänneksessä, jolloin $x \geq a$ ja $y \geq 0$. Symmetrian perusteella samalla selviää hyperbelin kulku myös muissa neljänneksissä.
Nyt voidaan kirjoittaa

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \frac{b}{a}x.$$

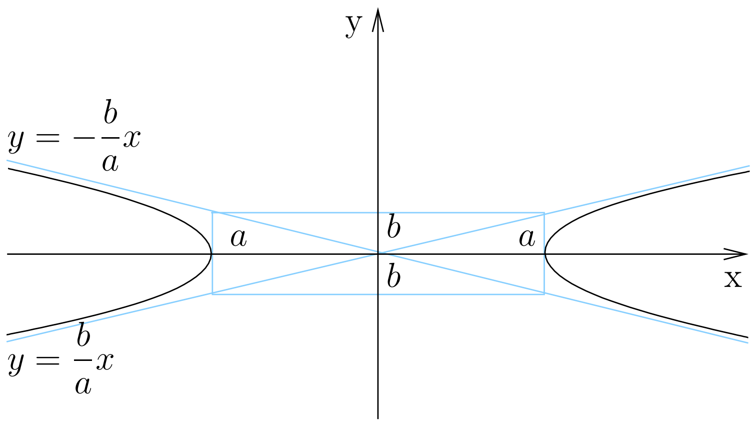
Hyperbeli kulkee siis suoran $y = \frac{b}{a}x$ alapuolella. Kun x on suuri lukuun a verrattuna, saadaan

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \approx \frac{b}{a}x.$$

Suurilla x:n arvoilla hyperbeli siis lähestyy suoraa $y = \frac{b}{a}x$, mutta ei kuitenkaan koskaan saavuta sitä. Suoraa $y = \frac{b}{a}x$ kutsutaan hyperbelin *asymptootiksi*.

Lause 6.7. *Hyperbelillä on asymptootit $y = \pm\frac{b}{a}x$, joiden välissä hyperbeli kulkee. Kun x kasvaa tai pienenee, hyperbeli lähestyy asymptoottejaan.*

Kuva 39:



Kuvassa a ja b ovat hyperbelin puoliakseleita, akselia $2a$ kutsutaan poikittaisakseliksi ja akselia $2b$ liittoakseliksi.

Esimerkki 22 Hyperbelin polttopisteet ovat pisteet $(\pm 5, 0)$ ja liittoakseli on 6. Määritä kyseisen hyperbelin yhtälö.

Ratkaisu:
Liittoakseli $2b = 6$, josta voidaan ratkaista $b = 3$. Tiedetään, että $c = 5$ ja että $c^2 - a^2 = b^2$. Ratkaistaan a:
$a^2 = c^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
Sijoitetaan saadut arvot hyperbelin yhtälöön

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

Vastaus: Hyperbelin yhtälö on $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

6.4 Tehtäviä

Tehtävä 26 Määritä laskemalla paraabelin $y = x^2 - 4$ ja suoran $y = -x + 3$ leikkauspiste.

Tehtävä 27 Määritä sen paraabelin yhtälö, jonka huippu on pisteessä $(-1, 2)$ ja joka kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Mikä on paraabelin aukeamissuunta?

Tehtävä 28 Laske ympyrän $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ ja paraabelin $y = 2x^2$ leikkauspisteet.

Tehtävä 29 Origokeskeisen ellipsin x-akselilla ja y-akselilla olevien puoliakseleiden pituudet ovat 3 ja 4. Määritä tämän ellipsin yhtälö.

Tehtävä 30 Piste (x, y) liikkuu niin, että sen etäisyys pisteestä $(4, 0)$ on puolet sen etäisyydestä suoraan $x - 16 = 0$. Määritä pisteen (x, y) uran yhtälö. Mikä käyrä on kyseessä?

Tehtävä 31 Määritä hyperbelin $3x^2 - 9y^2 = 27$
a) polttopisteet ja
b) asymptootit.

Tehtävä 32 Suora $x - 2y = 4$ leikkaa hyperbeliä $x^2 - y^2 = 16$. Mikä on hyperbelin suorasta erottaman janan pituus?

7 Tehtävien ratkaisut

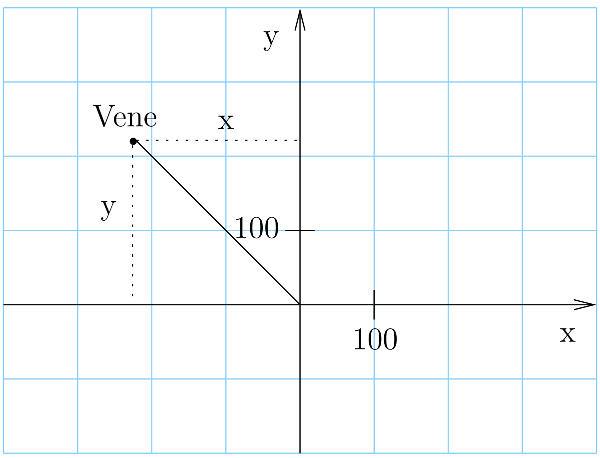
7.1 Koordinaatisto

Tehtävä 1

a) Tason x-koordinaatti voi saada mitä tahansa arvoja, mutta $y \neq 0$. Koska $y = 0$ vain x-akselilla, ratkaisualueena on kaikki muut tason pisteet, mutta ei x-akselilla olevat pisteet.
b) Tason y-koordinaatti voi saada mitä tahansa arvoja, mutta x-koordinaatti vain arvoja ≥ 1. Ratkaisujoukkona on siis suora $x = 1$ sekä sen oikealla puolella oleva alue.
c) Nyt molempien koordinaattien ehdon on oltava samanaikaisesti voimassa. Ehto $x = 0$ toteutuu y-akselilla ja ehto $y = 0$ x-akselilla. Molemmat ehdot ovat yhtäaikaisesti voimassa vain yhdessä pisteessä, origossa.

Tehtävä 2

Koska tarkoituksena on harjoitella koordinaatiston käyttöä, veneen sijainnin xy-koordinaatit voidaan selvittää suoraan kuvasta katsomalla. On kuitenkin syytä muistaa, että kuvasta tulkitut vastaukset ovat vain likiarvoja.
Tehtävä voidaan ratkaista myös laskemalla.



Koordinaatit voidaan ratkaista käyttämällä Pythagoraan lausetta:

$$x^2 + y^2 = 350^2.$$

Koska vene sijaitsee majakasta (origosta) suoraan luoteeseen, vene on yhtä kaukana molemmista koordinaattiakseleista eli $x = y$:

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 350^2 \\ 2x^2 &= 122500 \qquad \| : 2 \\ x^2 &= 61250 \qquad \| \sqrt{} \\ x &\approx \pm\, 247. \end{aligned}$$

Koska vene sijaitsee koordinaatiston kolmannessa neljänneksessä, x-koordinaatti on negatiivinen ja y-koordinaatti positiivinen. Veneen sijainnin koordinaatit saadaan, kun otetaan huomioon, että ruutuväli on 100.

$$x = -\frac{247}{100} \approx -2,5$$

$$y = \frac{247}{100} \approx 2,5.$$

Vene sijaitsee siis pisteessä $(-2,5; 2,5)$.

Vastaus: $(-2,5; 2,5)$.

7.2 Jana

Tehtävä 3

a) Pisteen $(-3,-4)$ etäisyys origosta on

$$\sqrt{(-3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5.$$

Vastaus: 5.

b) Pisteen (x,y) etäisyys origosta on

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Vastaus: $\sqrt{x^2+y^2}$.

Tehtävä 4

Kolmio ABC on tasakylkinen, jos sen kaksi sivua ovat yhtä pitkät. Lasketaan siis janojen AB, BC ja CD pituudet.

$$|AB|=\sqrt{(4+3)^2+(0+4)^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65},$$

$$|BC|=\sqrt{(1-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2},$$

$$|CA|=\sqrt{(-3-1)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}=\sqrt{65},$$

Sivut AB ja CA ovat yhtä pitkät, jolloin kolmio ABC on tasakylkinen. $\square$

Tehtävä 5

Lasketaan ensin tehtävässä annetun janan PQ keskipisteen K koordinaatit (x_k,y_k) :

$$x_k=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad \text{ja} \qquad y_k=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Keskipisteen K koordinaatit ovat siis $(1,2)$. Nyt voidaan laskea keskipisteen K etäisyys pisteestä $R(-5,-2)$.

$|KR| = \sqrt{(-5-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} \approx 7,2.$

Vastaus: Pisteiden K ja R välinen etäisyys on noin 7,2.

Tehtävä 6

Määritetään ensin pisteen B x-koordinaatti:

$$\begin{aligned} x_0 =& \frac{x_1 + x_2}{2} \\ 2x_0 =& x_1 + x_2 \\ x_2 =& 2x_0 - x_1. \end{aligned}$$

Sijoitetaan keskipisteen ja pisteen A x-koordinaatit, jolloin saadaan pisteen B x-koordinaatti:

$x_2 = 2 \cdot (-1,4) - (-5) = (-2,8) + 5 = 2,2.$

Samoin voidaan laskea pisteen B y-koordinaatti sijoittamalla tunnetut y-koordinaatit yhtälöön $y_2 = 2y_0 - y_1$:

$y_2 = 2 \cdot (0,9) - 4 = 1,8 - 4 = -2,2.$

Vastaus: Pisteen B koordinaatit ovat $(2,2; -2,2)$.

7.3 Suora

Tehtävä 7

a) $k = \dfrac{0-1}{5-7} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

Koska $k > 0$, suora on nouseva.

b) x-akselin koordinaatit ovat samat, jolloin suora on y-akselin suuntainen. Kulmakerrointa ei ole määritelty.

c) $k = \dfrac{-1-(-1)}{-3-0} = \dfrac{0}{-3} = 0$

Kulmakerroin $k = 0$, jolloin suora on x-akselin suuntainen.

d) $k = \dfrac{-5-4}{1-(-2)} = \dfrac{-9}{3} = -3$

Koska $k < 0$, suora on laskeva.

Tehtävä 8

Pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, jos suoran AB kulmakerroin on yhtä suuri kuin suoran AC kulmakerroin.
Suoran AB kulmakerroin:

$$k = \frac{2-4}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Suoran AC kulmakerroin:

$$k = \frac{1-4}{6+3} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Koska suoran AB kulmakerroin on sama kuin suoran AC kulmakerroin, annetut kolme pistettä sijaitsevat samalla suoralla. □

Tehtävä 9

Sivun AB keskipisteen koordinaatit:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \qquad y_1 = \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Sivun BC keskipisteen koordinaatit:

$$x_2 = \frac{1+(-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad y_2 = \frac{-3+1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Keskipisteiden koordinaatit ovat siis $(3, 2)$ ja $(-2, -1)$.

Seuraavaksi lasketaan sivujen AB ja BC keskipisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k_1 = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{3}{5}.$$

Pisteiden A ja C kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k_2 = \frac{1-7}{-5-5} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}.$$

Koska kulmakertoimet ovat samat ja kyseiset suorat eivat ole sama suora, suorat ovat yhdensuuntaiset. □

Tehtävä 10

a) Saatetaan annettu yhtälö $3x + 2y = 7$ ratkaistuun muotoon $y = kx + b$:

$$\begin{aligned} 3x + 2y =& 7 \\ 2y =& -3x + 7 \qquad \| : 2 \\ y =& -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Suoran yhtälön ratkaistusta muodosta nähdään, että kulmakerroin $k = -\frac{3}{2}$.
b) Suoran yhtälön ratkaistusta muodosta nähdään, että suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{7}{2})$.

Tehtävä 11

Koska kulmakerroin k voidaan määritellä suuntakulman α avulla $k = \tan\alpha$, lasketaan kysytyn suoran kulmakerroin sijoittamalla suuntakulma $\alpha = 60\,^\circ$ edellä esitettyyn kulmakertoimen yhtälöön:
$k = \tan\ 60\,^\circ = \sqrt{3}$.
Kysytyn suoran yhtälö saadaan sijoittamalla piste $(2, -3)$ ja kulmakerroin $k = \sqrt{3}$ suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_o)$:

$$\begin{aligned} y - (-3) =& \sqrt{3}(x-2) \\ y + 3 =& \sqrt{3}(x-2). \end{aligned}$$

Saatetaan suoran yhtälö vielä ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} y+3 =& \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ y =& \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - 3 \\ y =& \sqrt{3}x - (2\sqrt{3}+3). \end{aligned}$$

Vastaus: Suoran yhtälö on $y = \sqrt{3}x - (2\sqrt{3}+3)$.

Tehtävä 12
Saatetaan molempien suorien yhtälöt ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} 2ax + 2y + 10 =& 0 \\ 2y =& -2ax - 10 \qquad \| : 2 \\ y =& -ax - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+3)x - 2y - 1 =& 0 \\ -2y =& -(a+3)x + 1 \qquad \| : (-2) \\ y =& \frac{a+3}{2}x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret:

$$\begin{aligned} -a =& \frac{a+3}{2} \qquad \| \cdot 2 \\ -2a =& a+3 \\ -3a =& 3 \qquad \| : (-3) \\ a =& -1. \end{aligned}$$

Vastaus: suorat ovat yhdensuuntaiset, kun $a = -1$.

Tehtävä 13
Lasketaan ensin suorien $x+y-3=0$ ja $-3x+y-8=0$ leikkauspiste. Tämä voidaan tehdä eliminointimenetelmällä tai saattamalla ensimmäinen yhtälö

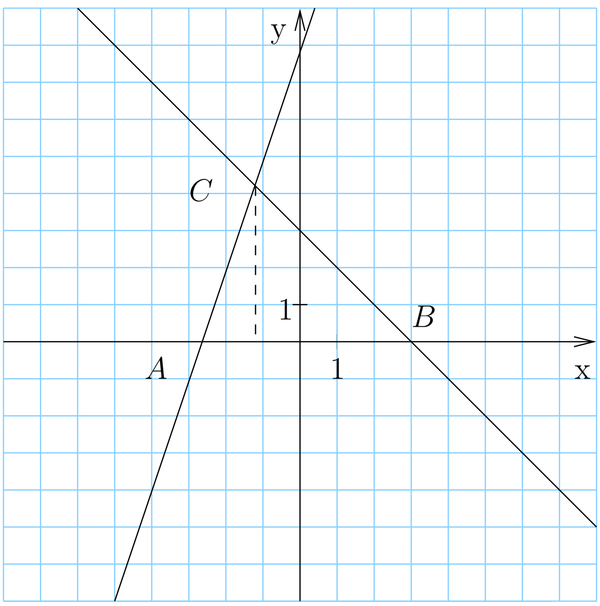
muotoon $y = -x + 3$ ja sijoittamalla tämä toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned}
-3x - x + 3 - 8 =& 0 \\
-4x - 5 =& 0 \\
x =& -\frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = -\frac{5}{4}$ ensimmäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{4} + y - 3 =& 0 \\
-\frac{17}{4} + y =& 0 \\
y =& \frac{17}{4}.
\end{aligned}$$

Suorat leíkkaavat siis pisteessä $C = (-\frac{5}{4}, \frac{17}{4})$.



Suorien $x + y - 3 = 0$, $-3x + y - 8 = 0$ ja x-akselin rajaaman kolmion kannaksi valitaan kyseisten suorien x-akselista rajaama jana. Suorien ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti saa arvon 0, joten sijoitetaan $y = 0$ suorien yhtälöihin:

$$\begin{aligned} x + 0 - 3 =& 0 \\ x =& 3 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} -3x + 0 - 8 =& 0 \\ -3x =& 8 \qquad \| : (-3) \\ x =& -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Suorat leikkaavat x-akselin siis pisteissä $(3, 0)$ ja $(-\frac{8}{3}, 0)$. Nyt voidaan laskea kolmion ABC kannan AB pituus:

$$\left|-\frac{8}{3} - 3\right| = \left|-\frac{17}{3}\right| = \frac{17}{3}.$$

Kolmion korkeus on sama kuin leikkauspisteen C etäisyys x-akselista eli leikkauspisteen C y-koordinaatin itseisarvo:

$$\left|\frac{17}{4}\right| = \frac{17}{4}.$$

Nyt voidaan laskea annettujen suorien ja x-akselin rajoittaman kolmion ABC pinta-ala:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{17}{4} = \frac{289}{24} = 12\frac{1}{24}.$$

Vastaus: Suorat leikkaavat pisteessä $C = (-\frac{5}{4}, \frac{17}{4})$ ja niiden ja x-akselin rajoittaman kolmion pinta-ala on $12\frac{1}{24}$.

Tehtävä 14

Suoran yhtälö on muotoa $y = -\frac{3}{4}x + b$, kun kulmakerroin $k = -\frac{3}{4}$ ja suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$.

Kolmion korkeus on suoran ja y-akselin leikkauspisteen etäisyys x-akselista.

Kun $x = 0$, $y = b$.

Kolmion kanta on vastaavasti suoran ja x-akselin leikkauspisteen etäisyys y-akselista:

Kun $y = 0$, $x = \frac{4}{3}b$

Koska kolmion ala on 24 pinta-alayksikköä

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{4}{3}b = \frac{2}{3}b^2 = 24,$

voidaan tästä ratkaista b:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}b^2 =& 24 \\
b^2 =& 36 \qquad \| \sqrt{} \\
b =& \pm 6
\end{aligned}
$$

Täten suorien yhtälöt ovat $y = -\frac{3}{4} \pm 6$

Vastaus: Suorien yhtälöt ovat $y = -\frac{3}{4} \pm 6$.

Tehtävä 15

Leikkauspisteessä x- ja y-koordinaattien on oltava samat. Määritetään ensin kahden ensimmäisen suoran $2x + 3y - 1 = 0$ ja $y = -x + a$ leikkauspiste käyttämällä sijoitusmenetelmää:

$$
\begin{aligned}
2x+3(-x+a)-1 =&0\\
2x-3x+3a-1 =&0\\
-x =&1-3a\\
x =&3a-1.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan saatu $x = 3a - 1$ toiseen yhtälöön:

$$
\begin{aligned}
y =& -(3a-1)+a\\
y =& -2a+1.
\end{aligned}
$$

Suorat $2x + 3y - 1 = 0$ ja $y = -x + a$ leikkaavat pisteessä $(3a - 1, -2a + 1)$. Jotta kaikki kolme suoraa leikkaavat samassa pisteessä, on leikkauspisteen koordinaattien toteutettava myös suoran $ax - y + 7a + 5 = 0$ yhtälö:

$$
\begin{aligned}
a(3a-1)-(-2a+1)+7a+5 =&0\\
3a^2-a+2a-1+7a+5 =&0\\
3a^2+8a+4 =&0,
\end{aligned}
$$

josta toisen asteen ratkaisukaavalla

$$
\begin{aligned}
a =&\frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3}\\
a =&\frac{-8 \pm \sqrt{16}}{6}\\
a =&\frac{-8 \pm 4}{6}
\end{aligned}
$$

saadaan kaksi ratkaisua, $a = -2$ tai $a = -\frac{2}{3}$.
Sijoittamalla saadut a:n arvot yhtälöihin $x = 3a - 1$ ja $y = -2a + 1$ saadaan kaksi eri leikkauspistettä.
Kun $a = -2$, leikkauspiste on $(-7, 5)$.

Kun $a = -\dfrac{2}{3}$, leikkauspiste on $(-3, 2\dfrac{1}{3})$.

Vastaus: $a = -2$ tai $a = -\dfrac{2}{3}$. Vastaavat suorien leikkauspisteet ovat $(-7, 5)$ ja $(-3, 2\dfrac{1}{3})$.

Tehtävä 16

Jotta voitaisiin määrittää kolmion kulmien suuruudet, pitää ensin selvittää suorien AB, BC ja CA kulmakertoimet.

Suora AB: $k_1 = \dfrac{-5-4}{-2-(-5)} = \dfrac{-9}{3} = -3$

Suora BC: $k_2 = \dfrac{-2-(-5)}{6-(-2)} = \dfrac{3}{8}$

Suora AC: $k_3 = \dfrac{4-(-2)}{-5-6} = -\dfrac{6}{11}$.

Nyt voidaan laskea kolmion kulmien suuruudet sijoittamalla saadut kulmakertoimet kahden suoran välisen kulman yhtälöön:

$\sphericalangle ABC$:

$$tan\alpha = \left| \frac{-3-\frac{3}{8}}{1+(-3)\cdot\frac{3}{8}} \right| = \left| \frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{1}{8}} \right| = 27,$$

josta

$$\begin{aligned} tan\alpha =& 27 \\ \alpha \approx& 88^\circ. \end{aligned}$$

$\sphericalangle BCA$:

$$\tan\alpha = \left| \frac{\frac{3}{8}-(-\frac{6}{11})}{1+\frac{3}{8}\cdot(-\frac{6}{11})} \right| = \left| \frac{\frac{81}{88}}{\frac{35}{44}} \right| = \frac{81}{70},$$

josta

$$\begin{aligned} \tan\alpha =& \frac{81}{70} \\ \alpha \approx& 49\,°. \end{aligned}$$

$\sphericalangle CAB$:

$$\tan\alpha = \left| \frac{-\frac{6}{11} - (-3)}{1 + (-\frac{6}{11} \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{\frac{27}{11}}{\frac{29}{11}} \right| = \frac{27}{29},$$

josta

$$\begin{aligned} \tan\alpha =& \frac{27}{29} \\ \alpha \approx& 43\,°. \end{aligned}$$

Vastaus: Kolmion ABC kulmien suuruudet ovat $88\,°$, $49\,°$ ja $43\,°$.

Tehtävä 17

a) Suora $y = -8$ on x-akselin suuntainen ja suora $x - 6 = 0$ on y-akselin suuntainen, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. $\square$

b) Selvitetään suorien $x - 2y - 6 = 0$ ja $x + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$ kulmakertoimet.

Ensimmäisen suoran yhtälö ratkaistussa muodossa

$$\begin{aligned} x - 2y - 6 =& 0 \\ -2y =& x - 6 \qquad \| : (-2) \\ y =& \frac{1}{2} - 3. \end{aligned}$$

Toisen suoran yhtälö ratkaistussa muodossa

$$\begin{aligned} x + \frac{y}{2} - 1 =& 0 \\ \frac{y}{2} =& -x + 1 \qquad \| \cdot 2 \\ y =& -2x + 2. \end{aligned}$$

Suorien yhtälöiden ratkaistuista muodoista nähdään, että kulmakertoimet ovat $k_1 = \dfrac{1}{2}$ ja $k_2 = -2$. Suorat ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, koska niiden tulo on -1:

$$\frac{1}{2} \cdot -2 = -1. \qquad \square$$

Tehtävä 18

Saatetaan ensin yhtälö $2px - 4y + 8 = 0$ ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} 2px - 4y + 8 &= 0 \\ -4y &= -2px - 8 \qquad \| : (-4) \\ y &= \frac{p}{2}x + 2. \end{aligned}$$

Myös yhtälö $x + 2y + py = 0$ saatetaan ratkaistuun muotoon:

$$\begin{aligned} x + 2y + py &= 0 \\ (2+p)y &= -x \qquad \| : (2+p) \\ y &= -\frac{1}{2+p}x. \end{aligned}$$

Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun suorien kulmakertoimien $\dfrac{p}{2}$ ja $-\dfrac{1}{2+p}$ tulo on -1:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2+p} \cdot \frac{p}{2} &= -1 \\ -\frac{p}{4+2p} &= -1 \qquad \| \cdot (4+2p) \\ -p &= -4 - 2p \\ p &= -4. \end{aligned}$$

Vastaus: Annetut suorat ovat toisiaan vasten kohtisuorassa, kun vakio $p = -4$.

Tehtävä 19

Sijoitetaan pisteen koordinaatit $x_0 = -2$, $y_0 = -3$ sekä suoran yhtälön kertoimet $a = 8$, $b = 15$ ja $c = -24$ pisteen etäisyyden kaavaan:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 \cdot (-2) + 15 \cdot (-3) + (-24)|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{|-85|}{\sqrt{289}} = \frac{85}{17} = 5.$$

Vastaus: Etäisyys on 5.

Tehtävä 20

Olkoon $P(x, y)$ mielivaltainen piste suoralta, joka on yhdensuuntainen suoran $12x - 5y - 15 = 0$ kanssa ja jonka etäisyys kyseisestä suorasta on 4. Sijoitetaan pisteen P koordinaatit sekä suoran $12x - 5y - 15 = 0$ kertoimet pisteen etäisyyden kaavaan

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|12x - 5y - 15|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}}.$$

Koska vaaadittu etäisyys on 4, saadaan muodostettua yhtälö:

$$\begin{aligned} \frac{|12x - 5y - 15|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} &= 4 \\ \frac{|12x - 5y - 15|}{13} &= 4 \qquad \| \cdot 13 \\ |12x - 5y - 15| &= 52 \end{aligned}$$

Poistetaan itseisarvomerkit

$$12x - 5y - 15 = \pm\, 52$$

Ratkaistaan nämä yhtälöt:
$12x - 5y - 15 = 52$, josta $12x - 5y - 67 = 0$.
$12x - 5y - 15 = -52$, josta $12x - 5y + 37 = 0$.

Vastaus: Suorien yhtälöt ovat $12x - 5y - 67 = 0$ ja $12x - 5y + 37 = 0$.

7.4 Ympyrä

Tehtävä 21

Selvitetään ensin säde laskemalla keskipisteen etäisyys kehällä olevasta pisteestä

$$r = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85},$$

jonka jälkeen sijoitetaan ympyrän keskipisteen koordinaatit ja saatu säde ympyrän keskipistemuotoiseen yhtälöön $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 85$.

Vastaus: Suoran yhtälö on $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 85$.

Tehtävä 22

Muodostetaan ympyrän yhtälöistä yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Vähennetään yhtälöt puolittain, jolloin saadaan yhtälö $2x + 2y - 11 = -5$ ja edelleen $y = -x + 3$.

Sijoitetaan saatu yhtälö $y = -x + 3$ yhtälöparin alempaan yhtälöön

$$\begin{aligned} x^2 + (-x+3)^2 &= 5 \\ x^2 + x^2 - 6x + 9 - 5 &= 0 \\ 2x^2 - 6x + 4 &= 0, \end{aligned}$$

josta saadaan toisen asteen ratkaisukaavalla kaksi ratkaisua, $x = 1$ ja $x = 2$.

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti, kun $x = 1$:

$y = -1 + 3 = 2$

Leikkauspiste on siis piste $(1, 2)$.

Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti, kun $x = 2$:

$y = -2 + 3 = 1$

Leikkauspiste on siis piste $(2, 1)$.

Vastaus: Leikkauspisteet ovat pisteet $(1, 2)$ ja $(2, 1)$.

Tehtävä 23

Ympyrän keskipiste sijaitsee suorien $y = -2x$ ja $2x - 3y = -4$ leikkauspisteessä. Sijoitetaan ensimmäinen yhtälö toiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 2x - 3(-2x) &= -4 \\ 8x &= -4 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu $x = -\dfrac{1}{2}$ yhtälöön $y = -2x$, jolloin saadaan $y = 1$.
Ympyrän keskipiste on siis piste $(-\dfrac{1}{2}, 1)$.
y-koordinatti ilmoittaa pisteen etäisyyden x-akselista ja koska ympyrä sivuaa x-akselia, säde $r = 1$. Nyt voidaan muodostaa kysytyn ympyrän yhtälö sijoittamalla ympyrän keskipisteen koordinaatit $(-\dfrac{1}{2}, 1)$ sekä säde $r = 1$ ympyrän keskipistemuotoiseen yhtälöön

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \\ (x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Vastaus: Ympyrän yhtälö on $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Tehtävä 24

Jos suora $4x - 3y + 5 = 0$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti, niillä on yksi ja vain yksi yhteinen piste. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Kun johdetaan ylempi yhtälö muotoon $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ ja sijoitetaan se alempaan yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{5}{3})^2 =& 1 \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{40}{9}x + \frac{25}{9} =& 1 \qquad \| \cdot 9 \\ 25x^2 + 40x + 16 =& 0. \end{aligned}$$

Käyttämällä toisen asteen ratkaisukaavaa saadaan $x = -\frac{4}{5}$. Sijoitetaan tämä suoran yhtälöön $4x - 3y + 5 = 0$:

$$\begin{aligned} 4(-\frac{4}{5}) - 3y + 5 =& 0 \\ -\frac{16}{5} - 3y + 5 =& 0 \qquad \| \cdot 5 \\ -16 - 15y + 25 =& 0 \\ y =& \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Suora $4x - 3y + 5 = 0$ ja ympyrä $x^2 + y^2 = 1$ leikkaavat siis ainoastaan yhdessä pisteessä, joten suora on ympyrän tangentti. Leikkauspiste on piste $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. □

Tehtävä 25

Ympyrän ala lasketaan kaavalla $A_y = \pi r^2$.
Ympyrän säde saadaan ratkaistua muuttamalla ympyrän yhtälö

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$$

keskipiste muotoon neliöksi täydentämällä

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + \mathbf{9} + y^2 - 2y + \mathbf{1} =& 6 + \mathbf{9} + \mathbf{1} \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 =& 16. \end{aligned}$$

Tästä yhtälösta nähdään, että ympyrä säde on $\sqrt{16} = 4$.

Sijoitetaan ratkaistu säde ympyrän alan kaavaan:
$A_p = \pi r^2 = \pi 4^2 \approx 50,3.$

Vastaus: Ympyrän ala on noin $50,3$.

7.5 Kartioleikkaukset

Tehtävä 26

Leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat sekä suoran että paraabelin yhtälöt. Ratkaistaan siis yhtälöpari

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

sijoittamalla suoran yhtälö ympyrän yhtälöön

$$\begin{aligned} -x + 3 =& x^2 - 4 \\ x^2 + x - 7 =& 0. \end{aligned}$$

Toisen asteen ratkaisukaavalla saadaan kaksi ratkaisua, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.
Sijoitetaan leikkauspisteiden x-koordinaatit suoran yhtälöön
$y = -x + 3 = -(\dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}) + 3 = \dfrac{7 \mp \sqrt{29}}{2}$.

Vastaus: Suora ja paraabeli leikkaavat pisteissä $(\dfrac{-1 + \sqrt{29}}{2}, \dfrac{7 - \sqrt{29}}{2})$ ja $(\dfrac{-1 - \sqrt{29}}{2}, \dfrac{7 + \sqrt{29}}{2})$.

Tehtävä 27

Pisteen $(0, 1)$ koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön $y = ax^2 + bx + c$, joten sijoitetaan pisteen koordinaatit paraabelin yhtälöön

$$\begin{aligned} y =& ax^2 + bx + c \\ 1 =& 0a + 0b + c \\ c =& -1. \end{aligned}$$

Huipun x-koordinaatti saadaan laskettua kaavasta $x_0 = -\frac{b}{2a}$, joten sijoitetaan siihen huipun x-koordinaatti $x_0 = -1$:

$-1 = -\frac{b}{2a}$, josta saadaan $b = 2a$.

Myös huipun koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön $y = ax^2 + bx + c$:

$$2 = (-1)^2 a - 1b + c,$$

johon sijoitetaan saadut $c = -1$ ja $b = 2a$

$$\begin{aligned} 2 =& a - 2a - 1 \\ a =& -3. \end{aligned}$$

Nyt saadaan myös ratkaistua $b = 2a = 2 \cdot (-3) = -6$.
Paraabelin yhtälö on siis $y = -3x^2 - 6x - 1$ ja se aukeaa alaspäin, sillä $a < 0$.

Vastaus: Paraabelin yhtälö on $y = -3x^2 - 6x - 1$ ja se aukeaa alaspäin.

Tehtävä 28

Ympyrän ja paraabelin leikkauspisteiden koordinaatit toteuttavat molemmat yhtälöt. Sijoitetaan siis paraabelin yhtälö $y = 2x^2$ ympyrän yhtälöön $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 - 1 =& 0 \\ 4x^4 - 3x^2 - 1 =& 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $u = x^2$ yhtälöön ja ratkaistaan saatu toisen asteen yhtälö

$$4u^2 - 3u - 1 = 0.$$

Toisen asteen ratkaisukaavalla saadaan kaksi ratkaisua, $u = 1$ ja $u = -\frac{1}{4}$.
Palataan takaisin muuttujaan x. Sijoitetaan $u = 1$ muunnosyhtälöön:

$$\begin{aligned} u =& x^2 \\ x^2 =& 1 \qquad \| \sqrt{} \\ x =& \pm 1. \end{aligned}$$

Sijoitetaan $u = -\frac{1}{4}$ muunnosyhtälöön:

$$\begin{aligned} u =& x^2 \\ x^2 =& -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Koska yhtälöllä $x^2 = -\frac{1}{4}$ ei ole reaalisia ratkaisuja, paraabelin ja ympyrän leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat $x = \pm 1$. Leikkauspisteiden y-koordinaatit saadaan sijoittamalla x-koordinaatit paraabelin yhtälöön $y = 2x^2$. Koska paraabelin yhtälössä x on korotettu toiseen potenssiin, on molemmilla leikkauspisteillä sama y-koordinaatti $y = 2$. Leikkauspisteet ovat siis pisteet $(1, 2)$ ja $(-1, 2)$.

Vastaus: Ympyrän ja paraabelin leikkauspisteet ovat pisteet $(1, 2)$ ja $(-1, 2)$.

Tehtävä 29

Ellipsin yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jossa a ja b ovat puoliakselien pituudet. Sijoitetaan siis ellipsin yhtälöön $a = 3$ ja $b = 4$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} =& 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} =& 1. \end{aligned}$$

Vastaus: Ellipsin yhtälö on $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Tehtävä 30

Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(4, 0)$ on

$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.

Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x - 16 = 0$ saadaan laskettua kaavalla

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sijoitetaan tunnetut arvot yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} d &= \frac{|1x + 0y - 16|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \\ d &= |x - 16|\,. \end{aligned}$$

Koska etäisyys ei voi olla negatiivinen, voidaan saadusta etäisyyden yhtälöstä poistaa itseisarvomerkit.
Koska pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(4, 0)$ on puolet sen etäisyydestä suoraan $x - 16 = 0$, voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-4)^2 + y^2} &= \frac{1}{2}(x - 16) \qquad \| \,(\,)^2 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 &= \frac{x^2 - 32x + 256}{4}. \end{aligned}$$

Sieventämällä saadaan yhtälö muotoon

$$3x^2 + 4y^2 = 192,$$

joka voidaan myös esittää muodossa

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Vastaus: Yhtälö on $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$ eli kyseessä on ellipsin yhtälö.

Tehtävä 31
Saatetaan hyperbelin yhtälö $3x^2 - 9y^2 = 27$ muotoon $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{3} = 1$.
a) Lauseen 6.6 mukaan hyperbelin polttopisteet ovat pisteet $F_1(c, 0)$ ja $F_2(-c, 0)$, missä $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Hyperbelin yhtälöstä nähdään, että $a^2 = 9$ ja $b^2 = 3$.
Tällöin $c = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, jolloin polttopisteet ovat $F_1(2\sqrt{3}, 0)$ ja

$F_2(-2\sqrt{3}, 0)$.

b) Koska $a^2 = 9$, $a = \pm 3$ ja koska $b^2 = 3$, $b = \pm\sqrt{3}$, hyperbelin asymptootit ovat $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vastaus: Hyperbelin polttopisteet ovat pisteet $(2\sqrt{3}, 0)$ ja $(-2\sqrt{3}, 0)$ ja asymptootit ovat suorat $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Tehtävä 32

Lasketaan suoran ja hyperbelin leikkauspisteet sijoittamalla suoran yhtälö $x = 2y + 4$ hyperbelin yhtälöön $x^2 - y^2 = 16$

$$\begin{aligned}(2y+4)^2 - y^2 &= 16\\ 4y^2 + 16y + 16 - y^2 &= 16\\ 3y^2 + 16y &= 0\\ y(3y + 16) &= 0,\end{aligned}$$

josta saadaan kaksi ratkaisua, $y = 0$ ja $y = -\frac{16}{3}$. Sijoitetaan saadut y:n arvot suoran yhtälöön.

Kun $y = 0$, $x = 4$.

Kun $y = -\frac{16}{3}$, $x = -\frac{20}{3}$.

Seuraavaksi lasketaan näiden leikkauspisteiden välinen etäisyys

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\\ &= \sqrt{(-\frac{20}{3} - 4)^2 + (-\frac{16}{3} - 0)^2}\\ &= \sqrt{\frac{1024}{9} + \frac{256}{9}}\\ &= \frac{16\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

Vastaus: Janan pituus on $\frac{16\sqrt{5}}{3}$.

8 Lähdeluettelo

Hautajärvi T., Ottelin J., Wallin-Jaakkola L.: *Laudatur 4 - Analyyttinen geometria.* Otava, Helsinki, 2005.

Jäppinen P., Kupiainen A. ja Räsänen M.: *Calculus 2 - Analyyttinen geometria.* Otava, Helsinki, 2001.

Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J., Salmela M.: *Analyyttinen geometria - pitkä matematiikka.* WSOY, Porvoo, 1995.

Kindle J.:*Schaum's Outline of Theory and Problems of Plain and Solid Analytic Geometry.* Schaum Publishing Co., New York, 1950.

Lahti U. ja Laine Y.: *Alfa, Lukion laajanmatematiikan kurssit 1-4.*Otava, Helsinki, 1987.

Tarnanen H.: *Matematiikan historia.* Matematiikan laitos, Turun yliopisto.

Väisälä K.: *Geometria.* WSOY, Porvoo, 1968.

Internet lähteet:

Opetushallitus: *http://www.oph.fi/etalukio/opiskelumodulit/pimatem /paavalikko/pmku4/pmku4_1.html.* 16.1.2008